Mathematik für Einsteiger
5. Auflage
Lösungen zu den Aufgaben

Inhaltsverzeichnis

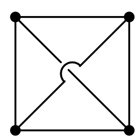
1 Wie wahr ist die Mathematik?

Lösungen zu den Aufgaben

Lösung zu Aufgabe 1.1: Annahme, $g \neq h$ seien zwei Geraden, die sich in mindestens zwei verschiedenen Punkten P und Q treffen. Dann gibt es zu diesen beiden Punkten zwei Geraden, auf denen sie liegen. Widerspruch.

Es gibt in der Ebene mindestens drei verschiedene Punkte A, B und C, die nicht auf einer Geraden liegen (Axiom). Dann müssen auch Verbindungsgeraden AB, BC und AC existieren. Wäre etwa $AB = BC$, so lägen A, B, C auf einer Geraden, was ausgeschlossen war. Analog folgen die anderen Fälle.

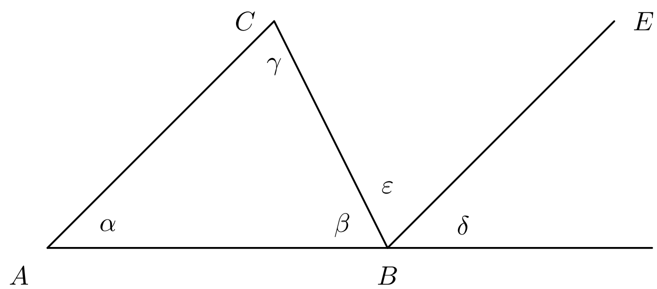
Lösung zu Aufgabe 1.2: Vier Punkte kann man mit 6 Geraden verbinden:



Jede Gerade besteht aus genau zwei Punkten. Die Diagonalen schneiden sich nicht, sind also parallel!

Lösung zu Aufgabe 1.3: Ein Hemputi enthält wenigstens einen grünen Hunki. Dann bleibt noch Platz für weniger als $20 - \frac{11}{10} = \frac{189}{10}$ Knaffs. Wenn dieser Platz auf x Knaffs und y grüne Hunkis verteilt wird und $x > y + 1$ sein soll, dann ist $(y + 1) + \frac{11}{10}y < \frac{189}{10}$, also $y \leq 8$. Maximal 9 grüne Hunkis können in einem Hemputi sein.

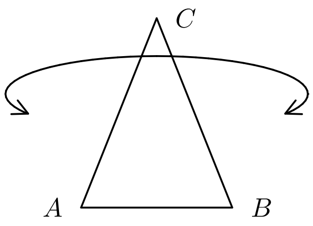
Lösung zu Aufgabe 1.4: Sei BE parallel zu AC. Dann ist $\gamma = \varepsilon$ und $\alpha = \delta$, also $\alpha + \gamma = \varepsilon + \delta =: \varphi$ der Außenwinkel, der α und γ gegenüberliegt.



Lösung zu Aufgabe 1.5: Die Beweise können mit Wahrheitstafeln geführt werden. Dabei ist es hilfreich, die Implikation $A \Longrightarrow B$ durch die Aussage $B \vee \neg A$ zu ersetzen, und Äquivalenzumformungen können den Weg abkürzen.

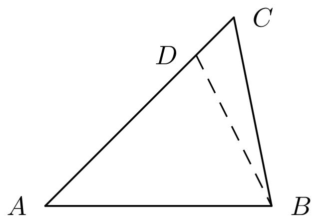
Lösung zu Aufgabe 1.6: Es geht wie im Buch bei $\sqrt{2}$, man nimmt an, es gibt einen (gekürzten) Bruch p/q mit $(p/q)^2 = 3$. Aus der Gleichung gewinnt man, dass die Primzahl 3 Teiler von p und q sein muss, und das ist ein Widerspruch.

Lösung zu Aufgabe 1.7 :



Ist Dreieck ABC gleichschenklig, so ist ABC kongruent zu BAC (SWS). Also ist auch $\angle BAC = \angle ABC$.

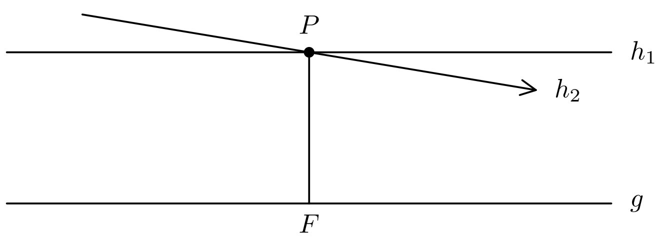
Lösung zu Aufgabe 1.8 : Annahme, $BC < AC$. Wähle D zwischen A und C, mit $AD = BC$.



