

1.2 Integration im Komplexen

Zur Erinnerung: Eine (komplexwertige) Funktion f auf einem Intervall $[a, b]$ heißt *stückweise stetig*, wenn es eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ gibt, so dass f auf jedem der offenen Intervalle (t_{i-1}, t_i) stetig ist und in den Punkten t_i einseitige Grenzwerte besitzt. f heißt *stückweise stetig differenzierbar*, wenn f auf $[a, b]$ stetig und auf den abgeschlossenen Teilintervallen einer geeigneten Zerlegung stetig differenzierbar ist.

Wir wiederholen hier einige Ergebnisse über Integrale komplexwertiger Funktionen von einer reellen Veränderlichen.

Definition

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine stückweise stetige komplexwertige Funktion. Dann erklärt man das Integral über f durch

$$\int_a^b f(t) dt := \int_a^b \operatorname{Re} f(t) dt + i \int_a^b \operatorname{Im} f(t) dt.$$

Die Zuordnung $f \mapsto \int_a^b f(t) dt$ ist \mathbb{C} -linear, und das Integral einer reellwertigen Funktion ist reell.

Außerdem gilt:

1. Ist f stetig und F eine (komplexwertige) Stammfunktion von f auf $[a, b]$, so ist

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

2. Ist $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise stetig differenzierbar, so ist

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt = \int_a^b f(\varphi(s))\varphi'(s) ds.$$

3. Ist (f_ν) eine Folge von stetigen Funktionen auf $[a, b]$, die gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert, so ist

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_a^b f_\nu(t) dt.$$

4. Es gilt die Abschätzung

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

2.1. Beispiel

Sei $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, $f(t) := e^{int}$ und $F(t) := \frac{1}{in} e^{int}$. Dann ist $F'(t) = f(t)$ und daher

$$\int_a^b e^{int} dt = \frac{1}{in} e^{int} \Big|_a^b = \frac{1}{in} (e^{inb} - e^{ina}).$$

Im ersten Abschnitt haben wir die komplexe Differenzierbarkeit eingeführt, indem wir den reellen Differentialquotienten einfach formal ins Komplexe übertragen haben:

$$f'(z_0) = \frac{df}{dz}(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Jetzt wollen wir versuchen, nach dem Muster der reellen Analysis auch komplexe Integrale

$$\int_p^q f(z) dz$$

einzuführen. Aber wie sollen wir das tun? Im Reellen muss der Integrand in allen Punkten zwischen dem Anfangs- und dem Endpunkt definiert und in irgend einem Sinne integrierbar sein. Im Komplexen gibt es keine Intervalle, bestenfalls die Verbindungsstrecke. Ist aber etwa f eine stetige Funktion auf einem Gebiet G und sind p, q Punkte aus G , so braucht die Verbindungsstrecke nicht komplett zu G zu gehören.

Dass G ein Gebiet ist, sichert aber auf jeden Fall die Existenz eines stetigen Verbindungsweges von p nach q innerhalb von G . Wir können versuchen, die Funktion f entlang eines solchen Weges zu integrieren. Leider erhalten wir dann eine zusätzliche Abhängigkeit vom Integrationsweg. Welche Konsequenzen das hat, werden wir untersuchen müssen.

Wir führen noch folgende Sprachregelung ein: Ein **Integrationsweg** in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ ist ein stückweise stetig differenzierbarer Weg $\alpha : [a, b] \rightarrow G$.

Definition

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige komplexwertige Funktion und $\alpha : [a, b] \rightarrow G$ ein Integrationsweg. Dann wird das **komplexe Kurvenintegral** von f über α definiert durch

$$\int_\alpha f(z) dz := \int_a^b f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt.$$

Man kann das komplexe Kurvenintegral einer stetigen Funktion f über α natürlich schon dann bilden, wenn f nur auf der Spur $|\alpha|$ definiert ist.

2.2. Satz

Das komplexe Kurvenintegral hat folgende Eigenschaften:

1. Ist $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ eine stetig differenzierbare, streng monoton wachsende **Parametertransformation**, so ist

$$\int_{\alpha \circ \varphi} f(z) dz = \int_{\alpha} f(z) dz.$$

2. Für stetige Funktionen f_1, f_2 und Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ ist

$$\int_{\alpha} (c_1 f_1 + c_2 f_2)(z) dz = c_1 \cdot \int_{\alpha} f_1(z) dz + c_2 \cdot \int_{\alpha} f_2(z) dz.$$

3. Es gilt die **Standardabschätzung**:

$$\left| \int_{\alpha} f(z) dz \right| \leq L(\alpha) \cdot \max_{z \in |\alpha|} |f(z)|,$$

wobei $L(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)| dt$ die **Länge** von α ist.

4. Sind f und f_ν stetige Funktionen auf $|\alpha|$ und konvergiert (f_ν) auf $|\alpha|$ gleichmäßig gegen f , so ist

$$\int_{\alpha} f(z) dz = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_{\alpha} f_\nu(z) dz.$$

BEWEIS: 1) Ist φ eine Parametertransformation, so ist

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} f(z) dz &= \int_a^b f \circ \alpha(t) \alpha'(t) dt = \int_c^d f \circ \alpha(\varphi(s)) \alpha'(\varphi(s)) \varphi'(s) ds \\ &= \int_c^d f \circ (\alpha \circ \varphi)(s) (\alpha \circ \varphi)'(s) ds = \int_{\alpha \circ \varphi} f(z) dz. \end{aligned}$$

2) Die Linearität ist trivial.

3) Es ist

$$\left| \int_{\alpha} f(z) dz \right| = \left| \int_a^b f(\alpha(t)) \alpha'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\alpha(t)) \alpha'(t)| dt.$$

Setzt man $M := \max_{z \in |\alpha|} |f(z)|$, so ist

$$\int_a^b |f(\alpha(t)) \alpha'(t)| dt \leq M \cdot \int_a^b |\alpha'(t)| dt = M \cdot L(\alpha).$$

Zu (4): Da α stückweise stetig differenzierbar ist, gibt es eine Konstante $C > 0$, so dass $|\alpha'(t)| \leq C$ auf $[a, b]$ ist. Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es ein ν_0 , so

dass gilt:

$$|f_\nu(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{C} \text{ für } \nu \geq \nu_0 \text{ und } z \in |\alpha|.$$

Also ist

$$|f_\nu(\alpha(t))\alpha'(t) - f(\alpha(t))\alpha'(t)| = |f_\nu(\alpha(t)) - f(\alpha(t))| \cdot |\alpha'(t)| < \varepsilon$$

für $\nu \geq \nu_0$ und $t \in [a, b]$. Das bedeutet, dass $((f_\nu \circ \alpha) \cdot \alpha')$ gleichmäßig auf $[a, b]$ gegen $(f \circ \alpha) \cdot \alpha'$ konvergiert, und daraus folgt die Behauptung. ■

2.3. Satz

Ist $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, f' stetig und $\alpha : [a, b] \rightarrow G$ ein Integrationsweg, so ist

$$\int_\alpha f'(z) dz = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)).$$

BEWEIS: Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ **komplex differenzierbar** und f' **stetig**.

Ist $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein stetig differenzierbarer Weg, so ist auch $f \circ \alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig differenzierbar und

$$\int_a^b f'(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt = \int_a^b (f \circ \alpha)'(t) dt = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)).$$

Man beachte, dass der Strich hier einmal die komplexe und einmal die reelle Ableitung bezeichnet! ■

Definition

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Eine **Stammfunktion** von f ist eine holomorphe Funktion $F : G \rightarrow \mathbb{C}$ mit $F' = f$.

Bemerkung: Ist $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, so unterscheiden sich je zwei Stammfunktionen von f höchstens um eine Konstante.

2.4. Beispiele

- A. Sei $z_0 \neq 0$ und $\alpha(t) := t \cdot z_0$ (für $0 \leq t \leq 1$) die Verbindungsstrecke von 0 und z_0 . Weiter sei $f(z) := z^n$. Dann ist

$$\int_\alpha f(z) dz = \int_0^1 f(t \cdot z_0) \cdot z_0 dt = z_0^{n+1} \cdot \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} z_0^{n+1}.$$

Dieses Ergebnis kann man auch auf anderem Wege erhalten. Setzt man $F(z) := \frac{1}{n+1} z^{n+1}$, so ist $F'(z) = f(z)$ und daher

$$\int_{\alpha} f(z) dz = F(\alpha(1)) - F(\alpha(0)).$$

- B.** $\alpha(t) := z_0 + r \cdot e^{it}$ (für $0 \leq t \leq 2\pi$) ist die übliche Parametrisierung der Kreislinie $\partial D_r(z_0)$. Wenn nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird, benutzen wir immer diese Parametrisierung.

