

Übungen zur Funktionentheorie 1

SS 2017

Blatt 6

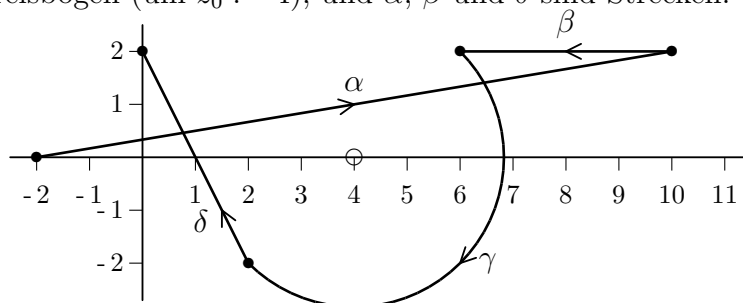
Prof. Fritzsche

21) Die Integrationswege $\alpha, \beta, \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ und $\delta : [0, 3] \rightarrow \mathbb{C}$ seien definiert durch $\alpha(t) := 2.5e^{2\pi i t}$, $\beta(t) := -1.5i + 1.5 \cos(\pi(t+1)) + 0.5i \sin(\pi(t+1))$ und $\gamma(t) := -1.5i + 2it$, sowie

$$\delta(t) := \begin{cases} -1 + 0.5e^{i\pi(1/2-2t)} & \text{für } 0 \leq t \leq 1, \\ -1 + 0.5i + 2(t-1) & \text{für } 1 \leq t \leq 2, \\ 1 + 0.5e^{i\pi(9/2-2t)} & \text{für } 2 \leq t \leq 3 \end{cases}.$$

Skizzieren Sie die Spur der Kette $\Gamma := \alpha + \beta + \gamma + \delta$. und berechnen Sie $\int_{\delta} z dz$.

22) Die folgende Skizze zeigt die Spur der Kette $\Gamma = \alpha + \beta + \gamma + \delta$. Dabei ist γ ein Halbkreisbogen (um $z_0 := 4$), und α, β und δ sind Strecken.



a) Geben Sie Parametrisierungen der Wege $\alpha, \beta, \gamma, \delta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ an.

b) Berechnen Sie **auf möglichst einfache Weise** das Integral $\int_{\Gamma} \frac{dz}{z+1-i}$.

23) a) Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{Z}$ sei $f_k(z) = x + iky$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\alpha_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ durch $\alpha_n(t) := t + it^n$ definiert. Zeigen Sie: $\int_{\alpha_n} f_k(z) dz$ ist genau dann unabhängig von n , wenn f_k holomorph ist.

b) Sei α die Parametrisierung des Viertelkreisbogens um 0, der die Zahlen 3 und $3i$ miteinander verbindet. Beweisen Sie (ohne explizite Berechnung des Integrals)

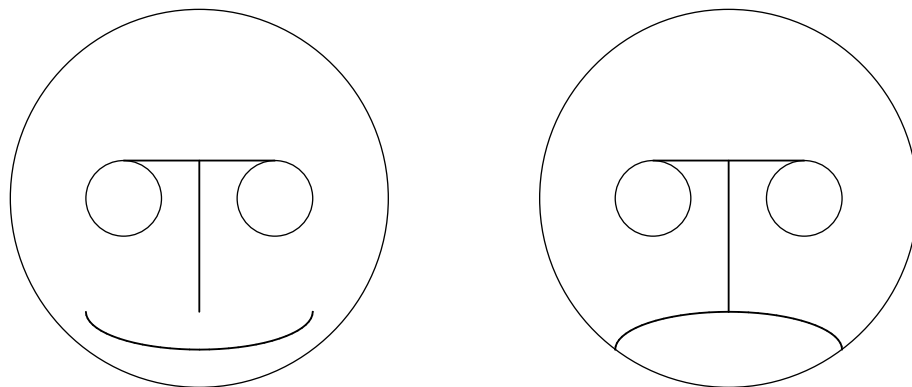
die Abschätzung $\left| \int_{\alpha} \frac{dz}{1+z^2} \right| \leq \frac{3\pi}{16}$.

24) a) Berechnen Sie $\int_{\alpha} (1/z) dz$, wobei α den Streckenzug von $1+i$ über -1 nach $1-i$ parametrisiert.

b) Sei $U = U(a) \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann ist $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a)$.