Die Dreiecke ABD und ABC sind kongruent (SWS: $AB = AB$, $AD = BC$ und $\angle BAD = \angle ABC$). Also muss auch $\angle ABD = \angle BAC = \angle ABC$ sein. Das ist ein Widerspruch, denn nach Konstruktion ist $\angle ABD < \angle ABC$.

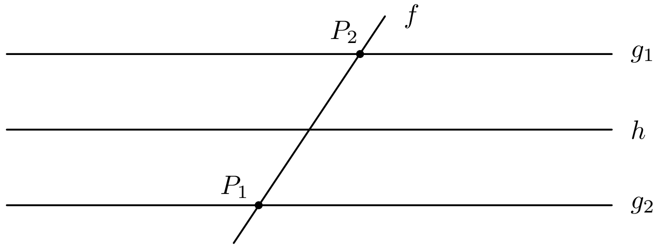
Lösung zu Aufgabe 1.9 : Die einzige Lösung der Ausgangsgleichung ist $x = 1$. Also hat der Schüler beim dritten Schritt durch 0 dividiert, ohne es zu merken.

Lösung zu Aufgabe 1.10 : Es sei eine Gerade g und ein Punkt $P \notin g$ gegeben, so dass durch P **mindestens** zwei Parallen zu g laufen. F sei der Fußpunkt des Lotes von P auf g. Sei h_1 die Gerade durch P, die senkrecht auf der Strecke FP steht. Es gibt auf jeden Fall eine Gerade $h_2 \neq h_1$ durch P, die parallel zu g ist.



Offensichtlich schließt h_2 mit FP auf einer Seite einen Winkel $< 90°$ ein. Aus dem Parallelenaxiom von Euklid folgt, dass sich h_2 und g in einem Punkt Q treffen müssen. Das ist ein Widerspruch.

Lösung zu Aufgabe 1.11 : Die Situation sieht folgendermaßen aus:



Man überzeugt sich sehr leicht davon, dass g_1, g_2 und f die Winkelbeziehungen erfüllen. Schwieriger ist es, daraus die Parallelität von g_1 und g_2 zu folgern.

Für $i = 1, 2$ sei P_i der Schnittpunkt von g_i und f. Wir nehmen an, g_1 und g_2 schneiden sich in einem Punkt Q. Dann enthält das Dreieck P_2QP_1 zwei nebeneinander liegende Winkel, deren Summe 180° beträgt. Das ist ein Widerspruch zum Satz über die Winkelsumme im Dreieck.

Lösung zu Aufgabe 1.12: Wir führen das Symbol $A \sqcup B$ für „**entweder** A **oder** B" ein. Dann muss die Wahrheitstafel folgendermaßen aussehen:

A	B	$A \sqcup B$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Das ist offensichtlich die Wahrheitstafel, die man bei $\neg(A \iff B)$ erhalten würde. Das kann man umformen zu $(A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A)$. Und das ist äquivalent zu $(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$. Das ist genau das, was man will!

Lösung zu Aufgabe 1.13: Die Verneinungen lauten:

1) 9 ist Teiler von 27, und 3 ist kein Teiler von 27.

2) Höchstens 2 Studenten rauchen vor der Tür.

3) Es gibt einen Professor, der keinen Bart oder keine weißen Haare hat.

4) In Wuppertal regnet es nicht, und es gibt eine Ampel, die nicht rot ist.

Lösung zu Aufgabe 1.14: Eine große Wahrheitstafel zeigt: $(A \vee B) \wedge (C \vee \neg D)$ wird genau dann falsch, wenn A und B beide falsch sind oder wenn C falsch und D wahr ist.

Lösung zu Aufgabe 1.15: Die Aussagen (1) und (2) sind wahr (Implikationen mit falscher Prämisse), Aussage (3) ist falsch (eine falsche und eine wahre Aussage können nicht äquivalent sein).

Lösung zu Aufgabe 1.16: Wir identifizieren A, B, C, D jeweils mit ihrer Aussage. Dann gilt:

$$\begin{array}{rrcr} \text{(I)} & A & \iff & \neg B \\ \text{(II)} & \neg C & \iff & D \\ \text{(III)} & \neg D & \iff & \neg A \\ \text{(IV)} & D & \implies & B \end{array}$$

Wenn D die Wahrheit sagt, dann auch B (nach (IV)). Dann lügt aber A (nach (I)), und wegen (III) auch D. Das kann nicht sein! Also muss D lügen (die Implikation (IV) ist dann trotzdem richtig). Wegen (II) folgt, dass C die Wahrheit sagt.