Ein **fundamentaler Baustein der Funktionentheorie** ist folgende Formel:

$$\int_{\partial D_r(z_0)} (z - z_0)^n dz := \int_{\alpha} (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{für } n = -1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

BEWEIS: Es ist

$$\int_{\alpha} \frac{1}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} e^{-it} \cdot r i e^{it} dt = i \cdot \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i,$$

und für $n \neq -1$ ist

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} (z - z_0)^n dz &= \int_0^{2\pi} (r e^{it})^n \cdot r i e^{it} dt = r^{n+1} i \cdot \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt \\ &= r^{n+1} i \cdot \left(\frac{1}{i(n+1)} e^{i(n+1)t} \right) \Big|_0^{2\pi} = 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ist $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein Integrationsweg, so bezeichne $-\alpha$ den in umgekehrter Richtung durchlaufenen Weg, so dass gilt:

$$\int_{-\alpha} f(z) dz = - \int_{\alpha} f(z) dz.$$

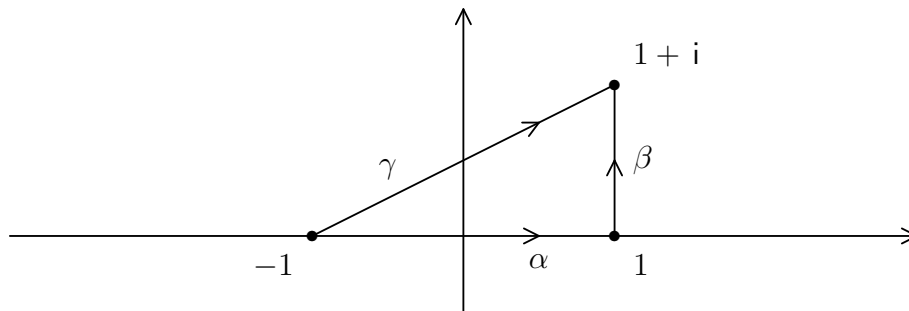
Sind $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ und $\beta : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ zwei Integrationswege (i.a. mit $\alpha(b) = \beta(c)$, aber das muss nicht zwingend so sein), so bezeichne $\alpha + \beta$ den Weg, der entsteht, indem man α und β hintereinander durchläuft. Dann ist

$$\int_{\alpha+\beta} f(z) dz := \int_{\alpha} f(z) dz + \int_{\beta} f(z) dz.$$

2.5. Beispiel

Wir betrachten die Wege $\alpha, \beta, \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\alpha(t) := -1 + 2t, \quad \beta(t) := 1 + it \quad \text{und} \quad \gamma(t) := (-1 + 2t) + it.$$



Dann ist

$$\begin{aligned}
 \int_{\alpha+\beta} \bar{z} dz &= \int_0^1 (-1+2t) \cdot 2 dt + \int_0^1 (1-it) \cdot i dt \\
 &= 2 \cdot (-t+t^2) \Big|_0^1 + i \cdot (t - \frac{i}{2}t^2) \Big|_0^1 \\
 &= 2 \cdot (-1+1) + i \cdot (1 - \frac{i}{2}) = i + \frac{1}{2},
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} \bar{z} dz &= \int_0^1 (-1+2t-it)(2+i) dt \\
 &= (2+i) \cdot (-t + \frac{2-i}{2}t^2) \Big|_0^1 \\
 &= (2+i) \cdot (-1+1 - \frac{i}{2}) = -i + \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Das komplexe Kurvenintegral über $f(z) := \bar{z}$ hängt vom Integrationsweg ab!
Wir werden bald sehen, dass das daran liegt, dass f nicht holomorph ist.

2.6. Hauptsatz über Kurvenintegrale

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f besitzt auf G eine Stammfunktion.

2. Es ist $\int_{\alpha} f(z) dz = 0$ für jeden geschlossenen Integrationsweg α in G .

BEWEIS:

(1) \implies (2): Ist F eine Stammfunktion von f und $\alpha : [a, b] \rightarrow G$ ein Integrationsweg, so ist

$$\int_{\alpha} f(z) dz = F(\alpha(b)) - F(\alpha(a)).$$

Ist α geschlossen, so verschwindet die rechte Seite und damit das Integral.

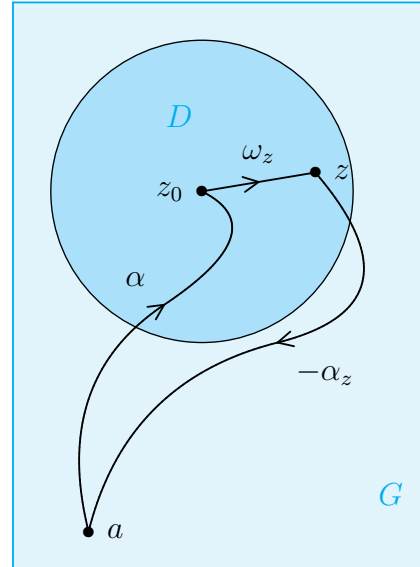
(2) \implies (1): Sei $\int_{\alpha} f(\zeta) d\zeta = 0$ für jeden geschlossenen Integrationsweg, und $a \in G$ ein einmalig fest gewählter Punkt. Zu $z \in G$ sei jeweils ein Integrationsweg $\alpha_z : [0, 1] \rightarrow G$ gewählt, der a mit z verbindet. Dann setze man

$$F(z) := \int_{\alpha_z} f(\zeta) d\zeta.$$

Wegen der Voraussetzung ist die Definition von F unabhängig von der Wahl des Weges α_z . Zu zeigen bleibt: F ist auf G komplex differenzierbar, und es ist $F' = f$.

Dazu betrachten wir einen Punkt $z_0 \in G$ und wählen eine offene Kreisscheibe D um z_0 , die noch ganz in G enthalten ist. Für $z \in D$ sei $\omega_z(t) := z_0 + t \cdot (z - z_0)$ die (in D enthaltene) Verbindungsstrecke zwischen z_0 und z . Weiter sei $\alpha := \alpha_{z_0}$.

Dann ist $\gamma := \alpha + \omega_z - \alpha_z$ ein geschlossener Weg, und es gilt:



$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = \int_{\alpha} f(\zeta) d\zeta + \int_{\omega_z} f(\zeta) d\zeta - \int_{\alpha_z} f(\zeta) d\zeta \\ &= F(z_0) - F(z) + \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0)) \cdot (z - z_0) dt \\ &= F(z_0) - F(z) + \Delta(z) \cdot (z - z_0), \end{aligned}$$

mit $\Delta(z) := \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0)) dt$.

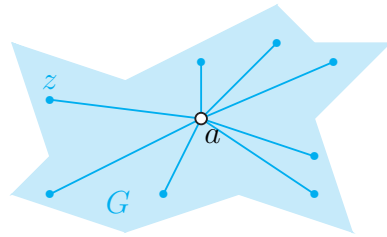
Offensichtlich ist $\Delta(z_0) = f(z_0)$, und für $z \in D$ ist

$$\begin{aligned} |\Delta(z) - \Delta(z_0)| &= \left| \int_0^1 [f(z_0 + t(z - z_0)) - f(z_0)] dt \right| \\ &\leq \max_{0 \leq t \leq 1} |f(z_0 + t(z - z_0)) - f(z_0)|. \end{aligned}$$

Da f stetig ist, folgt hieraus auch die Stetigkeit von Δ in z_0 . ■

Definition

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. G heißt **sternförmig bezüglich** $a \in G$, falls mit jedem $z \in G$ auch die Verbindungsstrecke von a und z ganz in G liegt.



Jedes konvexe Gebiet ist sternförmig, aber die Umkehrung ist i.A. falsch. Sind G_1 und G_2 konvex und ist $a \in G_1 \cap G_2$, so ist $G_1 \cup G_2$ bezüglich a sternförmig.

Das „Innere eines Dreiecks“ (die exakte Formulierung sei dem Leser überlassen) nennen wir ein **Dreiecksgebiet**. Offensichtlich ist jedes Dreiecksgebiet konvex, und der Rand ist stückweise stetig differenzierbar. Nimmt man den Rand hinzu, so spricht man von einem **abgeschlossenen Dreieck**.