Abgabetermin: **Mittwoch**, 14.06.2017, 12 Uhr. **Es gibt pro Aufgabe maximal 12 Punkte.**

Lösg. zu Afg. 21:

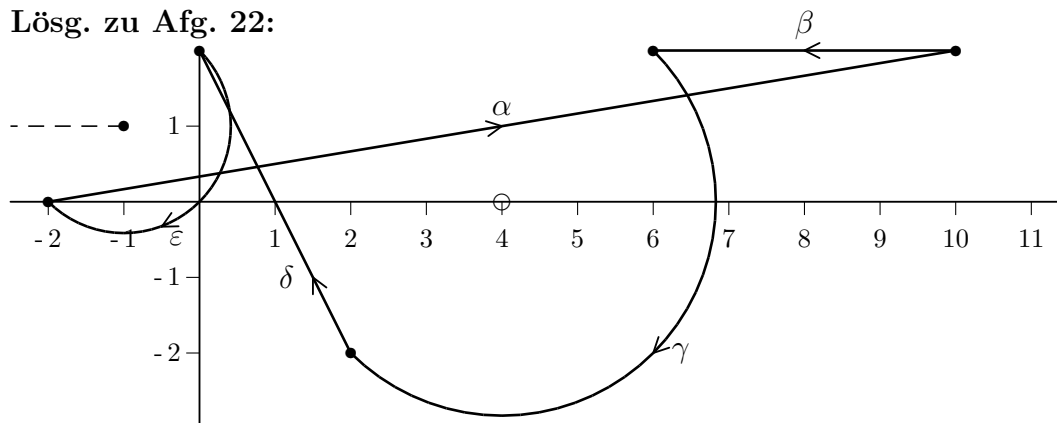


Links ist die Spur der Kette Γ zu sehen (die rechte Skizze erhält man, wenn man β durch $\tilde{\beta} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\tilde{\beta}(t) := -2i + 1.5 \cos(\pi t) + 0.5i \sin(\pi t)$ ersetzt). α beschreibt den großen Kreis, β den halben Ellipsenbogen um $-1.5i$ (mit Halbachsen $a = 1.5$ und $b = 0.5$), also den „Mund“. γ beschreibt die vertikale Strecke (die „Nase“). Schließlich enthält δ die beiden (negativ durchlaufenen) kleinen Kreise und die von links nach rechts durchlaufene Verbindungsstrecke. Die rechte Skizze erhält man, wenn man β durch $\tilde{\beta} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\tilde{\beta}(t) := -2i + 1.5 \cos(\pi t) + 0.5i \sin(\pi t)$ ersetzt.

Die Funktion $f(z) = z$ besitzt auf ganz $\mathbb{C}$ die Stammfunktion $F(z) = z^2/2$. Deshalb verschwindet das Integral über jeden geschlossenen Weg, insbesondere über die beiden kleinen Kreise, die zu δ gehören. Es bleibt das Integral über die Strecke $\delta_0(t) := -1 + 0.5i + 2(t - 1)$ (mit $1 \leq t \leq 2$), mit Anfangspunkt $z_A = -1 + 0.5i$ und Endpunkt $z_E = 1 + 0.5i$. Also ist

$$\begin{aligned} \int_{\delta} z \, dz &= \int_{\delta_0} f(z) \, dz = F(z_E) - F(z_A) = \frac{1}{2}((1 + 0.5i)^2 - (-1 + 0.5i)^2) \\ &= \frac{1}{2}((1 + i - 0.25) - (1 - i - 0.25)) = i. \end{aligned}$$

Lösg. zu Afg. 22:



b) Vernünftigerweise ergänzt man Γ geschickt zu einem geschlossenen Weg, etwa

durch $\varepsilon : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\varepsilon(t) := z_0 + \sqrt{2}e^{i(\pi/4-t)}$. Das ist der im mathematisch negativen Sinne durchlaufene Halbkreis mit Mittelpunkt $z_0 := -1 + i$ und Radius $\sqrt{2}$, von $2i$ bis -2 . Damit ist $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon$ geschlossen. Die Funktion $f(z) = 1/(z - z_0) = 1/(z + 1 - i)$ besitzt auf der links von z_0 horizontal aufgeschnittenen Ebene eine Stammfunktion, nämlich einen Zweig von $\log(z - z_0)$. Damit verschwindet das Integral über f und den geschlossenen Weg. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z) dz &= - \int_{\varepsilon} f(z) dz = - \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2}e^{i(\pi/4-t)}} \cdot (-\sqrt{2}ie^{i(\pi/4-t)}) dt \\ &= i \int_0^{\pi} dt = i\pi. \end{aligned}$$

a) Es fehlen noch die Parametrisierungen. Bei den Strecken ist es ganz einfach:

$$\alpha(t) := -2 + t(12 + 2i), \quad \beta(t) := 10 + 2i - 4t \quad \text{und} \quad \delta(t) := 2 - 2i + t(4i - 2).$$

Der Halbkreis hat den Mittelpunkt $z_0 := 4$ und den Radius $r := 2\sqrt{2}$ (= Diagonale in einem Quadrat mit der Seitenlänge 2). Außerdem wird er im mathematisch negativen Sinne durchlaufen. Das ergibt erst mal $\tilde{\gamma}(t) := z_0 + re^{-it}$ für den ganzen Kreis (also $0 \leq t \leq 2\pi$). Lässt man t von $-\pi/4$ bis $-\pi/4 + \pi = 3\pi/4$ laufen, so erhält man den gewünschten Halbkreis. Ersetzt man e^{-it} durch $e^{-(t-\pi/4)}$, so läuft t von 0 bis π . Da der Weg auf $[0, 1]$ definiert sein soll, setzt man $\gamma(t) := z_0 + re^{-i\pi(1/4-t)} = 4 + 2\sqrt{2}e^{i\pi(1/4-t)}$.