Man sieht außerdem, dass A lügt und B die Wahrheit sagt. Diesmal tritt kein Widerspruch auf.

Lösung zu Aufgabe 1.17: Die Kontrapositionen lauten:

1) Wenn ein Viereck kein Rechteck ist, dann ist es auch kein Quadrat.

2) Wenn $a^2 \geq b^2$ ist, dann ist $a \geq b$.

3) Wenn Ferdinand keine Sechs hat, dann ist er mindestens so gut wie einer seiner Mitschüler.

2 Von Mengen und Unmengen

Lösungen zu den Aufgaben

Lösung zu Aufgabe 2.1: Die Reflexivität von „$\subset$“ ist trivial, ihre Transitivität folgt aus der Syllogismus-Regel. „$\subset$“ ist aber **nicht** symmetrisch, denn die Beziehung $\{1\} \subset \{1,2\}$ lässt sich nicht umkehren.

Lösung zu Aufgabe 2.2:
(1) wird analog zum Beweis der Formel „$N \subset M \iff N \cap M = N$“ (im Buch) behandelt.

Bei (2) ist es ratsam, mit Fallunterscheidungen zu arbeiten. (3) ergibt sich mehr oder weniger von selbst.

Lösung zu Aufgabe 2.3:
Zu (1): $\big(\exists\, x\,:\,(x \in A) \wedge (x \in B)\big) \implies \big((\exists\, x\,:\,x \in A) \wedge (\exists\, x\,:\,x \in B)\big)$.

Gegenbeispiel zur Umkehrung: $A = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ gerade}\}$ und $B = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ ungerade}\}$.

(2): Es seien A und B Teilmengen von G.
a) $\big(\forall\, x \in G\,:\,(x \in A) \wedge (x \in B)\big) \iff \big((\forall\, x \in G\,:\,x \in A) \wedge (\forall\, x \in G\,:\,x \in B)\big)$
b) $\big((\forall\, x \in G\,:\,x \in A) \vee (\forall\, x \in G\,:\,x \in B)\big) \implies \big(\forall\, x \in G\,:\,(x \in A) \vee (x \in B)\big)$.

Gegenbeispiel zur Umkehrung von (b): $G = \mathbb{Z}$, A und B wie oben.

Lösung zu Aufgabe 2.4: (Negation von Quantoren)
1) $\exists\, x \in G\,:\,A(x) \wedge \neg B(x)$.
2) $\forall\, x \in G\,:\,(\exists\, y \in H\,:\,\neg A(x,y)) \wedge (\forall\, y \in H\,:\,B(x,y))$.

Lösung zu Aufgabe 2.5: (Das Rätsel von Carroll)
In der Menge X aller Tiere werden Teilmengen H (im Haus), M (in d. Mond starrend), S (Schoßtier), V (verabscheut), W (gemieden), F (fleischfressend), N (Nachtjäger), I (mich mögend), T (Mäusetöter), K (Kängurus) und Z (Katzen) ausgewählt. Die Komplemente seien jeweils mit einem Strich gekennzeichnet. Zwischen ihnen gelten die Beziehungen:

$H \subset Z$, $M \subset S$, $V \subset W$, $F \subset N$, $Z \subset T$, $I \subset H$, $K \cap S = \varnothing$, $T \subset F$, $I' \subset V$ und $N \subset M$.

Daraus kann man ableiten: $I \subset H \subset Z \subset T \subset F \subset N \subset M \subset S \subset K'$ und $I' \subset V \subset W$. Wegen $I \subset S$ ist $S' \subset I'$, also also $K \subset S' \subset I' \subset W$. Ich gehe Kängurus aus dem Weg.

Lösung zu Aufgabe 2.6: Mögliche Beschreibung der angegebenen Mengen:

1) $K = \{X \text{ im Raum} : \text{der Abstand von } X \text{ und } P \text{ liegt zwischen } r \text{ und } r + d\}$.

2) $\{x \in \mathbb{R}\,:\,3x^2 - 2x = 1\} = \{x \in \mathbb{R}\,:\,(x - 1/3)^2 = 4/9\} = \{1, -1/3\}$.

3) $\{n \in \mathbb{Z}\,:\,n < 7 \text{ und } n > -1\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

4) $\{P\,:\,x\text{-Koordinate von } P = \pm y\text{-Koordinate von } P\}$. Das ist das Kreuz der Geraden $x = y$ (also der Winkelhalbierenden) und ihrer Spiegelung, also der Geraden $x = -y$.