2.7. Der Hauptsatz für Sterngebiete

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein bezüglich $a \in G$ sternförmiges Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f besitzt auf G eine Stammfunktion.
2. Es ist $\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$ für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset G$, das a als Eckpunkt hat.

BEWEIS:

(1) \implies (2): Klar!

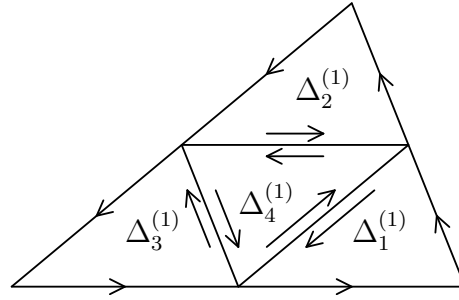
(2) \implies (1): Das ist eine Verschärfung des Hauptsatzes über Kurvenintegrale im Falle von sternförmigen Gebieten. Der Beweis wird völlig analog geführt, allerdings definiert man diesmal $F(z)$ als Integral über die **Verbindungsstrecke** von a und z , was wegen der Sternförmigkeit möglich ist. ■

2.8. Satz von Goursat

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine **holomorphe** Funktion und $\Delta \subset G$ ein abgeschlossenes Dreieck. Dann gilt:

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0.$$

BEWEIS: Wir schreiben $\Delta = \Delta^{(0)}$. Indem wir die Seiten von Δ halbieren, unterteilen wir Δ in 4 kongruente Teildreiecke $\Delta_1^{(1)}, \dots, \Delta_4^{(1)}$.



Sei $\gamma := \sum_{k=1}^4 \partial\Delta_k^{(1)}$. Dann ist $\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^4 \int_{\partial\Delta_k^{(1)}} f(z) dz = \int_{\partial\Delta^{(0)}} f(z) dz$,

denn die Integrale über die Strecken im Innern des Dreiecks heben sich gegenseitig auf, da sie jeweils doppelt mit entgegengesetzten Vorzeichen auftreten.

Also ist

$$\left| \int_{\partial\Delta^{(0)}} f(z) dz \right| = \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq 4 \cdot \max_k \left| \int_{\partial\Delta_k^{(1)}} f(z) dz \right|.$$

Nun wählt man unter den Dreiecken $\Delta_1^{(1)}, \dots, \Delta_4^{(1)}$ dasjenige aus, bei dem der Betrag des Integrals am größten ist, und nennt es $\Delta^{(1)}$. Dann ist

$$\left| \int_{\partial\Delta^{(0)}} f(z) dz \right| \leq 4 \cdot \left| \int_{\partial\Delta^{(1)}} f(z) dz \right|.$$

Wiederholt man diese Prozedur, so erhält man eine Folge von Dreiecken

$$\Delta = \Delta^{(0)} \supset \Delta^{(1)} \supset \Delta^{(2)} \supset \dots$$

mit

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z) dz \right| \leq 4^n \cdot \left| \int_{\partial\Delta^{(n)}} f(z) dz \right| \text{ und } L(\partial\Delta^{(n)}) = 2^{-n} \cdot L(\partial\Delta).$$

Da alle $\Delta^{(i)}$ kompakt und nicht leer sind, enthält $\bigcap_{n \geq 0} \Delta^{(n)}$ einen Punkt z_0 (man kann eine gegen z_0 konvergente Folge konstruieren), und da der Durchmesser der Dreiecke beliebig klein wird, kann es auch nur einen solchen Punkt geben.

Jetzt kommt der entscheidende Trick dieses Beweises! Wir nutzen die komplexe Differenzierbarkeit von f in z_0 aus:

Es gibt eine in z_0 stetige Funktion A , so dass gilt:

1. $f(z) = f(z_0) + (z - z_0) \cdot (f'(z_0) + A(z))$.
2. $A(z_0) = 0$.

Die affin-lineare Funktion $\lambda(z) := f(z_0) + (z - z_0) \cdot f'(z_0)$ hat auf G eine Stammfunktion, nämlich

$$\Lambda(z) := (f(z_0) - z_0 \cdot f'(z_0)) \cdot z + \frac{f'(z_0)}{2} \cdot z^2.$$

Also ist $\int_{\partial\Delta^{(n)}} \lambda(z) dz = 0$ für alle n . Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial\Delta^{(n)}} f(z) dz \right| &= \left| \int_{\partial\Delta^{(n)}} (z - z_0) A(z) dz \right| \\ &\leq L(\partial\Delta^{(n)}) \cdot \max_{\partial\Delta^{(n)}} (|z - z_0| \cdot |A(z)|) \\ &\leq L(\partial\Delta^{(n)})^2 \cdot \max_{\partial\Delta^{(n)}} |A(z)|. \end{aligned}$$

Setzt man alles zusammen, so erhält man:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial\Delta} f(z) dz \right| &\leq 4^n \cdot \left| \int_{\partial\Delta^{(n)}} f(z) dz \right| \\ &\leq 4^n \cdot L(\partial\Delta^{(n)})^2 \cdot \max_{\partial\Delta^{(n)}} |A(z)| \\ &= L(\partial\Delta)^2 \cdot \max_{\partial\Delta^{(n)}} |A(z)|. \end{aligned}$$

Für $n \rightarrow \infty$ strebt die rechte Seite gegen 0. ■

Der Satz von Goursat lässt sich noch ein wenig verschärfen.

2.9. Satz von Goursat in verschärfter Form

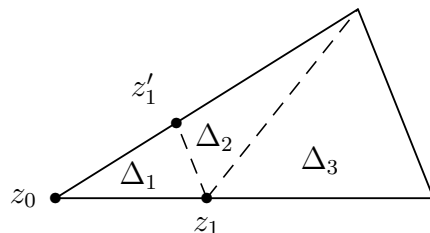
Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und bis auf endlich viele Punkte holomorph. Dann gilt für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset G$:

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0.$$

BEWEIS: Wir können annehmen, dass f überall bis auf einen einzigen Ausnahmepunkt z_0 holomorph ist. Nun unterscheiden wir mehrere Fälle:

1. Fall: z_0 ist Eckpunkt von Δ .

Dann zerlegen wir Δ folgendermaßen in drei Teildreiecke:



Aus dem gewöhnlichen Satz von Goursat folgt, dass $\int_{\partial\Delta_2} f(z) dz = \int_{\partial\Delta_3} f(z) dz = 0$ ist, also

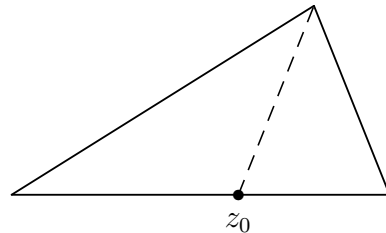
$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = \int_{\partial\Delta_1} f(z) dz,$$

unabhängig davon, wie z_1 und z'_1 gewählt werden. Dann ist

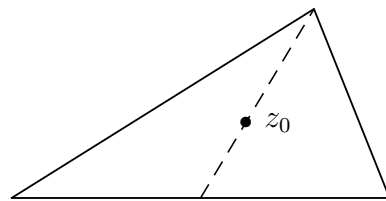
$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z) dz \right| \leq L(\partial\Delta_1) \cdot \sup_{\Delta} |f(z)|,$$

und die rechte Seite strebt gegen Null, wenn z_1 und z'_1 gegen z_0 wandern.

2. Fall: z_0 liegt auf einer Seite von Δ , ist aber kein Eckpunkt. Dann zerlegt man Δ in zwei Teildreiecke, auf die beide jeweils der erste Fall anwendbar ist:



3. Fall: z_0 liegt im Innern von Δ . Diesen Fall kann man auf den 2. Fall reduzieren:



Liegt z_0 außerhalb Δ , so ist überhaupt nichts zu zeigen. ■

2.10. Satz

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und bis auf endlich viele Punkte holomorph. Dann besitzt f auf G eine Stammfunktion.

BEWEIS: Sei G sternförmig bezüglich $a \in G$. Nach dem verschärften Satz von Goursat ist $\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$ für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset G$, insbesondere also für jedes Dreieck, das a als Eckpunkt hat. Aber dann besitzt f eine Stammfunktion. ■

HINWEIS: Wir haben im Beweis nicht direkt die Holomorphie von f benutzt, sondern nur die Tatsache, dass das Integral über f und den Rand eines abgeschlossenen Dreiecks in G verschwindet!

