Übungen zur Funktionentheorie 1

SS 2017 **Blatt 7** **Prof. Fritzsche**

25) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\int_{\partial D_1(\mathsf{i}/2)} \frac{\sin(\pi\,\mathsf{i}\,z/2)}{z^2-(\mathsf{i}+1)z+\mathsf{i}}\,dz \quad \text{und} \quad \int_{\partial D_3(0)} \frac{\cosh(z^2)}{z(z^2+4)}\,dz\,.$$

26) a) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und ohne Nullstellen, f' stetig. Zeigen Sie: Ist $|f(z)-1| < 1$ für alle $z \in G$, so ist $\displaystyle\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 0$ für jeden geschlossenen Integrationsweg γ in G.

b) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und ohne Nullstellen. Zeigen Sie: Ist f' holomorph, so gibt es eine holomorphe Funktion h auf G mit $e^h = f$ und $h' = f'/f$.

27) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und f' stetig. Zeigen Sie: Ist $\alpha : [a,b] \to G$ ein geschlossener Integrationsweg, so ist $\displaystyle\int_\alpha \overline{f(z)} \cdot f'(z)\,dz$ rein imaginär.

28) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\int_{\partial D_2(0)} \frac{e^{\pi z/2}}{z^2-1-2\,\mathsf{i}\,z}\,dz \quad \text{und} \quad \int_{\partial D_2(0)} \frac{z^m\,dz}{(1-z)^n} \text{ für } m,n \in \mathbb{N}.$$

Abgabetermin: **Donnerstag**, 22.06.2017, 12 Uhr.

Es gibt pro Aufgabe maximal 12 Punkte.

Lösg. zu Afg. 25: 1) Es ist $z^2 - (\mathrm{i}+1)z + \mathrm{i} = (z-1)(z-\mathrm{i})$. Offensichtlich liegt i in $D_1(\mathrm{i}/2)$. Weil $|1-\mathrm{i}/2| = \sqrt{5}/2 > 1$ ist, liegt 1 nicht in dem Kreis. Die Cauchy'sche Integralformel liefert nun:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D_1(\mathrm{i}/2)} \frac{\sin(\pi\,\mathrm{i}\,z/2)}{z^2-(\mathrm{i}+1)z+\mathrm{i}}\,dz &= \frac{1+\mathrm{i}}{2}\int_{\partial D_1(\mathrm{i}/2)} \frac{\sin(\pi\,\mathrm{i}\,z/2)}{z-1}\,dz \\
&\quad - \frac{1+\mathrm{i}}{2}\int_{\partial D_1(\mathrm{i}/2)} \frac{\sin(\pi\,\mathrm{i}\,z/2)}{z-\mathrm{i}}\,dz \\
&= -(1+\mathrm{i})\pi\,\mathrm{i}\,\sin(-\pi/2) \;=\; \pi(\mathrm{i}-1).
\end{aligned}$$

2) Es ist

$$\frac{1}{z(z^2+4)} = \frac{1}{z(z-2\,\mathrm{i})(z+2\,\mathrm{i})} = \frac{1}{4z} - \frac{1}{8(z-2\,\mathrm{i})} - \frac{1}{8(z+2\,\mathrm{i})}$$

und daher

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial D_3(0)} \frac{\cosh(z^2)}{z(z^2+4)}\,dz = \\
&= \int_{\partial D_3(0)} \frac{\cosh(z^2)}{4z}\,dz - \int_{\partial D_3(0)} \frac{\cosh(z^2)}{8(z-2\,\mathrm{i})}\,dz - \int_{\partial D_3(0)} \frac{\cosh(z^2)}{8(z+2\,\mathrm{i})}\,dz \\
&= \frac{2\pi\,\mathrm{i}}{4}\cosh(0) - \frac{2\pi\,\mathrm{i}}{8}\cosh(-4) - \frac{2\pi\,\mathrm{i}}{8}\cosh(-4) \\
&= \frac{\pi\,\mathrm{i}}{2} - \frac{\pi\,\mathrm{i}}{2}\cosh(4) \;=\; \frac{\pi\,\mathrm{i}}{2}\big(1-\cosh(4)\big).
\end{aligned}$$

Lösg. zu Afg. 26: a) Nach Voraussetzung ist $f(G) \subset D_1(1)$. Deshalb ist $\log\circ f : G \to \mathbb{C}$ definiert und holomorph. Also ist