Lösung zu Aufgabe 2.7: Leere Mengen sind zum Beispiel

a) $M := \{x \in \mathbb{R}\,:\,x^4 + 3x^2 + x = x - 2\} = \{x \in \mathbb{R}\,:\,x^2 = -1 \text{ oder } x^2 = -2\} = \varnothing$.

b) $N := \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 4 < 2x\} = \{x \in \mathbb{R} : (x-2)^2 < 0\} = \varnothing$.

Lösung zu Aufgabe 2.8 : a) Es ist

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 3 = 0 \quad &\iff \quad (x-2)^2 = 1 \\ &\iff \quad (x-2=1) \vee (x-2=-1) \\ &\iff \quad (x=3) \vee (x=1). \end{aligned}$$

Also ist diese Behauptung wahr.

b) und c) sind wahr, d) ist falsch, e) ist wahr und f) ist falsch.

Lösung zu Aufgabe 2.9 : 1) Ist ein Produkt negativ, so muss einer der Faktoren negativ und einer positiv sein. Daher gilt:

$$x^2 - 2x < 0 \iff x(x-2) < 0 \iff (x > 0) \wedge (x < 2) \text{ (denn } (x<0) \wedge (x>2) \text{ ist unmöglich).}$$

Also ist $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 2\}$ und $B = \{x \in \mathbb{R} : x < 3/2\}$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} A \cap B \quad &= \quad \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 3/2\}, \\ A \cup B \quad &= \quad \{x \in \mathbb{R} : x < 2\} \\ \text{und} \quad A \setminus B \quad &= \quad \{x \in \mathbb{R} : 3/2 \le x < 2\}. \end{aligned}$$

2) Es ist $A = \{3, 6, 9, 12, \ldots\}$ die Menge aller positiven Vielfachen von 3, sowie $B = \{0, \pm 4, \pm 8, \pm 12, \ldots\}$ die Menge aller ganzzahligen Vielfachen von 4. Dann ist

$$\begin{aligned} A \cap B \quad &= \quad \{x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} \text{ mit } x = 12y\} \;=\; \{12, 24, 36, \ldots\}, \\ A \cup B \quad &= \quad \{x \in \mathbb{Z} : \big(\exists q \in \mathbb{Z} \text{ mit } x = 4q\big) \vee \big(\exists p \in \mathbb{N} \text{ mit } x = 3p\big)\} \\ &= \quad \{-12, -8, -4, 0, 3, 4, 6, 8, 9, 12, \ldots\} \\ \text{und} \quad A \setminus B \quad &= \quad \{x \in \mathbb{N} : \big(\exists p \in \mathbb{N} \text{ mit } x = 3p\big) \wedge \big(\neg \exists p \in \mathbb{N} \text{ mit } x = 12p\big)\} \\ &= \quad \{3, 6, 9, 15, 18, 21, 27, \ldots\}. \end{aligned}$$

3) Welche natürlichen Zahlen x haben die Gestalt $x = 2p + 3q$ mit $p, q \in \mathbb{N}_0$? Mit $q = 0$ und $p \in \mathbb{N}$ erhält man alle positiven geraden Zahlen. Mit $q = 1$ ist $x = 2p + 3q = 2(p+1) + 1$, und so erhält man alle ungeraden Zahlen ≥ 3. Damit ist $A = \{x \in \mathbb{N} : x \ge 2\}$. Außerdem ist $B = \{x \in \mathbb{N} : x \le 7\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Nun folgt:

$$\begin{aligned} A \cap B \quad &= \quad \{x \in \mathbb{N} : 2 \le x \le 7\} \;=\; \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \\ A \cup B \quad &= \quad \mathbb{N} \\ \text{und} \quad A \setminus B \quad &= \quad \{x \in \mathbb{N} : x \ge 8\}. \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2.10 : Es ist $\mathbf{P}(\mathbf{P}(\{1\})) = \mathbf{P}(\{\varnothing, \{1\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{1\}\}, \{\varnothing, \{1\}\}\}$ und $\mathbf{P}(\{\varnothing, 1\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{1\}, \{\varnothing, 1\}\}$. Der Durchschnitt beider Mengen enthält $\varnothing$ und $\{\varnothing\}$.

Lösung zu Aufgabe 2.11 : Es ist $\mathbf{P}(M \cup \{a\}) = \mathbf{P}(M) \cup \{A \cup \{a\} : A \in \mathbf{P}(M)\}$. Offensichtlich sind das doppelt so viele Elemente wie in $\mathbf{P}(M)$.