Nun folgt:

2.11. Cauchy'scher Integralsatz (für Sterngebiete)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und bis auf endlich viele Punkte holomorph. Dann gilt für jeden geschlossenen Integrationsweg α in G :

$$\int_{\alpha} f(z) dz = 0.$$

BEWEIS: f besitzt eine Stammfunktion, und daraus folgt die Behauptung. ■

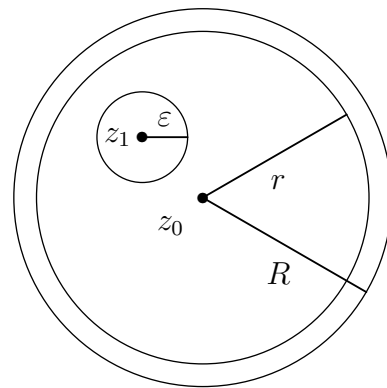
2.12. Lemma

Sei $R > 0$ und $f : D_R(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph außerhalb des Punktes $z_1 \in D_R(z_0)$, $z_1 \neq z_0$.

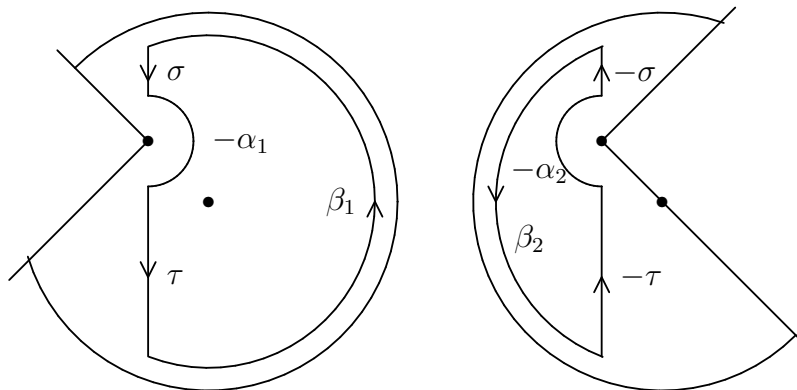
Wir wählen ein r mit $0 < r < R$ und ein $\varepsilon > 0$, so dass noch $D_{\varepsilon}(z_1) \subset D_r(z_0)$ ist.

Dann ist

$$\int_{\partial D_r(z_0)} f(z) dz = \int_{\partial D_{\varepsilon}(z_1)} f(z) dz.$$



BEWEIS: Wir zeigen, dass die Differenz der Integrale verschwindet. Dazu fassen wir die „Differenz“ der Integrale als Summe zweier Integrale über geschlossene Wege auf, auf die sich jeweils der Cauchy'sche Integralsatz anwenden lässt:



Bezeichnen wir die beiden Verbindungsstrecken vom kleinen inneren Kreis zum großen äußeren Kreis (von oben nach unten orientiert) mit σ und τ und die positiv orientierten Teil-Kreislinien mit α_1, α_2 und β_1, β_2 , so gilt:

$$(\beta_1 + \sigma - \alpha_1 + \tau) + (\beta_2 - \tau - \alpha_2 - \sigma) = (\beta_1 + \beta_2) - (\alpha_1 + \alpha_2).$$

Die beiden geschlossenen Wege auf der linken Seite der Gleichung verlaufen jeweils in einem sternförmigen Gebiet, in dem f holomorph ist. Nach Cauchy ist das Integral über diese Wege $= 0$, und daraus folgt auch schon die Behauptung. ■

Definition

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $B \subset G$ eine offene Teilmenge. Wir sagen, B liegt **relativ-kompakt** in G (in Zeichen: $B \subset\subset G$), wenn B beschränkt und $\overline{B} \subset G$ ist.

2.13. Folgerung

Ist $D \subset \mathbb{C}$ eine Kreisscheibe und $z \in \mathbb{C} \setminus \partial D$, so ist

$$\int_{\partial D} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \begin{cases} 2\pi i & \text{falls } z \in D, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

BEWEIS: 1) Sei $z \in D$ und $\varepsilon > 0$ so gewählt, dass $D_\varepsilon(z) \subset\subset D$ ist. Für $\zeta \neq z$ ist $f(\zeta) := 1/(\zeta - z)$ holomorph. Also ist

$$\int_{\partial D} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \int_{\partial D_\varepsilon(z)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i.$$

2) Ist $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}$, so gibt es eine Kreisscheibe D' mit $D \subset\subset D'$ und $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}'$. Dann ist $f(\zeta)$ auf D' holomorph, und das Integral verschwindet auf Grund des Cauchy'schen Integralsatzes für Sterngebiete. ■

Definition

Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ heißt **einfach-zusammenhängend**, falls jede holomorphe Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine Stammfunktion besitzt.

2.14. Cauchy'scher Integralsatz (für einfach-zusammenhängende Gebiete)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach-zusammenhängendes Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt für jeden geschlossenen Integrationsweg α in G :

$$\int_{\alpha} f(z) dz = 0.$$

BEWEIS: Trivial! Ist F Stammfunktion von f und $\alpha : [a, b] \rightarrow G$ ein geschlossener Weg, so ist $\alpha(a) = \alpha(b)$ und $\int_{\alpha} f(z) dz = F(\alpha(b)) - F(\alpha(a)) = 0$. ■

Bemerkung: Der Cauchy'sche Integralsatz in der obigen Form ist das Fundament der Funktionentheorie. Dennoch sieht er aus wie eine Mogelpackung, denn die entscheidende Eigenschaft der einfach-zusammenhängenden Gebiete wird schon in die Definition gesteckt. Tatsächlich kann man einfach-zusammenhängende Gebiete auch rein topologisch charakterisieren. Dazu werden wir in dieser Vorlesung aus Zeitgründen nicht kommen. Der folgende Satz liefert aber für unsere Zwecke schon genügend viele Beispiele. Am Ende des Abschnittes werden wir zeigen, dass die Klasse der Beispiele noch erheblich größer ist.

2.15. Satz

1. Jedes sternförmige Gebiet ist einfach-zusammenhängend.
2. Sind G_1 und G_2 einfach-zusammenhängende Gebiete und ist $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$ zusammenhängend, so ist auch $G_1 \cup G_2$ einfach-zusammenhängend.
3. $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist nicht einfach-zusammenhängend.

BEWEIS: 1) ist klar, auf Grund des Cauchy'schen Integralsatzes für Sterngebiete.

2) $G := G_1 \cup G_2$ ist wieder ein Gebiet. Sei $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann gibt es Stammfunktionen F_λ von $f|_{G_\lambda}$, für $\lambda = 1, 2$. Auf $G_1 \cap G_2$ ist dann $(F_1 - F_2)'(z) \equiv 0$, also $F_1(z) - F_2(z) \equiv c$ konstant. Sei

$$F(z) := \begin{cases} F_1(z) & \text{auf } G_1, \\ F_2(z) + c & \text{auf } G_2. \end{cases}$$

Offensichtlich ist F holomorph auf G und $F' = f$.

3) ist klar: $f(z) := 1/z$ ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, aber $\int_{\partial D} f(z) dz \neq 0$ für $D = D_1(0)$. ■

2.16. Satz

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach-zusammenhängendes Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $f(z) \neq 0$ auf G und f' holomorph. Dann gibt es eine holomorphe Funktion h auf G , so dass $\exp(h(z)) = f(z)$ für alle $z \in G$ gilt.

BEWEIS: Weil f'/f holomorph auf G ist, gibt es eine Stammfunktion F von f'/f . Sei $H := (\exp \circ F)/f$. Dann ist

$$H'(z) = \frac{\exp(F(z)) \cdot F'(z) \cdot f(z) - \exp(F(z)) \cdot f'(z)}{f(z)^2} = 0 \text{ für alle } z \in G,$$

also $H(z) \equiv c$ konstant. Deshalb ist $\exp(F(z)) = c \cdot f(z)$ und $c \neq 0$. Man setze $h(z) := F(z) - \log(c)$, mit einem geeigneten Logarithmus. Dann ist $e^h = f$. ■

Definition

Sei $G \subset \mathbb{C}^*$ ein Gebiet. Eine **Logarithmusfunktion** auf G ist eine stetige Funktion $L : G \rightarrow \mathbb{C}$, so dass $\exp(L(z)) \equiv z$ auf G gilt.

