Übungen zur Funktionentheorie 1

SS 2017

Blatt 5

Prof. Fritzsche

17) Berechnen Sie die folgenden komplexen „Zahlen“:

$$(1 + i)^i, \quad (-i)^i \quad \text{und} \quad \log(-2 - 2i).$$

18) Wegen der Mehrdeutigkeit des komplexen Logarithmus muss man manche bekannten Formeln neu überdenken. Sind die folgenden Formeln korrekt?

a) $e^{\log z} = z$.

b) $\log(e^z) = z$.

c) $(e^z)^w = e^{z \cdot w}$.

Was ist von folgendem „Beweis“, dass die Mathematik in sich widersprüchlich ist, zu halten? $-1 = i^2 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1$.

19) a) $U, V \subset \mathbb{C}$ seien offene Mengen, $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\varphi(U) \subset V$ und $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ reell differenzierbare Abbildungen. Beweisen Sie die Kettenregeln

$$\begin{aligned} \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{w}} \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z} \\ \text{und} \quad \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial \bar{z}} &= \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial f}{\partial \bar{w}} \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{z}}. \end{aligned}$$

Hinweis: Man sollte u.a. die Kettenregel für die (totale) reelle Ableitung $DF(z) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ von differenzierbaren Abbildungen F benutzen.

b) Zeigen Sie: Die Funktion $f(z) := z \cdot \exp(\bar{z}^2)$ ist in $z_0 = 0$ komplex differenzierbar und nirgends sonst.

c) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Berechnen Sie

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} [\log(1 + f \cdot \bar{f})].$$

20) Zeigen Sie, dass durch $w = f(z) := \sqrt{z^2 + 1}$ eine biholomorphe Abbildung von dem Gebiet $G := \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\} \setminus \{iy : y \leq 1\}$ auf die obere Halbebene $\mathbb{H} := \{z = x + iy : y > 0\}$ definiert werden kann.

Abgabetermin: **Donnerstag**, 01.06.2017, 12 Uhr.

Es gibt pro Aufgabe maximal 12 Punkte.

Lösg. zu Afg. 17: a) Es ist $|1 + i| = \sqrt{2}$, also $\frac{1 + i}{|1 + i|} = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i$ und daher $1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{i\pi/4}$. Dann ist

$$\begin{aligned}(1 + i)^i &= \exp(i \cdot \log(1 + i)) = \exp(i \cdot (\ln \sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4} + 2n\pi))) \\ &= \exp(-(2n + \frac{1}{4})\pi + i \ln \sqrt{2}), \quad n \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

b) Weil $-i = e^{3(\pi/2)i}$ ist, folgt:

$$(-i)^i = \exp(i \cdot \log(-i)) = \exp(i \cdot (2n + \frac{3}{2})\pi i) = \exp(-\frac{3\pi}{2} - 2n\pi), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

c) Es ist $|-2 - 2i| = 2\sqrt{2}$ und daher $-2 - 2i = 2\sqrt{2} \cdot e^{(5/4)\pi i}$ und

$$\log(-2 - 2i) = \ln(2\sqrt{2}) + (\frac{5}{4} + 2n)\pi i, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Lösg. zu Afg. 18: a) Ist $z = r \cdot e^{it}$, so ist

$$e^{\log z} = \exp(\ln r + it + 2n\pi i) = r \cdot e^{it} \cdot e^{2n\pi i} = r \cdot e^{it} = z.$$

Die Formel $e^{\log z} = z$ ist also korrekt.

b) Ist $z = x + iy$, so ist $e^z = e^x \cdot e^{iy}$ und

$$\log(e^z) = \ln(e^x) + i(y + 2n\pi) = x + iy + 2n\pi i = z + 2n\pi i, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ist zum Beispiel $z = (5/2)\pi i$, so ist $e^z = e^{(\pi/2)i}$ und daher $\log(e^z) = i\pi/2 + 2n\pi i$, und das ist nur dann $= z$, wenn man $n = 1$ wählt. Die Formel $\log(e^z) = z$ gilt also nur, wenn man den (von z abhängigen) passenden Logarithmuszweig wählt.

