Übungen zur Funktionentheorie 1

SS 2017 **Blatt 3** **Prof. Fritzsche**

9) $A, B \subset \mathbb{C}$ seien zwei kompakte Mengen mit $A \cap B = \varnothing$. Zeigen Sie, dass es offene Mengen U und V in $\mathbb{C}$ gibt, so dass gilt:

$$A \subset U,\ B \subset V \text{ und } U \cap V = \varnothing.$$

Afg. 10 *: Finden Sie eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:

- K besitzt unendlich viele Zusammenhangskomponenten.
- K° besitzt unendlich viele Zusammenhangskomponenten.
- $G := \mathbb{C} \setminus K$ ist ein Gebiet.

11) a) Zeigen Sie für Potenzreihen $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ mit $c_n \neq 0$ für fast alle n: Wenn die Folge $\left| \dfrac{c_n}{c_{n+1}} \right|$ konvergiert, dann ist $R := \lim_{n\to\infty} \left| \dfrac{c_n}{c_{n+1}} \right|$ der Konvergenzradius von $f(z)$.

b) Bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius der beiden folgenden Potenzreihen:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n} z^n \quad \text{und} \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{\binom{k}{2}} z^{2k}.$$

12) Bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

1. $f_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{2^k}$.
2. $f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 3^{n+1} n z^{2n+1}$.
3. $f_3(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n^n}$.

Abgabetermin: **Donnerstag**, 18.05.2017, 12 Uhr.

Es gibt pro Aufgabe maximal 12 Punkte.
Für eine richtige und vollständige Lösung der $*$-Aufgabe gibt es darüber hinaus 6 Zusatzpunkte.

Lösg. zu Afg. 9: Beweis: 1) Ist $x \in A$ ein beliebiger, aber fester Punkt, so gibt es zu jedem $y \in B$ offene Umgebungen $M_y = M_y(x)$ und $N_y = N_y(y)$ mit $M_y \cap N_y = \varnothing$ (Hausdorff-Eigenschaft). Da B kompakt ist, überdecken schon endlich viele Umgebungen $N_{y_1}, \ldots, N_{y_n}$ die Menge B. Dann setze man

$$\widetilde{M}_x := M_{y_1} \cap \ldots \cap M_{y_n} \text{ und } \widetilde{N}_x := N_{y_1} \cup \ldots \cup N_{y_n}.$$

2) Die offenen Mengen $\widetilde{M}_x$ überdecken A, und da A kompakt ist, kommt man wieder mit endlich vielen Mengen $\widetilde{M}_{x_\nu}$, $\nu = 1, \ldots, m$ aus. Dann setze man

$$U := \widetilde{M}_{x_1} \cup \ldots \cup \widetilde{M}_{x_m} \text{ und } V := \widetilde{N}_{x_1} \cap \ldots \cap \widetilde{N}_{x_m}.$$

Die Mengen U und V haben die gewünschten Eigenschaften.

Lösg. zu Afg. 10: Hier gibt es natürlich viele Lösungsmöglichkeiten. Eine sieht folgendermaßen aus: Man setze

$$K := \{\,\mathrm{i}\,t \,:\, 0 \le t \le 1\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x + \mathrm{i}\,t \,:\, \frac{1}{2n+1} \le x \le \frac{1}{2n} \text{ und } 0 \le t \le 1\}.$$

Dann ist

$$K^\circ = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x + \mathrm{i}\,t \,:\, \frac{1}{2n+1} < x < \frac{1}{2n} \text{ und } 0 < t < 1\},$$

und diese Menge zerfällt offensichtlich in die zammenhängenden offenen Mengen $U_n := \{x + \mathrm{i}\,t \,:\, \frac{1}{2n+1} < x < \frac{1}{2n} \text{ und } 0 < t < 1\}$ (dass dies Gebiete sind, ist klar). Die Funktion $f : K^\circ \to \mathbb{Z}$ mit $f(x) := n$ für $x \in U_n$ ist stetig, und deshalb gibt es zu U_n keine größere zusammenhängende Menge Z mit $U_n \subsetneqq Z \subset K^\circ$. Also sind die U_n tatsächlich Zusammenhangskomponenten.