2.17. Satz

Sei $G \subset \mathbb{C}^*$ ein Gebiet.

1. Ist $L : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine Logarithmusfunktion, so ist L holomorph und $L'(z) = 1/z$.
2. Je zwei Logarithmusfunktionen auf G unterscheiden sich um ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi i$.
3. Ist $G \subset \mathbb{C}^*$ einfach-zusammenhängend, so gibt es auf G eine Logarithmusfunktion.

BEWEIS: 1) Da \exp lokal injektiv ist, folgt wie bei den schon behandelten Logarithmuszweigen, dass L komplex differenzierbar und $L'(z) = 1/z$ ist.

2) Ist $\exp(L_1(z)) = \exp(L_2(z)) = z$ auf G , so ist $L_1 - L_2$ holomorph und $(L_1 - L_2)'(z) \equiv 0$, also $L_1(z) - L_2(z) \equiv c$ auf G . Andererseits nimmt $L_1 - L_2$ nur Werte in $2\pi i\mathbb{Z}$ an. Daraus folgt die Behauptung.

3) Die Funktion $f(z) := z$ ist holomorph und ohne Nullstellen auf G . Wir haben oben schon gezeigt, dass es dann eine holomorphe Funktion L mit $\exp(L(z)) = z$ gibt. Dieses L ist natürlich eine Logarithmusfunktion auf G . ■

Wir wollen jetzt zeigen, dass der Wert einer holomorphen Funktion f an einer Stelle z_0 durch das Integral über f und einen geschlossenen Weg um z_0 herum berechnet werden kann.

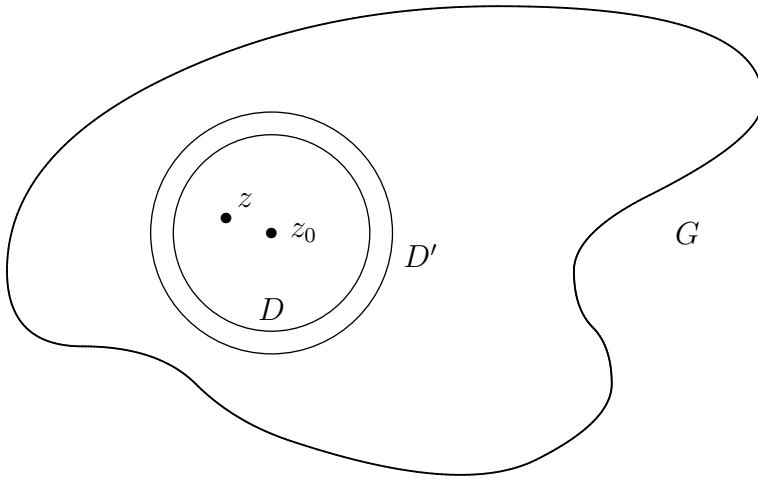
2.18. Die Cauchy'sche Integralformel

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in G$ und $r > 0$, so dass $D := D_r(z_0) \subset\subset G$ ist.

Dann gilt für alle $z \in D$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

BEWEIS: Wir können ein $\varepsilon > 0$ finden, so dass auch noch $D' := D_{r+\varepsilon}(z_0) \subset G$ ist.



Sei $z \in D$ beliebig vorgegeben. Da f in G holomorph ist, gibt es eine in z stetige Funktion Δ_z auf G , so dass für alle $\zeta \in G$ gilt:

$$f(\zeta) = f(z) + \Delta_z(\zeta) \cdot (\zeta - z).$$

Dann ist

$$\Delta_z(\zeta) = \begin{cases} (f(\zeta) - f(z))/(\zeta - z) & \text{falls } \zeta \neq z \\ f'(z) & \text{falls } \zeta = z. \end{cases}$$

Nachdem Δ_z überall stetig und außerhalb z sogar holomorph ist, können wir auf der sternförmigen Menge D' den Cauchyschen Integralsatz auf Δ_z und den geschlossenen Weg $\partial D \subset D'$ anwenden:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial D} \Delta_z(\zeta) d\zeta = \int_{\partial D} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \cdot \int_{\partial D} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \cdot 2\pi i. \end{aligned}$$

■

Beim Beweis der Cauchyschen Integralformel ist nun ganz deutlich die **komplexe** Differenzierbarkeit eingegangen. Dementsprechend hat der Satz Konsequenzen, die weit über das hinausgehen, was man von einer reell differenzierbaren Abbildung erwarten würde.

2.19. Beispiele

A. Es soll das Integral $\int_{\partial D_3(0)} \frac{e^z}{z^2 + 2z} dz$ berechnet werden.

Indem man den Nenner in Linearfaktoren zerlegt und eine Partialbruchzerlegung durchführt, bringt man das Integral in die Form, die auf der rechten Seite der Cauchyschen Integralformel steht:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D_3(0)} \frac{e^z}{z^2 + 2z} dz &= \int_{\partial D_3(0)} \left[\frac{1/2}{z} - \frac{1/2}{z+2} \right] \cdot e^z dz \\
&= \frac{1}{2} \int_{\partial D_3(0)} \frac{e^z}{z} dz - \frac{1}{2} \int_{\partial D_3(0)} \frac{e^z}{z - (-2)} dz \\
&= 2\pi i \cdot \frac{1}{2} \cdot [e^0 - e^{-2}] = \pi i (1 - e^{-2}).
\end{aligned}$$

B. Sei $C = \partial D_1(\frac{1}{2}i)$. Dann liegt i im Innern von C , und $-i$ nicht. Daher gilt:

$$\int_C \frac{dz}{z^2 + 1} = \frac{1}{2i} \int_C \frac{dz}{z - i} - \frac{1}{2i} \int_C \frac{dz}{z + i} = \frac{1}{2i} \cdot [2\pi i - 0] = \pi.$$

Wir kommen jetzt zur wichtigsten Folgerung aus der Cauchy'schen Integralformel. Der sogenannte „Entwicklungssatz“ ist höchst überraschend und lässt die holomorphen Funktionen in ganz neuem Licht erscheinen. Entdeckt wurde er von Taylor und Cauchy beim Versuch, die Taylor-Entwicklung von komplex differenzierbaren Funktionen zu berechnen. Die Motivation erwuchs also aus der Idee, bekannte Sachverhalte aus dem Reellen ins Komplexe zu übertragen. Cauchys Integralformel lieferte schließlich das passende Hilfsmittel.

2.20. Entwicklungs-Lemma

Sei $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein Integrationsweg, $f : |\alpha| \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, $z_0 \in \mathbb{C} \setminus |\alpha|$ und $R := \text{dist}(z_0, |\alpha|)$.

Dann gibt es eine Potenzreihe $p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, die im Innern von $D_R(z_0)$ absolut und gleichmäßig gegen die auf $\mathbb{C} \setminus |\alpha|$ definierte Funktion

$$F(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

konvergiert. Die Koeffizienten a_n genügen der Formel

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

Insbesondere ist F holomorph auf $\mathbb{C} \setminus |\alpha|$.

BEWEIS: Ist $\zeta \in |\alpha|$ und $z \in D_R(z_0)$, so ist $|z - z_0| < R \leq |\zeta - z_0|$. Wir können den folgenden „Trick mit der geometrischen Reihe“ anwenden:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - (z - z_0)/(\zeta - z_0)} \\
&= \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n.
\end{aligned}$$

Da f auf der kompakten Menge $|\alpha|$ beschränkt ist, etwa durch eine Zahl $C > 0$, ist

$$\left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \cdot (z - z_0)^n \right| \leq \frac{C}{R} \cdot \left(\frac{|z - z_0|}{R} \right)^n, \text{ für } \zeta \in |\alpha| \text{ und } z \in D_R(z_0).$$

Die Reihe über die Terme auf der rechten Seite konvergiert für jedes feste $z \in D_R(z_0)$. Nach dem Weierstraß-Kriterium konvergiert dann (für festes z) die Reihe

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n$$

absolut und gleichmäßig in ζ auf $|\alpha|$. Da die Partialsummen stetig in ζ sind, kann man Grenzwertbildung und Integration vertauschen und erhält:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right) \cdot (z - z_0)^n.$$

Die Reihe konvergiert für jedes $z \in D_R(z_0)$.