Lösung zu Aufgabe 2.12 : Es gilt:

$$\begin{aligned} A \in \mathbf{P}(X) \cap \mathbf{P}(Y) \quad &\iff \quad (A \subset X) \wedge (A \subset Y) \\ &\iff \quad A \subset X \cap Y \\ &\iff \quad A \in \mathbf{P}(X \cap Y) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} A \in \mathbf{P}(X) \cup \mathbf{P}(Y) &\iff (A \in \mathbf{P}(X)) \vee (A \in \mathbf{P}(Y)) \\ &\iff (A \subset X) \vee (A \subset Y) \\ &\implies A \subset X \cup Y \\ &\iff A \in \mathbf{P}(X \cup Y). \end{aligned}$$

An der Stelle, wo der Implikationspfeil steht, gilt nicht die Umkehrung. Beispiel: Sei $X = \{1\}$ und $Y = \{2,3\}$, sowie $A = \{1,2\}$. Dann liegt A in $\mathbf{P}(X \cup Y)$, aber weder in $\mathbf{P}(X)$, noch in $\mathbf{P}(Y)$.

Lösung zu Aufgabe 2.13: Erste Inklusion: Wir haben folgende Implikationen:

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \setminus C) &\implies (x \in A) \vee (x \in B \wedge x \notin C) \\ &\implies (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \notin C) \\ &\implies (x \in A \cup B) \wedge \neg(x \notin A \wedge x \in C) \\ &\implies (x \in A \cup B) \wedge \neg(x \in C \setminus A) \\ &\implies x \in (A \cup B) \setminus (C \setminus A). \end{aligned}$$

Zweite Inklusion: Hier gilt:

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B) \setminus (A \cap C) &\implies (x \in A \cap B) \wedge \neg(x \in A \cap C) \\ &\implies (x \in A \wedge x \in B) \wedge (x \notin A \vee x \notin C) \\ &\implies (x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \\ &\implies x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C \\ &\implies (x \in A) \wedge (x \in B \setminus C) \\ &\implies x \in A \cap (B \setminus C). \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2.14: Sei B die Menge der schwarzen und W die Menge der silbernen Geräte, sowie F die Menge der fehlerhaften Geräte. Dann gilt für die Anzahlen:

$$\#(B \cup F) = 159, \quad \#(B \cap F) = 21 \quad \text{und} \quad \#(W \cap F) = 17.$$

Also ist $\#F = 21 + 17 = 38$. Außerdem gilt:

$$B \cup F = (B \setminus F) \cup (B \cap F) \cup (F \setminus B) = (B \setminus F) \cup F.$$

Da die beiden letzteren Mengen disjunkt sind, ist $B \setminus F = (B \cup F) \setminus F$ und $\#(B \setminus F) = 159 - 38 = 121$. Daraus folgt:

$$\#B = \#(B \setminus F) + \#(B \cap F) = 121 + 21 = 142.$$

Lösung zu Aufgabe 2.15: Beschreibung mit Existenz- und Allquantoren:

1) F stehe für Fußgänger. Die Polizei meldet: „$\exists F$ mit $F \in (A46)$."

2) $\forall$ Plätze P (bei der Galavorstellung) gilt: P ist nicht frei.

3) S stehe für Studenten, M für mündliche Prüfungen. $\forall S$: $\exists M$ mit „S muss M ablegen".

4) „$\exists$ Gerechter in der Stadt" $\implies$ „Ich werde die Stadt nicht zerstören".

5) K stehe für Kuh, S für Stall: $\neg(\forall K : K \in S)$ oder (gleichbedeutend): $\exists K : K \notin S$.

6) $\forall K : K \notin S$.

Lösung zu Aufgabe 2.16 : Für $x \in G$ gilt:

$$\begin{aligned} x \in G \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n) \quad &\iff \quad \neg\big((x \in A_1) \vee \ldots \vee (x \in A_n)\big) \\ &\iff \quad \neg(\exists\, i \text{ mit } x \in A_i) \\ &\iff \quad \forall\, i \,:\, x \notin A_i \\ &\iff \quad \forall\, i \,:\, x \in G \setminus A_i \\ &\iff \quad x \in (G \setminus A_1) \cap \ldots \cap (G \setminus A_n). \end{aligned}$$

Die zweite Aussage wird analog bewiesen.