Die Mengen $K_n := \{x + \mathrm{i}\,t \,:\, \frac{1}{2n+1} \le x \le \frac{1}{2n} \text{ und } 0 \le t \le 1\} = \overline{U_n}$ sind dann auch zusammenhängend, und zusätzlich sind sie jeweils abgeschlossen und beschränkt, also kompakt. Mit dem gleichen Argument wie bei K° kann man auch hier schließen, dass es sich um Zusammenhangskomponenten handelt.

$K_0 := \{\,\mathrm{i}\,t \,:\, 0 \le t \le 1\}$ ist auch zusammenhängend (und kompakt). Dass K_0 eine Zusammenhangskomponente von K ist, ist etwas schwerer zu sehen. Annahme, es gibt eine zusammenhängende Menge C mit $K_0 \subsetneqq C \subset K$. Dann gibt es ein n und ein $x_0 + \mathrm{i}\,t_0 \in K_n \cap C$. Wählt man ein $x^* \in (1/(2n+2), 1(2n+1))$, so liegt kein Punkt $x^* + \mathrm{i}\,t$ in K. Sei $U_- := \{x + \mathrm{i}\,y \,:\, x < x^*\}$ und $U_+ := \{x + \mathrm{i}\,y \,:\, x > x^*\}$. Dann ist $C = (U_- \cap C) \cup (U_+ \cap C)$ eine Zerlegung von C in zwei nicht leere, disjunkte Teilmengen, mit $0 \in U_- \cap C$ und $x_0 + \mathrm{i}\,t_0 \in U_- \cap C$. Das ist ein Widerspruch dazu, dass C zusammenhängend ist.

Dieses Beispiel zeigt, dass Zusammenhangskomponenten zwar abgeschlossene Teilmengen sind (wurde in der Vorlesung gezeigt), dass sie aber nicht offen zu sein brauchen.

Dass $G := \mathbb{C} \setminus K$ ein Gebiet ist, ist leichter zu sehen, weil man ja nur zeigen muss, dass je zwei Punkte von G durch einen Weg in G verbunden werden können. Am besten zeigt man, dass jeder Punkt von G etwa mit dem Punkt $2\,\mathrm{i}$ durch einen Streckenzug verbunden werden kann. Das erfordert ein paar Fallunterscheidungen, ist aber anschaulich klar.

Lösg. zu Afg. 11: a) Nach Voraussetzung konvergiert $|c_n/c_{n+1}|$ gegen eine reelle Zahl $R \geq 0$. Ist nun $z \in \mathbb{C}$ ein fester Punkt, so konvergiert

$$\left| \frac{c_{n+1}(z-z_0)^{n+1}}{c_n(z-z_0)^n} \right| = \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \cdot |z-z_0| \text{ gegen } \frac{1}{R} \cdot |z-z_0|.$$

Aus dem Quotientenkriterium für Reihen mit positiven Gliedern folgt: Ist $|z-z_0| < R$, also $|z-z_0|/R < 1$, so konvergiert die Reihe. Ist $|z-z_0| > R$, also $|z-z_0|/R > 1$, so divergiert die Reihe. Das bedeutet, dass R der Konvergenzradius der Reihe ist.

b) Die Reihe $f(z)$ erfüllt die Voraussetzungen von (a). Also kann man dieses „Quotientenkriterium“ verwenden. Es ist $c_n = n^3/3^n$, und

$$\left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \frac{n^3 \cdot 3^{n+1}}{3^n \cdot (n+1)^3} = 3 \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right)^3,$$

und dieser Ausdruck konvergiert gegen den Konvergenzradius $R = 3$.