Wir setzen

$$a_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ absolut und gleichmäßig im Innern von $D_R(z_0)$ gegen $F(z)$. Da man diese Konstruktion in jedem Punkt $z_0 \in \mathbb{C} \setminus |\alpha|$ durchführen kann, ist F überall holomorph. ■

Jetzt sind wir auf den folgenden Satz vorbereitet:

2.21. Entwicklungssatz von Cauchy

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in G$. Ist $R > 0$ der Radius der größten (offenen) Kreisscheibe um z_0 , die noch in G hineinpasst, so gibt es eine Potenzreihe

$$p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

die für jedes r mit $0 < r < R$ auf $D_r(z_0)$ absolut und gleichmäßig gegen $f(z)$ konvergiert. Für jedes solche r ist

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta,$$

und die Funktion f ist auf G beliebig oft komplex differenzierbar.

BEWEIS: Sei $0 < r < R$ und $\alpha(t) := z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Dann ist f auf $|\alpha|$ stetig und man kann das Entwicklungs-Lemma anwenden. Es gibt eine Potenzreihe $p(z)$, die im Innern von $D_r(z_0)$ absolut und gleichmäßig gegen $F(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ konvergiert. Die Koeffizienten der Reihe sind durch die Formel

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

gegeben.

Nach der Cauchyschen Integralformel ist aber $F(z) = f(z)$, und es ist klar, dass die Koeffizienten a_n nicht von r abhängen. ■

2.22. Folgerung (Höhere Cauchy'sche Integralformeln)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist f auf G beliebig oft komplex differenzierbar, und für $z_0 \in G$, $D := D_r(z_0) \subset\subset G$ und $z \in D$ ist

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta \quad \text{für } k \in \mathbb{N}_0.$$

BEWEIS: Ist $z \in D$, so gibt es nach dem Entwicklungslemma eine Potenzreihe $p(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(w - z)^n$, die auf einer Umgebung $U = U_\delta(z)$ gegen die holomorphe Funktion $F(w) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - w} d\zeta$ konvergiert. Dabei ist

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

Nach der Cauchy'schen Integralformel ist aber $f(w) = F(w) = p(w)$ für $w \in U$, und daher $f^{(k)}(z) = p^{(k)}(z) = a_k \cdot k!$. Daraus folgt:

$$\frac{f^{(k)}(z)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta.$$

Das gilt für jedes $z \in D$ und $k \in \mathbb{N}_0$. ■

Definition

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ heißt in $z_0 \in G$ **in eine Potenzreihe entwickelbar**, wenn es ein $r > 0$ gibt, so dass $D := D_r(z_0) \subset\subset G$ ist und f auf D mit einer konvergenten Potenzreihe übereinstimmt.

f heißt auf G **analytisch**, wenn f in jedem Punkt von G in eine Potenzreihe entwickelbar ist.

Analytische Funktionen sind beliebig oft komplex differenzierbar! Man beachte aber, dass man i.a. nicht mit einer einzigen Potenzreihe auskommt.

2.23. Satz von Morera

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und $\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$ für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset G$. Dann ist f holomorph auf G .

BEWEIS: f besitzt zumindest lokal stets eine (holomorphe) Stammfunktion F . Aber F ist beliebig oft komplex differenzierbar, und dann ist auch $f = F'$ holomorph. ■

Fassen wir nun zusammen:

2.24. Theorem

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Folgende Aussagen über eine Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ sind äquivalent:

1. f ist reell differenzierbar und erfüllt die Cauchyschen DGLn.
2. f ist komplex differenzierbar.
3. f ist holomorph.
4. f ist beliebig oft komplex differenzierbar.
5. f ist analytisch.
6. f ist stetig und besitzt lokal immer eine Stammfunktion.
7. f ist stetig, und es ist $\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$ für jedes abgeschlossene Dreieck Δ in G .

Wir haben eine erstaunliche Entdeckung gemacht. Eine einmal komplex differenzierbare Funktion ist automatisch schon beliebig oft komplex differenzierbar. Das ist ein großer Unterschied zur reellen Theorie!

Und wir sind noch lange nicht am Ende. Die holomorphen Funktionen weisen noch viele andere bemerkenswerte Eigenschaften auf.

2.25. Satz

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und außerhalb von $z_0 \in G$ sogar holomorph. Dann ist f auf ganz G holomorph.

BEWEIS: Aus den Voraussetzungen folgt, dass f lokal immer eine Stammfunktion besitzt. ■

2.26. Riemann'scher Hebbarkeitssatz

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_0 \in G$ und f auf $G \setminus \{z_0\}$ holomorph. Bleibt f in der Nähe von z_0 beschränkt, so gibt es eine holomorphe Funktion \hat{f} auf G , die auf $G \setminus \{z_0\}$ mit f übereinstimmt.

BEWEIS: Wir benutzen einen netten kleinen Trick:

$$\text{Sei } F(z) := \begin{cases} f(z) \cdot (z - z_0) & \text{für } z \neq z_0, \\ 0 & \text{für } z = z_0. \end{cases}$$

Wegen der Beschränktheit von f ist F stetig in G . Außerdem ist F natürlich holomorph auf $G \setminus \{z_0\}$. Beides zusammen ergibt, dass F auf ganz G holomorph ist. Also gibt es eine Darstellung

$$F(z) = F(z_0) + \Delta(z) \cdot (z - z_0),$$

mit einer in z_0 stetigen Funktion Δ . Da $\Delta(z) = f(z)$ außerhalb von z_0 holomorph ist, muss Δ sogar auf ganz G holomorph sein. Wir können $\hat{f} := \Delta$ setzen. ■

Jetzt untersuchen wir die Nullstellen einer holomorphen Funktion.

2.27. Satz

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in G$ und $f(z_0) = 0$. Dann ist entweder $f^{(k)}(z_0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, oder es gibt ein $k > 0$, eine offene Umgebung $U = U(z_0) \subset G$ und eine holomorphe Funktion $g : U \rightarrow \mathbb{C}$, so dass gilt:

1. $f(z) = (z - z_0)^k \cdot g(z)$ für $z \in U$.
2. $g(z_0) \neq 0$

Die Zahl k ist eindeutig bestimmt durch

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(k)}(z_0) \neq 0.$$

BEWEIS: Wählt man für U eine kleine Kreisscheibe um z_0 , so hat man auf U eine Darstellung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Da $f(z_0) = 0$ ist, muss $a_0 = 0$ sein. Ist nicht $a_k = 0$ für alle k , so gibt es ein kleinstes $k \geq 1$, so dass $a_k \neq 0$ ist. Dann ist

$$f(z) = (z - z_0)^k \cdot g(z), \quad \text{mit } g(z) := \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+k} (z - z_0)^m.$$

Mit Hilfe des Lemmas von Abel sieht man sofort, dass die Reihe für $g(z)$ ebenfalls auf U konvergiert. Das ergibt die gewünschte Darstellung, und außerdem ist $g(z_0) = a_k \neq 0$.

Weiter ist

$$f^{(n)}(z_0) = n!a_n \begin{cases} = 0 & \text{für } n = 0, \dots, k-1 \\ \neq 0 & \text{für } n = k. \end{cases}$$

Dadurch ist k auch eindeutig festgelegt. ■

Die Zahl k nennt man die **Ordnung der Nullstelle von f in z_0** .

Von besonderer Bedeutung ist der

2.28. Identitätssatz

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet (hier ist wichtig, dass G zusammenhängend ist!). Für zwei holomorphe Funktionen $f, g : G \rightarrow \mathbb{C}$ ist äquivalent:

1. $f(z) = g(z)$ für alle $z \in G$.
2. $f(z) = g(z)$ für alle z aus einer Teilmenge $M \subset G$, die wenigstens einen Häufungspunkt in G hat.
3. Es gibt einen Punkt $z_0 \in G$, so dass $f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ ist.

BEWEIS: (1) \implies (2) ist trivial.

(2) \implies (3): Ist $z_0 \in G$ Häufungspunkt der Menge $M \subset G$, so gibt es eine Folge (z_ν) in M , die gegen z_0 konvergiert. Wegen der Stetigkeit ist

$$f(z_0) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} f(z_\nu) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} g(z_\nu) = g(z_0).$$

Es reicht, zu zeigen: Ist h holomorph und $h(z) = 0$ für alle $z \in M \cup \{z_0\}$, so ist $h^{(k)}(z_0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Wenn Letzteres nicht erfüllt ist, gibt es ein k und eine holomorphe Funktion q , so dass $h(z) = (z - z_0)^k \cdot q(z)$ und $q(z_0) \neq 0$ ist. Dann wäre aber auch $q(z_\nu) = 0$ für alle ν und damit $q(z_0) = 0$. Widerspruch!

