Übungen zur Funktionentheorie 1

SS 2017 **Blatt 4** **Prof. Fritzsche**

13) Zeigen Sie, dass $f(z) := (z+1)/(z-1)$ die Menge $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ holomorph und bijektiv auf sich abbildet,
sowie die Einheitskreisscheibe $D_1(0)$ auf $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) < 0\}$.

14) Die komplexen hyperbolischen Funktionen werden definiert durch

$$\sinh z := \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) \quad \text{und} \quad \cosh z := \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}).$$

Zeigen Sie, dass $\sinh z = -\mathsf{i} \sin(\mathsf{i}\, z)$ und $\cosh z = \cos(\mathsf{i}\, z)$ ist.

15) Sind die folgenden Funktionen holomorph?

$$\begin{array}{rrcl} & f_1(x + \mathsf{i}\, y) & := & (x^2 - y^2) - 2\,\mathsf{i}\, xy, \\ & f_2(x + \mathsf{i}\, y) & := & (x^2 - y^2) + 2\,\mathsf{i}\, xy \\ \text{und} & f_3(x + \mathsf{i}\, y) & := & x^2 - \mathsf{i}\,(y^2 + x). \end{array}$$

16) Zeigen Sie, dass

$$f(z) := \begin{cases} z^5/|z|^4 & \text{für } z \neq 0, \\ 0 & \text{für } z = 0 \end{cases}$$

im Nullpunkt **nicht** komplex differenzierbar ist, dass f dort aber partiell differenzierbar ist und die CR-DGLn erfüllt. Warum ist das kein Widerspruch?

Abgabetermin: **Mittwoch**, 24.05.2017, 12 Uhr.

Es gibt pro Aufgabe maximal 12 Punkte.

Lösg. zu Afg. 13: Die Abbildung f ist eine auf dem Gebiet $G := \mathbb{C} \setminus \{1\}$ definierte Möbius-Transformation. Insbesondere ist sie dort komplex differenzierbar und insbesondere (weil sich das Ganze auf einem Gebiet abspielt) holomorph. Die Umkehrabbildung gewinnt man durch Auflösung der Gleichung

$$w = \frac{z+1}{z-1} \implies w(z-1) = z+1 \implies z(w-1) = w+1 \implies z = \frac{w+1}{w-1}.$$

Tatsächlich ist $f \circ f = \mathrm{id}_G$, also f bijektiv und $f^{-1} = f$.

Ist nun $z = x + \mathrm{i}\,y \in D_1(0)$, so ist $x^2 + y^2 < 1$ und damit $x^2 + y^2 - 1 < 0$. Weiter ist

$$\begin{aligned} \frac{z+1}{z-1} &= \frac{(x+1+\mathrm{i}\,y)(x-1-\mathrm{i}\,y)}{(x-1+\mathrm{i}\,y)(x-1-\mathrm{i}\,y)} \\ &= \frac{x^2 - x - \mathrm{i}\,xy + x - 1 - \mathrm{i}\,y + \mathrm{i}\,xy - \mathrm{i}\,y + y^2}{(x-1)^2 + y^2} \\ &= \frac{x^2 + y^2 - 1 - 2\,\mathrm{i}\,y}{(x-1)^2 + y^2} \end{aligned}$$

und damit $\mathrm{Re}\big(f(z)\big) < 0$. Das bedeutet, dass $f(D_1(0)) \subset H_- := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) < 0\}$ ist.

Sei umgekehrt $w = a + \mathrm{i}\,b \in H_-$ (also $a < 0$) und $z := (w+1)/(w-1)$. Dann ist zu zeigen, dass $z \in D_1(0)$ ist. Tatsächlich ist

$$\begin{aligned} z\overline{z} &= \frac{(w+1)\overline{(w+1)}}{(w-1)\overline{(w-1)}} = \frac{(a+1)^2 + b^2}{(a-1)^2 + b^2} \\ &= \frac{a^2 + b^2 + 1 + 2a}{(a-1)^2 + b^2} < \frac{a^2 + b^2 + 1 - 2a}{(a-1)^2 + b^2} = \frac{(a-1)^2 + b^2}{(a-1)^2 + b^2} = 1. \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass $D_1(0)$ durch f bijektiv auf H_- abgebildet wird.

Lösg. zu Afg. 14: Es ist

$$\begin{aligned} \sinh z &= \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) = \frac{1}{2}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n!}\Big) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \big(1 - (-1)^n\big) \frac{z^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} -\mathrm{i} \cdot \sin(\mathrm{i}\,z) &= -\mathrm{i} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\mathrm{i}\,z)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}. \end{aligned}$$

Entsprechend ist

$$\begin{aligned}\cosh z &= \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) = \frac{1}{2}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{n!}\Big)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\big(1+(-1)^n\big)\frac{z^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{(2k)!}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\cos(\mathrm{i}\, z) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(\mathrm{i}\, z)^{2k}}{(2k)!}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{(2k)!}.\end{aligned}$$

Lösg. zu Afg. 15: Die Aufgabenstellung legt nahe, dass man die CR-DGLn nachprüfen soll: $g_x = h_y$ und $g_y = -h_x$. Offensichtlich sind f_1, f_2 und f_3 alle reell differenzierbar.