Lösg. zu Afg. 23: a) Es ist

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_n} f_k(z) dz &= \int_0^1 (t + ikt^n) \cdot (1 + int^{n-1}) dt \\ &= \int_0^1 (t + int^n + ikt^n - knt^{2n-1}) dt \\ &= i \int_0^1 (n+k)t^n dt + \int_0^1 (t - knt^{2n-1}) dt \\ &= i(n+k) \int_0^1 t^n dt + \int_0^1 t dt - kn \int_0^1 t^{2n-1} dt \\ &= i \frac{n+k}{n+1} + \frac{1}{2}(1-k) = \begin{cases} i & \text{falls } k = 1, \\ i - \frac{k-1}{2} + i \frac{k-1}{n+1} & \text{falls } k \neq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

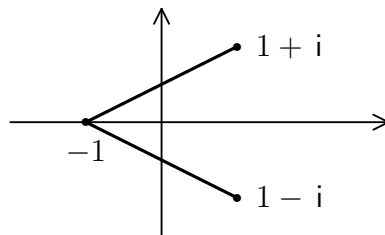
Daraus folgt, dass $\int_{\alpha_n} f_k(z) dz$ genau dann von n unabhängig ist, wenn $k = 1$ ist. Andererseits ist $f_k(z) = g_k(z) + ih_k(z)$ mit $g_k(x + iy) = x$ und $h_k(x + iy) = ky$. Die Anwendung der CR-DGLn zeigt, dass f_k genau dann holomorph ist, wenn $k = 1$ ist.

b) Hier soll man natürlich die Standard-Abschätzung anwenden.

Sei $\alpha(t) := 3e^{it}$ für $0 \leq t \leq \pi/2$. Dann ist

$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha} \frac{dz}{1+z^2} \right| &\leq L(\alpha) \cdot \sup_{|\alpha|} \left| \frac{1}{1+z^2} \right| \\ &= \frac{3 \cdot 2\pi}{4} \cdot \sup_{[0, \pi/2]} \left| \frac{1}{1+9e^{2it}} \right| \\ &\leq \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{1}{9-1} = \frac{3\pi}{16} \quad (\text{wegen } |z+w| \geq |w| - |z|). \end{aligned}$$

Lösg. zu Afg. 24: a) Der Streckenzug α liegt im Definitionsbereich des Logarithmuszweiges $F(z) = \log_{(0)}(z)$, und es ist $F'(z) = 1/z$.



Es ist $1+i = \sqrt{2}e^{i(\pi/4)}$ und $1-i = \sqrt{2}e^{i(7\pi/4)}$ und daher

$$\int_{\alpha} \frac{1}{z} dz = \log_{(0)}(z) \Big|_{1-i}^{1+i} = (\ln \sqrt{2} + i \frac{7\pi}{4}) - (\ln \sqrt{2} + i \frac{\pi}{4}) = \frac{3\pi}{2} i.$$

Anmerkung: Will man nun von $1-i$ direkt nach oben nach $1+i$ gehen, so muss man zum Hauptzweig $\log(z) = \log_{(-\pi)}(z)$ wechseln. Dann muss man aber auch $1-i$ in der Form $1-i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$ schreiben. Damit erhält man als Wert des Integrals jetzt $(\pi/2)i$. Das muss auch so sein, denn dann ist $2\pi i$ der Wert des Integrals über den gesamten geschlossenen Weg um 0, wie man es erwartet.

b) Für $r > 0$ sei $\gamma_r(t) := a + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Dann ist

$$\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-a} dz = i \int_0^{2\pi} f(a+re^{it}) dt = i \left[\int_0^{2\pi} f(a) dt + \int_0^{2\pi} (f(a+re^{it}) - f(a)) dt \right].$$

Weil

$$\left| \int_0^{2\pi} (f(a+re^{it}) - f(a)) dt \right| \leq 2\pi \cdot \sup_{t \in [0, 2\pi]} |f(a+re^{it}) - f(a)|$$

aufgrund der Stetigkeit von f für $r \rightarrow 0$ gegen Null strebt, folgt die Behauptung.