c) Es ist

$$(e^z)^w = \exp(w \cdot \log(e^z)) = \exp(w \cdot (z + 2n\pi i)) = e^{z \cdot w} \cdot e^{2n\pi i \cdot w}.$$

In dem angegebenen „Beweis“ eines Widerspruches in der Mathematik soll man wohl $\sqrt{-1}$ als $(-1)^{1/2}$ interpretieren. Die Gleichung $-1 = i^2$ ist natürlich korrekt. Aber es ist

$$\begin{aligned}\sqrt{-1} &= (-1)^{1/2} = (e^{i\pi})^{1/2} = \exp\left(\frac{1}{2} \log(e^{i\pi})\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{2}(i\pi + 2n\pi i)\right) = e^{i\pi/2} \cdot \exp(n\pi i) = (-1)^n i.\end{aligned}$$

In dem Augenblick, wo man i durch das unklare Symbol $\sqrt{-1}$ ersetzt, verliert man die Kontrolle über das Vorzeichen. Die Gleichungen $i^2 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} =$

$\sqrt{(-1) \cdot (-1)}$ stimmen also nur modulo Vorzeichen. Die darauf folgenden Gleichungen bewegen sich im Bereich der reellen Zahlen und sind wieder korrekt, wenn man davon absieht, dass auch überall ein Minuszeichen davor stehen darf.

Lösg. zu Afg. 19: Für den Beweis von (a) ist ein genaues Verständnis der Begrifflichkeiten erforderlich. Die Kettenregel für die totale reelle Ableitung lautet:

$$D(f \circ \varphi)(z_0) = Df(\varphi(z_0)) \circ D\varphi(z_0).$$

Die Wirtinger-Ableitungen $g_z(z_0)$ und $g_{\bar{z}}(z_0)$ einer reell differenzierbaren Funktion g werden durch die folgende Gleichung definiert:

$$Dg(z_0)(h) = g_z(z_0) \cdot h + g_{\bar{z}}(z_0) \cdot \bar{h} \quad (\text{für alle } h \in \mathbb{C}).$$

Nun ist

$$\begin{aligned} D(f \circ \varphi)(z_0)(h) &= \\ &= Df(\varphi(z_0))[\varphi_z(z_0) \cdot h + \varphi_{\bar{z}}(z_0) \cdot \bar{h}] \\ &= f_w(\varphi(z_0)) \cdot \left(\varphi_z(z_0) \cdot h + \varphi_{\bar{z}}(z_0) \cdot \bar{h} \right) + f_{\bar{w}}(\varphi(z_0)) \cdot \left(\overline{\varphi_z(z_0) \cdot h + \varphi_{\bar{z}}(z_0) \cdot h} \right) \\ &= \left(f_w(\varphi(z_0)) \cdot \varphi_z(z_0) + f_{\bar{w}}(\varphi(z_0)) \cdot \overline{\varphi_z(z_0)} \right) \cdot h \\ &\quad + \left(f_w(\varphi(z_0)) \cdot \varphi_{\bar{z}}(z_0) + f_{\bar{w}}(\varphi(z_0)) \cdot \overline{\varphi_{\bar{z}}(z_0)} \right) \cdot \bar{h}. \end{aligned}$$