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \int_\gamma \big(\log\circ f\big)'(z)\,dz = \log\circ f(z_E(\gamma)) - \log\circ f(z_A(\gamma)) = 0,$$

weil γ geschlossen ist.

b) Weil f'/f holomorph auf G und G einfach zusammenhängend ist, gibt es auf G eine Stammfunktion F von f'/f. Sei $H := (\exp\circ F)/f$. Dann ist H holomorph und

$$H'(z) = \frac{\exp(F(z))\cdot F'(z)\cdot f(z) - \exp(F(z))\cdot f'(z)}{f(z)^2} \equiv 0 \text{ für alle } z \in G$$

(weil $F' = f'/f$ ist), also $H(z) \equiv c$ konstant. Deshalb ist $\exp(F(z)) = c\cdot f(z)$ und $c \neq 0$. Man setze $h(z) := F(z) - \log(c)$, mit einem geeigneten Logarithmus von c. Dann ist h holomorph und $\exp\circ h(z) = \exp\circ F(z)/c = f(z)$.

Aus der Gleichung $\exp\circ h(z) = f(z)$ erhält man durch Differentiation die Gleichung $(\exp\circ h)(z)\cdot h'(z) = f'(z)$, also $h'(z) = f'(z)/f(z)$.

Lösg. zu Afg. 27: $\beta := f \circ \alpha : [a,b] \to \mathbb{C}$ ist ein geschlossener Integrationsweg. Schreibt man $\beta = \beta_1 + \mathrm{i}\,\beta_2$, so ist

$$\int_a^b \beta_1(t)\beta_1'(t)\,dt = \beta_1^2(b) - \beta_1^2(a) - \int_a^b \beta_1(t)\beta_1'(t)\,dt,$$

also $\int_a^b \beta_1(t)\beta_1'(t)\,dt = 0$ (und analog auch $\int_a^b \beta_2(t)\beta_2'(t)\,dt = 0$). Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\int_\alpha \overline{f(z)} \cdot f'(z)\,dz &= \int_a^b \overline{f(\alpha(t))} f'(\alpha(t))\alpha'(t)\,dt \\
&= \int_a^b \overline{f \circ \alpha(t)} \cdot (f \circ \alpha)'(t)\,dt \;=\; \int_\beta \overline{z}\,dz \\
&= \int_a^b \big(\beta_1(t) - \mathrm{i}\,\beta_2(t)\big) \cdot \big(\beta_1'(t) + \mathrm{i}\,\beta_2'(t)\big)\,dt \\
&= \int_a^b \big(\beta_1(t)\beta_1'(t) + \beta_2(t)\beta_2'(t)\big)\,dt \\
&\quad + \mathrm{i} \int_a^b \big(\beta_1(t)\beta_2'(t) - \beta_2(t)\beta_1'(t)\big)\,dt.
\end{aligned}$$

Weil der erste Summand verschwindet, ist das Ergebnis rein imaginär.

Lösg. zu Afg. 28: 1) Es ist $(z - \mathrm{i}\,)^2 = z^2 - 1 - 2\,\mathrm{i}\,z$ und $\mathrm{i} \in D_2(0)$. Die zweite Cauchy'sche Integralformel liefert

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D_2(0)} \frac{e^{\pi z/2}}{z^2 - 1 - 2\,\mathrm{i}\,z}\,dz &= 2\pi\,\mathrm{i} \cdot \Big(\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_{\partial D_2(0)} \frac{e^{\pi z/2}}{(z - \mathrm{i}\,)^2}\,dz\Big) \\
&= 2\pi\,\mathrm{i} \cdot \frac{\pi}{2} e^{\mathrm{i}\,\pi/2} \;=\; -\pi^2.
\end{aligned}$$

2) Der Punkt 1 liegt in $D_2(0)$. Daher ist

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D_2(0)} \frac{z^m\,dz}{(1-z)^n} &= (-1)^n \int_{\partial D_2(0)} \frac{z^m\,dz}{(z-1)^n} \\
&= (-1)^n \frac{2\pi\,\mathrm{i}}{(n-1)!} [z^m]^{(n-1)}(1) \;=\; 0, \text{ falls } n \ge m+2 \text{ ist.}
\end{aligned}$$

Für $n \le m + 1$ ist

$$\int_{\partial D_2(0)} \frac{z^m\,dz}{(1-z)^n} = (-1)^n \frac{2\pi\,\mathrm{i}}{(n-1)!} m(m-1)\cdots(m-n+2) = 2\pi\,\mathrm{i}\,(-1)^n \binom{m}{n-1}.$$