Die Reihe $g(z)$ erfüllt die Bedingungen von (a) **nicht**, denn jedes zweite Glied verschwindet. Nun gibt es zwei Möglichkeiten:

i) Man erweitert die Aussage (a) auf Reihen mit Lücken. Strebt $|c_{2k}/c_{2k+2}|$ gegen c, so konvergiert

$$\left| \frac{c_{2k+2}(z-z_0)^{2k+2}}{c_{2k}(z-z_0)^{2k}} \right| = \left| \frac{c_{2k+2}}{c_{2k}} \right| \cdot |z-z_0|^2 \text{ gegen } \frac{1}{c} \cdot |z-z_0|^2.$$

Ähnlich wie in (a) folgt nun, dass $R = \sqrt{c}$ der Konvergenzradius ist. Im vorliegenden Beispiel gilt:

$$\left| \frac{c_{2k}}{c_{2k+2}} \right| = \frac{3^k \cdot (k+1)k/2}{3^{k+1} \cdot k(k-1)/2} = \frac{k+1}{(k-1)3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1+1/k}{1-1/k}$$

strebt gegen $c = 1/3$. Also ist der Konvergenzradius $R = 1/\sqrt{3}$.

ii) Wenn einem sonst nichts einfällt, muss man es eben mit der Formel von Cauchy-Hadamard versuchen. Es ist

$$c_n = \begin{cases} 3^k/\binom{k}{2} & \text{falls } n = 2k, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für den Limes Superior reicht es, $\lim_{k\to\infty} \sqrt[2k]{|c_{2k}|}$ zu bestimmen, das ist

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[2k]{k(k-1)/2}} = \sqrt{3},$$

weil $\sqrt[n]{n}$ gegen 1 konvergiert.

(Etwas genauer: $\sqrt[k]{k-1} = \sqrt[2k]{(k-1)^2} < \sqrt[2k]{k(k-1)} < \sqrt[2k]{k^2} = \sqrt[k]{k}$, und beide Seiten konvergieren gegen 1.)

Der Konvergenzradius ist dann $1/\sqrt{3}$.

Lösg. zu Afg. 12: 1) Bei der Reihe f_1 empfiehlt sich das Kriterium von Cauchy-Hadamard: Es ist $c_{2^k} = 1$ und $c_n = 0$ in allen anderen Fällen. Also ist $\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} = 1$, und das ist auch der Konvergenzradius.

2) Bei der Reihe f_2 ist $|c_n| = \begin{cases} k \cdot 3^{k+1} & \text{falls } n = 2k+1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

1. Methode: Mit der erweiterten Quotientenregel geht es am einfachsten. Es ist

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{c_{2k+1}}{c_{2k+3}} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{3^{k+1} \cdot k}{3^{k+2} \cdot (k+1)} = \frac{1}{3} \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{3},$$

und deshalb $R = 1/\sqrt{3}$ der Konvergenzradius.

2. Methode: Cauchy-Hadamard liefert auch das Ergebnis. Es ist

$$\sqrt[2k+1]{|c_{2k+1}|} = \sqrt[2k+1]{k \cdot 3^{k+1}} = \sqrt[2k+1]{n} \cdot 3^{(n+1)/(2n+1)}.$$

Der erste Faktor strebt gegen 1. Auf den zweiten Faktor wendet man am besten den (natürlichen) Logarithmus an:

$$\ln\left(3^{(n+1)/(2n+1)}\right) = \frac{n+1}{2n+1} \cdot \ln(3) = \frac{1+1/n}{2+1/n} \cdot \ln(3) \longrightarrow \frac{1}{2}\ln(3) = \ln\sqrt{3}.$$

Wendet man nun auf das Ergebnis die stetige Exponentialfunktion an, so sieht man, dass $3^{(n+1)/(2n+1)}$ gegen $\sqrt{3}$ konvergiert. Den Konvergenzradius erhält man, indem man den Kehrwert bildet.

3) Die Reihe f_3 ist wieder einfacher zu behandeln. Es ist $\sqrt[n]{|c_n|} = 1/n$, also $\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} = 0$. Der Konvergenzradius ist $R = \infty$.