Lösung zu Aufgabe 2.17 : a) Sei A die Aussage „g trifft g_1 und g_2 und bildet mit ihnen auf einer Seite Winkel, die zusammen $< 180°$ betragen“. Und B sei die Aussage „g_1 und g_2 treffen sich“. Dann soll $A \implies B$ (also die Aussage $B \vee (\neg A)$) verneint werden, das ergibt die Aussage $A \wedge (\neg B)$. Die Verneinung besagt also: „Es gibt zwei parallele Geraden g_1, g_2, die eine dritte Gerade g treffen und mit ihr auf einer Seite von g innere Winkel bilden, die zusammen weniger als 180° ergeben.“ Diese Aussage war der Ausgangspunkt bei der Suche nach einer nichteuklidischen Geometrie.

b) Es gibt ein Dreieck und in diesem Dreieck zwei Winkel, die zusammen mindestens 180° ergeben.

c) Es gibt einen Abteilungsleiter, der beim Betriebsfest mindestens eine Stunde lang mit einer (bestimmten) Angestellten nicht Walzer getanzt hat.

d) Es gibt eine Stadt, in der alle Männer in allen Gaststätten bekannt sind.

e) Jeder Student kommt in wenigstens einem Semester in wenigstens einer Vorlesung pünktlich.

3 Unendlich viele Zahlen

Lösungen zu den Aufgaben

Lösung zu Aufgabe 3.1 : (1) ist sehr simpel.

Zu (2 a): $x = -5/4$. (2 b): $x = -1$.

Lösung zu Aufgabe 3.2 : (a) $a < b \implies b - a > 0 \implies (-a) - (-b) > 0 \implies -a > -b$
(b) Benutze: $a < b \implies 1 = aa^{-1} < ba^{-1}$, also $b^{-1} < b^{-1}(ba^{-1}) = a^{-1}$.
(c) Für „ $\implies$ “ nehme man an, dass $(a, b) \neq (0, 0)$ ist, und führe einen Widerspruch herbei.

Lösung zu Aufgabe 3.3 : (1) Die Aussage soll für $n > 4$, also $n \geq 5$ bewiesen werden. Für $n = 5$ kann man das direkt nachprüfen, und das ist in diesem Falle der Induktionsanfang. Beim Induktionsschluss muss ein beliebiges $n \geq 5$ betrachtet werden. Für solche n ist $n^2 \geq 5 \cdot n \geq 2n+1$, also $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n = n^2 + n^2 \geq n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$. Damit ist der Schluss vollzogen.

(2) Setzt man $M_n := \{1, 2, \ldots, n\}$, so ist $\mathbf{P}(M_1) = \{\varnothing, \{1\}\}$ und

$$\mathbf{P}(M_{n+1}) = \mathbf{P}(M_n) \cup \{A \cup \{n+1\} \,:\, A \in \mathbf{P}(M_n)\}.$$

Mit dieser Information kann man Induktionsanfang und Induktionsschluss leicht ausführen.

Lösung zu Aufgabe 3.4 : Beim Schluss von n auf $n + 1$ wird vorausgesetzt, dass $n \geq 2$ ist. Der Schluss von 1 auf 2 fehlt.

Lösung zu Aufgabe 3.5: (1) Es ist $a^{n+1} - 1 = a \cdot a^n - a + (a-1) = a \cdot (a^n - 1) + (a-1)$. Damit funktioniert der Induktionsbeweis. Es geht aber auch ohne Induktion.

(2) Ist $n = x \cdot y$, so wird $2^n - 1 = (2^x)^y - 1$ nach Teil (1) von $2^x - 1$ geteilt.

(3) Die Zahlen 9, 21, 33, 77 sind pseudoprim (wie man aus einer Tabelle aller Zahlen vom Typ $4k+1$ entnehmen kann), aber es ist $21 \cdot 33 = 9 \cdot 77$. Also ist die Zerlegung nicht eindeutig bestimmt.

Lösung zu Aufgabe 3.6: (1) Es ist $16384 = 2^{14}$ und $486 = 2 \cdot 3^5$, also $\mathrm{ggT}(16384, 486) = 2$. Mit dem euklidischen Algorithmus erhält man das gleiche Ergebnis:

$$\begin{aligned}
16384 &= 33 \cdot 486 + 346 \\
486 &= 1 \cdot 346 + 140 \\
346 &= 2 \cdot 140 + 66 \\
140 &= 2 \cdot 66 + 8 \\
66 &= 8 \cdot 8 + 2 \\
8 &= 4 \cdot 2 + 0.
\end{aligned}$$

Analog ergibt sich im Falle (2) das Ergebnis 1, und im Falle (3) das Ergebnis 3842.

Lösung zu Aufgabe 3.7: Fehler des Studenten:

1) Rechts vom Äquivalenzzeichen steht keine Aussage, sondern ein Term.

2) Auch hier stehen Terme da, wo Aussagen stehen sollten.