(3) \implies (1): Sei $h := f - g$ und $N := \{z \in G \mid h^{(k)}(z) = 0 \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0\}$. Dann liegt z_0 in N , also ist $N \neq \emptyset$. Außerdem ist N offen: Ist nämlich $w_0 \in N$, so sind in der Potenzreihenentwicklung von h in w_0 alle Koeffizienten = 0, und das bedeutet, dass h auf einer ganzen Umgebung von w_0 identisch verschwindet.

Andererseits ist auch $G \setminus N$ offen, denn es gilt:

$$\begin{aligned} G \setminus N &= \{z \in G \mid \exists k \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } h^{(k)}(z) \neq 0\} \\ &= \bigcup_k \{z \in G \mid h^{(k)}(z) \neq 0\}, \end{aligned}$$

und das ist eine Vereinigung offener Mengen.

Da G ein Gebiet ist, muss $G = N$ sein. ■

Die Menge M , die im Satz vorkommt, kann z.B. eine kleine Umgebung U eines Punktes $z_0 \in G$ sein. Der Identitätssatz sagt: eine holomorphe Funktion auf G ist schon durch ihre Werte auf U festgelegt. Das zeigt eine gewisse Starrheit der holomorphen Funktionen. Wackelt man im Lokalen an ihnen, so wackelt stets die ganze Funktion mit!

2.29. Folgerung

Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und nicht die Nullfunktion, so ist $\{z \in G \mid f(z) = 0\}$ in G abgeschlossen und diskret¹ in G .

Die Cauchysche Integralformel zeigt, dass der Wert einer holomorphen Funktion in einem Punkt durch die Werte auf einer Kreislinie um den Punkt herum festgelegt sind. Noch deutlicher können wir das durch die folgende Formel ausdrücken:

2.30. Mittelwerteigenschaft

Ist f holomorph auf dem Gebiet G , $z_0 \in G$ und $D_r(z_0) \subset\subset G$, dann ist

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt.$$

Zum BEWEIS braucht man nur die Parametrisierung der Kreislinie in die Cauchysche Integralformel einzusetzen.

2.31. Maximumprinzip

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Besitzt $|f|$ in G ein lokales Maximum, so ist f konstant.

BEWEIS: Wenn $|f|$ in $z_0 \in G$ ein Maximum besitzt, dann gibt es ein $r > 0$, so dass $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ für $|z - z_0| \leq r$ ist.

Aus der Mittelwerteigenschaft folgt für $0 < \varrho < r$:

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \varrho e^{it})| dt \leq |f(z_0)|.$$

Dann muss natürlich überall sogar das Gleichheitszeichen stehen, und es folgt:

$$\int_0^{2\pi} (|f(z_0 + \varrho e^{it})| - |f(z_0)|) dt = 0.$$

¹Eine Teilmenge D eines topologischen Raumes X heißt *diskret in X* , falls es zu jedem Punkt $x \in D$ eine Umgebung U gibt, so dass $U \cap D = \{x\}$ ist.

Da der Integrand überall ≤ 0 und $\varrho < r$ beliebig ist, folgt:

$$|f(z)| = |f(z_0)| \text{ für } |z - z_0| < r.$$

Also ist $|f|$ auf $D_r(z_0)$ konstant, und dann natürlich auch f selbst. Schließlich wenden wir den Identitätssatz an und erhalten, dass f auf ganz G konstant sein muss. ■

Man kann das Maximumprinzip auch so formulieren:

Eine nicht-konstante holomorphe Funktion nimmt nirgendwo in ihrem Definitionsbereich ein lokales Maximum an (worunter stets ein Maximum von $|f|$ zu verstehen wäre).

2.32. Folgerung

Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, $f : \overline{G} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und holomorph auf G , so nimmt $|f|$ sein Maximum auf dem Rand von G an.

BEWEIS: Als stetige Funktion auf einer kompakten Menge muss $|f|$ irgendwo auf \overline{G} sein Maximum annehmen. Wegen des Maximumprinzips kann das nicht in G liegen. Da bleibt nur der Rand. ■

2.33. Minimumprinzip

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und ohne Nullstellen. Besitzt $|f|$ in G ein lokales Minimum, so ist f konstant.

Der triviale BEWEIS sei dem Leser überlassen.

2.34. Cauchy'sche Ungleichungen

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in G$ und $r > 0$ mit $D_r(z_0) \subset\subset G$. Dann gelten die folgenden Abschätzungen:

1. $|f(z_0)| \leq \max_{\partial D_r(z_0)} |f|.$
2. $|f'(z)| \leq \frac{4}{r} \max_{\partial D_r(z_0)} |f|$ für $z \in \overline{D_{r/2}(z_0)}$.

BEWEIS: 1) folgt sofort aus dem Maximumprinzip.

2) Für $z \in \overline{D_{r/2}(z_0)}$ gilt die Cauchy'sche Integralformel

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta.$$

Für $\zeta \in \partial D_r(z_0)$ ist $|\zeta - z| \geq r/2$. Also ergibt die Standardabschätzung:

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \max_{\partial D_r(z_0)} \left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \right| \leq \frac{4}{r} \cdot \max_{\partial D_r(z_0)} |f|.$$

Das ist die gewünschte Ungleichung. ■

2.35. Satz von Liouville

Ist f auf ganz \mathbb{C} holomorph und beschränkt, so ist f konstant.

BEWEIS: Sei $|f(z)| \leq C$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Aus der zweiten Cauchy'schen Ungleichung folgt:

$$|f'(z)| \leq \frac{4}{r} \max_{\partial D_r(0)} |f| \leq \frac{4C}{r}, \text{ für } |z| \leq r/2.$$

Lässt man r gegen Unendlich gehen, so erhält man, dass $f'(z) \equiv 0$ auf jeder festen Kreisscheibe um Null ist, also sogar auf ganz \mathbb{C} . Deshalb ist f selbst konstant. ■

Wer das Wundern noch nicht verlernt hat, sollte an dieser Stelle einmal innehalten und sich bewusst machen, wieviele erstaunliche Eigenschaften holomorpher Funktionen wir in kurzer Zeit hergeleitet haben!

Definition

Eine **ganze Funktion** ist eine auf ganz \mathbb{C} definierte holomorphe Funktion.

Beispiele sind die Exponentialfunktion, der Sinus und der Cosinus, vor allem aber die Polynome.

2.36. Fundamentalsatz der Algebra

Jedes nicht konstante Polynom besitzt eine Nullstelle in \mathbb{C} .

BEWEIS: Wir machen die Annahme, es gebe ein Polynom $p(z)$ vom Grad $n \geq 1$ ohne Nullstellen. Es sei $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ mit $a_n \neq 0$. Dann ist $f(z) := 1/p(z)$ eine ganze Funktion, und für $z \neq 0$ ist

$$f(z) = \frac{1}{z^n} \cdot \frac{1}{q(1/z)},$$

mit dem Polynom $q(w) := a_n + a_{n-1}w + \dots + a_1 w^{n-1} + a_0 w^n$. Wegen $q(0) = a_n \neq 0$ ist

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^n} \cdot \frac{1}{q(0)} = 0.$$

Also ist f eine beschränkte ganze Funktion und nach Liouville konstant, im Gegensatz zur Annahme. ■

Hieraus folgt per Induktion, dass jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ genau n Nullstellen (mit Vielfachheit gezählt) besitzt und daher in n Linearfaktoren zerfällt.

2.37. Konvergenzsatz von Weierstraß

Ist (f_n) eine Folge von holomorphen Funktionen auf einem Gebiet G , die lokal gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion f konvergiert, so ist auch f holomorph und (f'_n) konvergiert auf G lokal gleichmäßig gegen f' .

BEWEIS: Die Grenzfunktion f ist auf jeden Fall stetig. Sei Δ ein abgeschlossenes Dreieck in G . Dann konvergiert (f_n) auf $\partial\Delta$ gleichmäßig, und man kann den Satz über die Vertauschbarkeit von Integration und Limesbildung anwenden:

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial\Delta} f_n(z) dz = 0.$$

Also ist f nach dem Satz von Morera holomorph.

