

Übungen zur Funktionentheorie 1

SS 2017

Blatt 8

Prof. Fritzsche

29) Bestimmen Sie – wenn möglich – holomorphe Funktionen $f(z)$ mit

$$\operatorname{Re}(f(x + iy)) = x^2 - 3x - y^2 \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{Re}(f(x + iy)) = 5e^{3x} \cos(3y).$$

30) Berechnen Sie das Integral $\int_{\partial D_4(0)} \frac{\sin^2 z \, dz}{(z - \pi/6)^2(z + \pi/6)}.$

31) a) Zeigen Sie: Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ungerade und periodisch mit Periode 2π , so ist $\int_0^{2\pi} f(t) \, dt = 0$.

b) Berechnen Sie $I := \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}$, indem Sie das Integral $\int_\gamma dz/z$ für $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) := a \cos t + i b \sin t$ berechnen.

32) a) Die Potenzreihe $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ konvergiert auf $D_1(0)$ gegen eine holomorphe Funktion. Entwickeln Sie $f(z)$ um $z_0 := i/2$ in eine Potenzreihe $p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ und bestimmen Sie deren Konvergenzradius R .

Zeigen Sie, dass durch

$$F(z) := \begin{cases} f(z) & \text{für } z \in D_1(0) \\ p(z) & \text{für } z \in D_R(z_0) \end{cases}$$

eine holomorphe Funktion auf $D_1(0) \cup D_R(z_0)$ definiert wird.

b) Bestimmen Sie den Wert der Potenzreihe $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$ und ihren Konvergenzradius R .

Erklären Sie, warum R endlich ist, obwohl $f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert ist.

Abgabe: **Donnerstag**, 29.06.2017, 12 Uhr. **Es gibt pro Aufgabe maximal 12 Punkte.**

Lösg. zu Afg. 29:

- a) Damit $g(x + iy) = x^2 - 3x - y^2$ Realteil einer holomorphen Funktion sein kann, muß g harmonisch sein.

Tatsächlich gilt:

$$g_{xx} = 2 \text{ und } g_{yy} = -2, \quad \text{also } \Delta g = g_{xx} + g_{yy} = 0.$$

Man weiß dann schon, daß es eine holomorphe Funktion f mit $\operatorname{Re}(f) = g$ gibt. Sei $f = g + ih$. Die Cauchy-Riemannschen DGLn liefern:

$$\begin{aligned} g_x = h_y &\implies h_y = 2x - 3 \\ g_y = -h_x &\implies h_x = 2y \end{aligned}$$

Integration von h_y liefert:

$$h(x + iy) = 2xy - 3y + c(x), \text{ mit } c'(x) = 0, \text{ also } c \text{ konstant.}$$

Wir haben die Freiheit, $c = 0$ zu setzen, und definieren $f(x + iy) = x^2 - 3x - y^2 + i(2xy - 3y) = (x + iy)^2 - 3(x + iy)$, d.h. $f(z) = z^2 - 3z$. Diese Funktion ist holomorph und hat den gewünschten Realteil.

- b) Sei $g(x + iy) = 5e^{3x} \cos(3y)$. Es gilt:
 $g_{xx} = 45e^{3x} \cos(3y)$, $g_{yy} = -45e^{3x} \cos(3y)$, also $g_{xx} + g_{yy} = 0$. Damit ist die Existenz einer holomorphen Funktion f mit $\operatorname{Re} f = g$ gesichert.

Wir setzen wieder f in der Form $f = g + ih$ an. Die Cauchy-Riemannschen DGLn liefern:

$$\begin{aligned} g_x = h_y &\implies h_y = 15e^{3x} \cos(3y) \\ g_y = -h_x &\implies h_x = 15e^{3x} \sin(3y) \end{aligned}$$

Integration von h_x ergibt $h(x + iy) = 5e^{3x} \sin(3y) + c(x)$,
 und wir setzen $f(x + iy) = 5e^{3x} \cos(3y) + i5e^{3x} \sin(3y) = 5e^{3(x+iy)}$.
 $f(z) = 5e^{3z}$ ist tatsächlich eine Lösung.