3) Zwischen Aussagen kann kein Gleichheitszeichen stehen, da gehört ein Äquivalenzzeichen hin.

Lösung zu Aufgabe 3.8: Zur Eindeutigkeit: Existiert eine Lösung x, so gilt $2(x+1) = x+4$, also $2x + 2 = x + 4$. Daraus folgt schließlich $x = 2$.

Zum Beweis der Existenz mache man die Probe: Es ist $2 \cdot (2+1) = 6$ und $2 + 4 = 6$, also $x = 2$ tatsächlich eine Lösung.

Lösung zu Aufgabe 3.9: 1) Zu x gibt es ein Negatives x^*, und zu x^* gibt es ein Negatives x^{**}. Dann ist $x + x^* = x^* + x^{**} = 0$, und daher

$$\begin{aligned}
x^* + x &= x^* + (x + 0) \;=\; x^* + \big(x + (x^* + x^{**})\big) \\
&= x^* + \big((x + x^*) + x^{**}\big) \;=\; x^* + (0 + x^{**}) \\
&= (x^* + 0) + x^{**} \;=\; x^* + x^{**} \;=\; 0.
\end{aligned}$$

2) Sei $x \in \mathscr{R}$ beliebig und x^* ein Negatives von x, also $x + x^* = 0$. Nach (1) ist dann auch $x^* + x = 0$, und es folgt:

$$0 + x = (x + x^*) + x = x + (x^* + x) = x + 0 = x.$$

Wir nehmen an, es gibt zwei Nullen 0_1 und 0_2. Dann ist $0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_1$. Die erste Gleichung gilt nach Axiom (II), die zweite Gleichung wurde gerade bewiesen.

3) Wir nehmen an, zu einem $x \in \mathscr{R}$ gebe es zwei Negative x_1^* und x_2^*. Dann ist $x + x_1^* = x + x_2^* = 0$, und nach (1) ist auch $x_1^* + x = x_2^* + x = 0$. Damit folgt:

$$\begin{aligned}
x_1^* &= x_1^* + 0 \;=\; x_1^* + (x + x_2^*) \\
&= (x_1^* + x) + x_2^* \;=\; 0 + x_2^* \;=\; x_2^*.
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 3.10 : Faktorisiere: $7x(5x-3)=0$. Dann muss $x=0$ oder $x=3/5$ sein.

Lösung zu Aufgabe 3.11 : Es muss $x \neq -1/2$ und $x \neq 0$ sein, sonst existiert das Inverse zu $2x+1$ bzw. $6x^2+3x$ nicht. Gibt es eine Lösung x, so ist $1=(2-11x)(3x)^{-1}$, also $3x=2-11x$ und $x=1/7$. Die Probe zeigt, dass dies tatsächlich eine Lösung ist.

Lösung zu Aufgabe 3.12 : Die Ungleichung gilt genau dann, wenn $x>-1/7$ ist.

Lösung zu Aufgabe 3.13 : 1) Ein kleiner Trick: $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2 \geq 0$, also $\frac{1}{2}(a^2+b^2) \geq ab$.

2) Sei $a<b$ und $ab<0$. Dann muss $a<0<b$ sein, und deshalb auch $\dfrac{1}{a}<0<\dfrac{1}{b}$.

3) Sei $0<a<1<b$. Dann ist $b-ab=b(1-a)>1-a$, also $a+b>1+ab$.

Lösung zu Aufgabe 3.14 : Definitionsgemäß ist $F_3=F_1+F_2=1+1=2$, also

$$F_1F_3-F_2^2=1\cdot 2-1^2=2-1=1=(-1)^2.$$

Damit ist der Induktionsanfang (für $n=2$) erledigt.

Wir kommen zum Induktionsschluss (von n nach $n+1$): Es ist

$$\begin{aligned}
F_nF_{n+2}-F_{n+1}^2 &= F_n(F_n+F_{n+1})-F_{n+1}^2\\
&= F_n^2+F_nF_{n+1}-(F_{n-1}+F_n)^2\\
&= F_nF_{n+1}-F_{n-1}^2-2F_{n-1}F_n\\
&= F_n(F_{n+1}-F_{n-1})-F_{n-1}(F_{n-1}+F_n)\\
&= F_n^2-F_{n-1}F_{n+1}\\
&= -(-1)^n \;=\; (-1)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 3.15 : Induktionsanfang: **Eine** Gerade teilt die Ebene in 2 Teile, und andererseits ist $\frac{1(1+1)}{2}+1=1+1=2$.