Sei $z_0 \in G$ beliebig. Es genügt zu zeigen, dass es eine offene Umgebung $U = U(z_0) \subset G$ gibt, so dass (f'_n) auf U gleichmäßig gegen f' konvergiert. Dazu sei $r > 0$ so gewählt, dass $D_r(z_0) \subset\subset G$ ist, und dann $U := D_{r/2}(z_0)$ gesetzt.

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Für $z \in U$ und beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|f'_n(z) - f'(z)| \leq \frac{4}{r} \cdot \max_{\partial D_r(z_0)} |f_n - f|.$$

Man kann n_0 so groß wählen, dass $\max_{\partial D_r(z_0)} |f_n - f| < \frac{r}{4} \cdot \varepsilon$ für $n \geq n_0$ ist. Aber dann ist $|f'_n(z) - f'(z)| < \varepsilon$ für $z \in U$ und $n \geq n_0$. Das heißt, dass (f'_n) lokal gleichmäßig gegen f' konvergiert. ■

Definition

1. Seien B_1, B_2 zwei offene Mengen in \mathbb{C} , $f : B_1 \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $f(B_1) = B_2$. f heißt **biholomorph**, falls f sogar bijektiv und f^{-1} holomorph ist.
2. Eine holomorphe Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **in** $z_0 \in G$ **lokal biholomorph**, falls es eine offene Umgebung $U = U(z_0) \subset G$ und eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{C}$ gibt, so dass $f|_U : U \rightarrow V$ biholomorph ist.
3. f heißt **auf** G **lokal biholomorph**, falls f in jedem Punkt $z \in G$ lokal biholomorph ist.

Offensichtlich gilt: Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ injektiv und lokal biholomorph, so ist $f(G)$ ebenfalls ein Gebiet und $f : G \rightarrow f(G)$ biholomorph.

2.38. Satz

Eine holomorphe Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann in $z_0 \in G$ lokal biholomorph, wenn $f'(z_0) \neq 0$ ist.

BEWEIS:

1) Ist $f(z_0) = w_0$ und f in z_0 lokal biholomorph, so gibt es offene Umgebungen $U = U(z_0)$ und $V = V(w_0)$, sowie eine holomorphe Funktion $g : V \rightarrow U$, so dass $g \circ f|_U = \text{id}_U$ ist. Aber dann ist $1 = (g \circ f)'(z_0) = g'(w_0) \cdot f'(z_0)$, also $f'(z_0) \neq 0$.

2) Sei umgekehrt f holomorph und $f'(z_0) \neq 0$. Da f' holomorph und damit insbesondere stetig ist, besitzt f auf einer offenen Umgebung $U = U(z_0)$ eine reell differenzierbare Umkehrung g .

Auf U ist $f'(z) \neq 0$. Sei $z \in U$ und $f(z) = w$. Dann ist $Df(z) \circ Dg(w) = \text{id}_{\mathbb{C}}$, also $f'(z) \cdot Dg(w)(v) = v$ und $Dg(w)(v) = (1/f'(z)) \cdot v$. Das ist eine \mathbb{C} -lineare Abbildung, also ist g in w komplex differenzierbar. ■

2.39. Satz von der Gebietstreue

Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine nicht konstante holomorphe Abbildung, so ist auch $f(G)$ ein Gebiet.

BEWEIS: Das stetige Bild einer zusammenhängenden Menge ist wieder zusammenhängend. Wir müssen also nur zeigen, dass $f(G)$ offen ist.

Sei $z_0 \in G$ und $g(z) := f(z) - f(z_0)$, also $g(z_0) = 0$. Es reicht zu zeigen, dass 0 innerer Punkt von $g(G)$ ist.

Nach dem Identitätssatz gibt es eine Kreisscheibe $D = D_r(z_0) \subset G$, so dass $g(z) \neq 0$ auf ∂D ist. Sei $\varepsilon := \frac{1}{2} \min_{\partial D} |g| > 0$. Ist $w \in D_\varepsilon(0)$ und $h(z) := g(z) - w$, so ist $|h(z_0)| = |w| < \varepsilon$. Für $z \in \partial D$ ist andererseits $|h(z)| \geq |g(z)| - |w| \geq 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon$. Das bedeutet, dass $|h|$ ein Minimum in D annimmt. Aus dem Minimumprinzip folgt nun, dass h eine Nullstelle in D besitzt. Also gibt es ein $z \in D$ mit $g(z) = w$. Damit ist $D_\varepsilon(0) \subset g(D) \subset g(G)$. ■

Und jetzt kommt noch ein weiterer erstaunlicher Satz:

2.40. Satz

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und injektiv.

Dann ist $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in G$, also insbesondere $f : G \rightarrow f(G)$ biholomorph.

BEWEIS: Da f' holomorph und nicht identisch Null ist, ist die Menge $A := \{z \in G \mid f'(z) = 0\}$ diskret in G . Weiter wissen wir schon, dass $f(G)$ ein Gebiet und

$f : G \rightarrow f(G)$ stetig, offen und bijektiv ist, also ein Homöomorphismus. Daher ist auch $M := f(A)$ diskret in $f(G)$. Da $f : G \setminus A \rightarrow f(G) \setminus M$ bijektiv und lokal biholomorph, also sogar global biholomorph ist, gilt: $f^{-1} : f(G) \rightarrow G$ ist stetig und außerhalb M holomorph. Aber dann muss f^{-1} sogar auf ganz $f(G)$ holomorph sein. ■

2.41. Satz

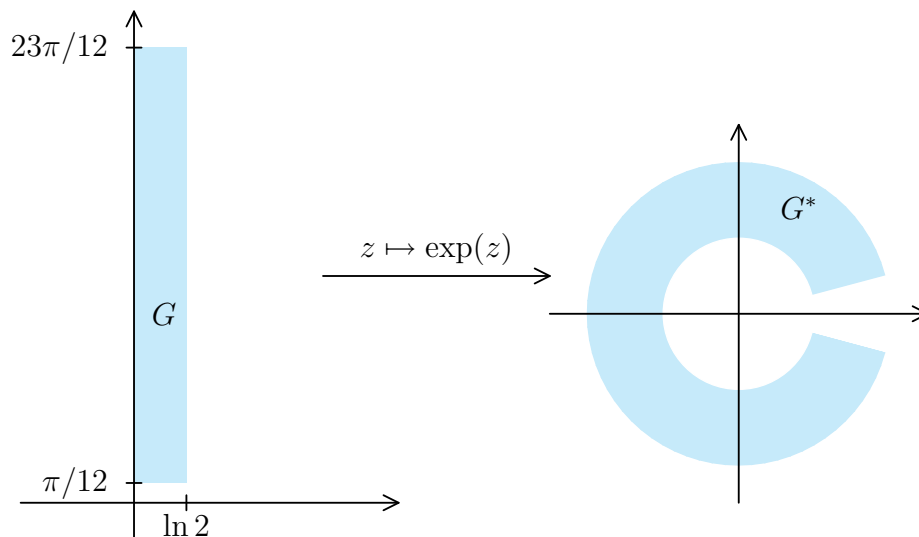
Sei G einfach-zusammenhängend, $F : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und injektiv. Dann ist auch $F(G)$ einfach-zusammenhängend.

BEWEIS: Wir wissen schon, dass $G^* := F(G)$ ein Gebiet ist. Sei f holomorph auf G^* . Dann ist $(f \circ F) \cdot F'$ holomorph auf G , und es gibt eine Stammfunktion g von $(f \circ F) \cdot F'$ auf G . Die Funktion $F^{-1} : G^* \rightarrow G$ ist ebenfalls holomorph, und damit auch $h := g \circ F^{-1}$. Es ist

$$h'(w) = g'(F^{-1}(w)) \cdot \frac{1}{F'(F^{-1}(w))} = f(w) \quad \text{für } w \in G^*.$$

■

2.42. Beispiel



Das (sternförmige) Rechteck

$$G := \{x + iy : 0 < x < \ln 2 \text{ und } \pi/12 < y < 23\pi/12\}$$

wird durch $w = \exp(z)$ biholomorph auf einen aufgeschlitzten Kreisring

$$G^* = \{re^{it} : 1 < r < 2 \text{ und } \pi/12 < t < 23\pi/12\}$$

abgebildet. Also ist G^* einfach-zusammenhängend.

Der komplette Kreisring $K := \{re^{it} : 1 < r < 2 \text{ und } 0 \leq t < 2\pi\}$ ist nicht einfach-zusammenhängend, denn die auf K holomorphe Funktion $f(z) := 1/z$ besitzt keine Stammfunktion.