$f_1 = g + \mathrm{i}\, h$ mit $g(x+\mathrm{i}\, y) = x^2 - y^2$ und $h(x+\mathrm{i}\, y) = -2xy$. Dann ist $g_x(x+\mathrm{i}\, y) = 2x$, $g_y(x+\mathrm{i}\, y) = -2y$, $h_x(x+\mathrm{i}\, y) = -2y$ und $h_y(x+\mathrm{i}\, y) = -2x$. Also ist z.B. $g_x \neq h_y$. Die CR-DGLn sind nicht erfüllt. Also ist f_1 nicht holomorph.

$f_2 = g + \mathrm{i}\, h$ mit $g(x+\mathrm{i}\, y) = x^2 - y^2$ und $h(x+\mathrm{i}\, y) = 2xy$. Dann ist $g_x(x+\mathrm{i}\, y) = 2x$, $g_y(x+\mathrm{i}\, y) = -2y$, $h_x(x+\mathrm{i}\, y) = 2y$ und $h_y(x+\mathrm{i}\, y) = 2x$. Also ist $g_x = h_y$ und $g_y = -h_x$. Hier sind die CR-DGLn erfüllt, und daher ist f_2 holomorph.

$f_3 = g + \mathrm{i}\, h$ mit $g(x+\mathrm{i}\, y) = x^2$ und $h(x+\mathrm{i}\, y) = -y^2 - x$. Dann ist $g_x(x+\mathrm{i}\, y) = 2x$, $g_y(x+\mathrm{i}\, y) = 0$, $h_x(x+\mathrm{i}\, y) = -1$ und $h_y(x+\mathrm{i}\, y) = -2y$. Also ist z.B. $g_x \neq h_y$. Die CR-DGLn sind nicht erfüllt und f_3 ist nicht holomorph.

Lösg. zu Afg. 16: 1) Der Differenzenquotient $\dfrac{f(z)-f(0)}{z-0} = \dfrac{z^4}{|z|^4}$ hat für $z \to 0$ keinen Grenzwert. Ist nämlich $z_n := \dfrac{1}{n}e^{\mathrm{i}\,\alpha/4}$, so konvergiert (z_n) gegen 0, es ist aber $z_n^4/|z_n|^4 = e^{\mathrm{i}\,\alpha}$. Jedes $\alpha \in [0, 2\pi)$ liefert ein anderes Ergebnis.

2) Es ist $f(z) = z^5/|z|^4$, also $f(x + \mathrm{i} \cdot 0) = x^5/|x|^4 = x$ und $f(0 + \mathrm{i} \cdot y) = (\mathrm{i}\, y)^5/|y|^4 = \mathrm{i}\, y$. Schreibt man $f = g + \mathrm{i}\, h$, so folgt:

$$g(x + \mathrm{i} \cdot 0) = x,\ h(x + \mathrm{i} \cdot 0) = 0,\ g(0 + \mathrm{i} \cdot y) = 0 \text{ und } h(0 + \mathrm{i} \cdot y) = y.$$

Damit sind g und h im Nullpunkt partiell differenzierbar, und es ist

$$g_x(0,0) = 1 = h_y(0,0) \text{ und } g_y(0,0) = 0 = -0 = -h_x(0,0).$$

Die CR-DGLn sind im Nullpunkt erfüllt.

3) Wäre f im Nullpunkt reell differenzierbar, so müsste f dann dort auch komplex differenzierbar sein. Da das nicht der Fall ist, kann f in $(0,0)$ nicht (total) reell differenzierbar sein.

Alternativer Beweis von (2):

Ist $z = re^{\mathsf{i}\,t} = r\cos t + \mathsf{i}\,(r\sin t) = x + \mathsf{i}\,y$, so ist

$$f(z) = \frac{z^5}{|z|^4} = \frac{r^5 \cdot (\cos(5t) + \mathsf{i}\,\sin(5t))}{r^4} = \big(r\cos(5t)\big) + \mathsf{i}\,\big(r\sin(5t)\big) = g(z) + \mathsf{i}\,h(z).$$

Außerhalb des Nullpunktes ist $r \neq 0$.

Ist $y = 0$, so ist $\sin t = 0$, also ($t = 0$ und $x = r$) oder ($t = \pi$ und $x = -r$). In beiden Fällen ist $g(x + \mathsf{i} \cdot 0) = r \cdot \cos(5t) = x$ und $h(x + \mathsf{i} \cdot 0) = r \cdot \sin(5t) = 0$.

Ist $x = 0$, so ist $\cos t = 0$, also ($t = \pi/2$ und $y = r$) oder ($t = 3\pi/2$ und $y = -r$). Hier ist $g(0 + \mathsf{i} \cdot y) = r\cos(5t) = 0$ und $h(0 + \mathsf{i} \cdot y) = r\sin(5t) = y$.

Der Rest geht wie oben.