Lösg. zu Afg. 30: Die Partialbruchzerlegung liefert:

$$\frac{1}{(z - \pi/6)^2(z + \pi/6)} = -\frac{9}{\pi^2(z - \pi/6)} + \frac{3}{\pi(z - \pi/6)^2} + \frac{9}{\pi^2(z + \pi/6)}.$$

Also ist

$$\begin{aligned} &\int_{\partial D_4(0)} \frac{\sin^2 z \, dz}{(z - \pi/6)^2(z + \pi/6)} = \\ &= -\frac{9}{\pi^2} \int_{\partial D_4(0)} \frac{\sin^2 z \, dz}{z - \pi/6} + \frac{3}{\pi} \int_{\partial D_4(0)} \frac{\sin^2 z \, dz}{(z - \pi/6)^2} + \frac{9}{\pi^2} \int_{\partial D_4(0)} \frac{\sin^2 z \, dz}{z + \pi/6} \\ &= -\frac{9 \cdot 2\pi i}{\pi^2} \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{3 \cdot 2\pi i}{\pi} [\sin^2]'\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{9 \cdot 2\pi i}{\pi^2} \sin^2\left(-\frac{\pi}{6}\right) \\ &= 12i \cdot \sin(\pi/6) \cos(\pi/6) = 3i\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Lösg. zu Afg. 31: a) Weil f periodisch mit Periode 2π ist, ist $\int_0^{2\pi} f(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \int_{-\pi}^0 f(t) dt + \int_0^{\pi} f(t) dt$. Und weil f ungerade ist, also $f(-t) = -f(t)$, folgt mit $\varphi(s) := -s$, dass $\int_{-\pi}^0 f(t) dt = \int_{\varphi(\pi)}^{\varphi(0)} f(t) dt = \int_{\pi}^0 f \circ \varphi(s) \varphi'(s) ds = -\int_0^{\pi} f(-s)(-1) ds = -\int_0^{\pi} f(s) ds$.

b) γ beschreibt eine Ellipse mit Mittelpunkt 0 (und Halbachsen a und b). Daher ist

$$\begin{aligned} 2\pi i &= \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{ib \cos t - a \sin t}{\gamma(t)} dt = i \int_0^{2\pi} \frac{b \cos t + ia \sin t}{\gamma(t)} dt \\ &= i \int_0^{2\pi} \frac{(b \cos t + ia \sin t)(a \cos t - ib \sin t)}{\gamma(t)\overline{\gamma(t)}} dt \\ &= iab \int_0^{2\pi} \frac{1}{\gamma(t)\overline{\gamma(t)}} dt - (a^2 - b^2) \int_0^{2\pi} \frac{\sin t \cos t}{\gamma(t)\overline{\gamma(t)}} dt = iab \cdot I, \end{aligned}$$

weil das zweite Integral wegen (a) verschwindet. Also ist $I = \frac{2\pi}{ab}$.

Lösg. zu Afg. 32: a) Es handelt sich um die geometrische Reihe um 0 mit Grenzwert $f(z) = 1/(1-z)$ und Konvergenzradius $r = 1$. Der Definitionsbereich der holomorphen Funktion f ist das Gebiet $G := \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Man kann f in dem größten Kreis um $z_0 = i/2$, der noch in G hineinpasst, in eine Potenzreihe $p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ entwickeln. Es ist

$$|1 - z_0| = \sqrt{1 + (1/2)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{5} =: R.$$

Der Konvergenzradius von $p(z)$ muss also $= R$ sein. Ist $|z - z_0| < |1 - z_0| = R$, so gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z} &= \frac{1}{(1-z_0) - (z-z_0)} = \frac{1}{1-z_0} \cdot \frac{1}{1 - (z-z_0)/(1-z_0)} \\ &= \frac{1}{1-z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{1-z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \end{aligned}$$

$$\text{mit } a_n = \frac{1}{(1-z_0)^{n+1}} = \frac{1}{(1-i/2)^{n+1}}.$$

Für $z \in D_1(0) \cap D_R(z_0)$ ist $|z - z_0| < R$ und $|z| < 1$. Dort konvergieren beide Potenzreihen, und wie oben gezeigt, ist dort $f(z) = p(z)$. Also definiert F eindeutig eine Funktion auf $G^* := D_1(0) \cup D_R(z_0)$. Es ist klar, dass F auf G^* holomorph ist. Dies ist ein Beispiel für eine holomorphe Fortsetzung per Reihenentwicklung.

b) Der Konvergenzradius R von $f(z)$ ist offensichtlich $= 1$. Für $|z| < 1$ ist $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n$ eine geometrische Reihe mit Grenzwert $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$. Für jedes

reelle x ist $f(x)$ definiert. Der Konvergenzradius kann dennoch nicht größer als 1 sein, denn die Reihe konvergiert nicht im Punkt $z_0 = i$. Das Verhalten der Potenzreihe im Komplexen erklärt ihr etwas rätselhaftes Verhalten in $\mathbb{R}$.