Übungen zur Funktionentheorie 1

SS 2017 **Blatt 1** **Prof. Fritzsche**

1) Stellen Sie die folgenden Zahlen in der Form $z = a + b\,\mathsf{i}$ dar:

$$z_1 := \mathsf{i}^{2017}, \quad z_2 := (-\mathsf{i})^{2n+1} \quad \text{und} \quad z_3 := \frac{(1-\mathsf{i})^2(\sqrt{3}+\mathsf{i})}{1-\sqrt{3}\,\mathsf{i}}.$$

Der Rechenweg sollte erkennbar sein!

2) a) Bestimmen Sie die Polarkoordinaten-Darstellung der komplexen Zahlen

$$w_1 := 2 + 2\,\mathsf{i}\sqrt{3} \quad \text{und} \quad w_2 := \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}\,\mathsf{i}.$$

b) Berechnen Sie die Zahl $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,\mathsf{i}}{1-\sqrt{3}\,\mathsf{i}}\right)^{12}$.

3) Beweisen Sie für komplexe Zahlen die Ungleichung $\big||z| - |w|\big| \le |z - w|$.

4) a) Untersuchen Sie, ob die Folgen (z_n) und (w_n) in $\mathbb{C}$ konvergieren, und bestimmen Sie ggf. die Grenzwerte:

$$z_n := \frac{1 - \mathsf{i}\,n}{1 + \mathsf{i}\,n} \quad \text{und} \quad w_n := \frac{(1+\mathsf{i})^n}{n!}.$$

b) Bestimmen Sie den Grenzwert der Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\mathsf{i}}{2}\right)^n.$$

Abgabetermin: **Donnerstag**, 04.05.2017, 12 Uhr.

Es gibt pro Aufgabe maximal 12 Punkte.

Lösg. zu Afg. 1: Es ist $z_1 = \mathrm{i}^{2000} \cdot \mathrm{i}^{16} \cdot \mathrm{i}^1 = \mathrm{i}$, $z_2 = (-\mathrm{i}) \cdot (-1)^n = (-1)^{n+1}\mathrm{i}$

$$\begin{aligned} \text{und } z_3 &= \frac{(1-\mathrm{i})^2(\sqrt{3}+\mathrm{i})}{1-\sqrt{3}\mathrm{i}} = \frac{(-2\mathrm{i})(\sqrt{3}+\mathrm{i})(1+\sqrt{3}\mathrm{i})}{(1-\sqrt{3}\mathrm{i})(1+\sqrt{3}\mathrm{i})} \\ &= \frac{(-2\mathrm{i})\cdot 4\mathrm{i}}{1-(\sqrt{3}\mathrm{i})^2} = \frac{8}{1+3} = 2. \end{aligned}$$

Lösg. zu Afg. 2: a) Es ist

$$w_1 = 4 \cdot \Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\mathrm{i}\Big) = 4 \cdot e^{\mathrm{i}\pi/3}$$

und

$$w_2 = \sqrt{3}\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\mathrm{i}\Big) = \sqrt{3} \cdot e^{(5/3)\pi\mathrm{i}}.$$

b) Zunächst ist

$$\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{1-\sqrt{3}\imath} = \frac{(1+\sqrt{3}\mathrm{i})^2}{1+3} = \frac{-2+2\sqrt{3}\mathrm{i}}{4} = \frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2} = e^{(2/3)\pi\mathrm{i}}$$

und daher $\big((1+\sqrt{3}\mathrm{i})/(1-\sqrt{3}\mathrm{i})\big)^{12} = \big(e^{(2/3)\pi\mathrm{i}}\big)^{12} = e^{8\pi\mathrm{i}} = 1.$

Lösg. zu Afg. 3: Folgende Ideen werden benutzt:

$$|z| < r \iff -r < z < +r \quad \text{und} \quad |z| = |(z-w)+w| \le |z-w| + |w|\,.$$

Damit erhält man folgende Ungleichungen:

$$\begin{aligned} |w| = |z+(w-z)| &\le |z| + |w-z|, \\ \text{also } -|z-w| &\le |z| - |w| \qquad (1) \\ \text{und } |z| &\le |z-w| + |w|, \\ \text{also } |z| - |w| &\le |z-w|. \qquad (2) \end{aligned}$$

Aus (1) und (2) folgt die Behauptung der Aufgabe.

Lösg. zu Afg. 4: a) Es ist

$$\frac{1-\mathrm{i}n}{1+\mathrm{i}n} = \frac{(1-\mathrm{i}n)^2}{1-(\mathrm{i}n)^2} = \frac{1-2\mathrm{i}n-n^2}{1+n^2} = \frac{1-n^2}{1+n^2} - \frac{2n}{1+n^2}\mathrm{i}\,.$$

$\mathrm{Re}(z_n)$ konvergiert gegen -1 und $\mathrm{Im}(z_n)$ gegen 0, also z_n gegen -1.

Bei der Folge (w_n) betrachtet man besser die Beträge. Es ist

$$|w_n| = \frac{1}{n!}|1+\mathrm{i}|^n \le \frac{1}{n!}\big(1+|\mathrm{i}|\big)^n = \frac{2^n}{n!}\,.$$

Weil die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n/n!$ gegen e^2 konvergiert, ist $(2^n/n!)$ eine Nullfolge. Damit konvergiert auch (w_n) gegen null.

b) Hier handelt es sich um eine geometrische Reihe, bei der die ersten beiden Terme fehlen. Es ist

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\mathsf{i}}{2}\right)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mathsf{i}}{2}\right)^n - 1 - \frac{\mathsf{i}}{2} = \frac{1}{1-(\mathsf{i}/2)} - 1 - \frac{\mathsf{i}}{2} \\
&= \frac{2}{2-\mathsf{i}} - \frac{2+\mathsf{i}}{2} = \frac{4+2\mathsf{i}}{5} - \frac{2+\mathsf{i}}{2} = \frac{8+4\mathsf{i}-(10+5\mathsf{i})}{10} \\
&= \frac{-2-\mathsf{i}}{10} = -\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\mathsf{i}\,.
\end{aligned}$$