Dabei wurden die Gleichungen $\overline{(f_z)} = \bar{f}_{\bar{z}}$ und $\overline{(f_{\bar{z}})} = \bar{f}_z$ aus der Vorlesung benutzt. Es folgt:

$$(f \circ \varphi)_z(z_0) = f_w(\varphi(z_0)) \cdot \varphi_z(z_0) + f_{\bar{w}}(\varphi(z_0)) \cdot \overline{\varphi_z(z_0)}$$

und

$$(f \circ \varphi)_{\bar{z}}(z_0) = f_w(\varphi(z_0)) \cdot \varphi_{\bar{z}}(z_0) + f_{\bar{w}}(\varphi(z_0)) \cdot \overline{\varphi_{\bar{z}}(z_0)}.$$

b) Die komplexe Differenzierbarkeit kann mit Hilfe der Ableitung nach $\bar{z}$ getestet werden. $f(z) = z \cdot \exp(\bar{z}^2)$ ist offensichtlich reell differenzierbar, und es gilt:

$$\begin{aligned} f_{\bar{z}}(z_0) &= 0 \cdot \exp(\bar{z}_0^2) + z_0 \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \Big|_{z_0} (\exp(\bar{z}^2)) \\ &= z_0 \cdot \left(\exp_w(\bar{z}_0^2) \cdot (\bar{z}^2)_{\bar{z}}(z_0) + \exp_{\bar{w}}(\bar{z}_0^2) \cdot (z^2)_{\bar{z}}(z_0) \right) \\ &= 2z_0 \bar{z}_0 \cdot \exp(\bar{z}_0^2). \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck verschwindet genau dann, wenn $z_0 = 0$ ist.

c) Es ist

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} [\log(1 + f \cdot \bar{f})] &= \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{1 + f \cdot \bar{f}} \cdot (f \cdot \bar{f}') \right] \\
 &= \frac{-(f' \cdot \bar{f}) \cdot (f \cdot \bar{f}')}{(1 + f \cdot \bar{f})^2} + \frac{f' \cdot \bar{f}'}{1 + f \cdot \bar{f}} \\
 &= \frac{-(f \cdot \bar{f}') \cdot (f' \cdot \bar{f}') + (1 + f \cdot \bar{f}) \cdot (f' \cdot \bar{f}')}{(1 + f \cdot \bar{f})^2} \\
 &= \frac{|f'|^2}{(1 + |f|^2)^2}
 \end{aligned}$$

Lösg. zu Afg. 20: $G := \mathbb{H} \setminus \{z = x + iy : x = 0 \text{ und } 0 < y \leq 1\}$ ist ein Gebiet. Es besteht aus allen Punkten $z = re^{it}$ mit $r > 0$ und $0 < t < \pi$, mit Ausnahme derjenigen Punkte $re^{i\pi/2}$, bei denen $0 < r \leq 1$ ist.

Die holomorphe Abbildung $f_1(z) := z^2$ bildet G bijektiv auf das Gebiet

$$G_1 := \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \geq -1\} = \{re^{it} : r > 0 \text{ und } 0 < t < 2\pi\} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \geq -1\}$$

ab. Und die holomorphe Abbildung $f_2(u) := u + 1$ bildet G_1 bijektiv auf das Gebiet

$$G_2 := \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$$

ab. Jedes Element $v \in G_2$ hat die Gestalt $v = re^{it}$ mit $r > 0$ und $0 < t < 2\pi$. Also wird durch $\log_{(0)}(v) = \ln r + it$ eine holomorphe Funktion auf G_2 definiert.

Daher ist $f(z) = \sqrt{z^2 + 1} := \exp\left(\frac{1}{2} \log_{(0)}(z^2 + 1)\right)$ holomorph auf G . Ist $v = re^{it} \in G_2$, so liegt $\sqrt{v} := \sqrt{r}e^{it/2}$ in $\mathbb{H}$.

Die Ableitung $f'(z) = \exp\left(\frac{1}{2} \log_{(0)}(z^2 + 1)\right) \cdot \frac{z}{z^2 + 1}$ ist stetig und verschwindet auf G nirgends. Also ist f lokal biholomorph. Da f außerdem bijektiv ist (eine Umkehrabbildung lässt sich leicht berechnen), ist f sogar global biholomorph.