Induktionsschluss: Die Behauptung sei für n bewiesen. Sind $n+1$ Geraden $g_1, g_2, \ldots,$ g_n, g_{n+1} in der Ebene gegeben, so zerlegen $g_1,\ldots,g_n$ diese in höchstens $\frac{n(n+1)}{2}+1$ Teile. Die Gerade g_{n+1} hat höchstens n Schnittpunkte $S_1,\ldots,S_n$ mit den ersten n Geraden. Dadurch erhält man maximal $n+1$ Abschnitte zwischen den S_i auf g_{n+1}. Und jeder solche Abschnitt teilt ein altes Gebiet in 2 neue Gebiete. Die Anzahl der Gebiete erhöht sich also um höchstens $n+1$.

Es ist aber

$$\left[\frac{n(n+1)}{2}+1\right]+(n+1)=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}+1=\frac{(n+1)(n+2)}{2}+1.$$

Lösung zu Aufgabe 3.16 : Man versucht es natürlich mit Induktion nach n :

Induktionsanfang: Für $n=3$ ergibt die linke Seite $(3+1)^3=4\cdot 4\cdot 4=64$ und die rechte Seite $3^{3+1}=9\cdot 9=81$. Die Ungleichung stimmt.

Induktionsschluss: Die Behauptung sei wahr für ein $n \geq 3$. Dann gilt:

$$(n+2)^{n+1}=\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^n}\cdot(n+1)^n<\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^n}\cdot n^{n+1},\ \text{(nach Induktionsvoraussetzung)}$$

Nun muss gezeigt werden, dass die rechte Seite $< (n+1)^{n+2}$ ist.

Das ist gleichbedeutend mit der Ungleichung $\big((n+2)n\big)^{n+1} < (n+1)^{2n+2} = \big((n+1)^2\big)^{n+1}$. Es ist aber $(n+2)n = n^2+2n < n^2+2n+1 = (n+1)^2$, und daraus folgt die obige Ungleichung.

Lösung zu Aufgabe 3.17 : Ist $n \in \mathbb{Z}$, so ist $n = 3m$, $n = 3m+1$ oder $n = 3m+2$. Nun ist

$$\begin{array}{rrcl} & (3m)^2 &=& 9m^2 \;=\; 3\cdot(3m^2), \\ & (3m+1)^2 &=& 9m^2+6m+1 \;=\; 3(3m^2+2m)+1 \\ \text{und} & (3m+2)^2 &=& 9m^2+12m+4 \;=\; 3(3m^2+4m+1)+1. \end{array}$$

Lösung zu Aufgabe 3.18 : Jede der Zahlen a_i besitzt eine Primfaktorzerlegung:

$$a_i = p_{i,1}\cdots p_{i,n_i},\ i = 1,\ldots,n.$$

Die linke Seite der Äquivalenz bedeutet: $\{p_{i,1},\ldots,p_{i,n_i}\} \cap \{p_{j,1},\ldots,p_{j,n_j}\} = \varnothing$ für $i \neq j$. Aus dieser Aussage folgt sofort die rechte Seite.

Für die umgekehrte Richtung („$\Longleftarrow$“) benutze man Kontraposition: Gibt es eine Primzahl $p \in T_{a_i} \cap T_{a_j}$, so ist $\mathrm{kgV}(a_1,\ldots,a_n)$ höchstens so groß wie $\frac{1}{p}a_1\cdots a_n$, also echt kleiner als $a_1\cdots a_n$.

Lösung zu Aufgabe 3.19 : Man bezeichne die im euklidischen Algorithmus auftretenden Reste mit $r_1, r_2, r_3, \ldots$. Dann beweise man mit Induktion nach k :

Es gibt ganze Zahlen α_k, β_k mit $r_k = \alpha_k a + \beta_k b$.

Induktionsanfang: Aus der Darstellung $a = q\cdot b + r_1$ entnehmen wir $r_1 = \alpha_1 a + \beta_1 b$, mit $\alpha_1 = 1$ und $\beta_1 = -q$. Wegen $b = q_1\cdot r_1 + r_2$ ist auch $r_2 = \alpha_2 a + \beta_2 b$, mit $\alpha_2 = -q_1$ und $\beta_2 = 1 + q_1 q$.

Induktionsschluss: Es sei $k \geq 3$ und $r_i = \alpha_i a + \beta_i b$ für $i < k$. Wegen der Gleichung $r_{k-2} = q_{k-1}\cdot r_{k-1} + r_k$ ist

$$r_k = (\alpha_{k-2}a + \beta_{k-2}b) - q_{k-1}(\alpha_{k-1}a + \beta_{k-1}b) = \alpha_k a + \beta_k b,$$

mit $\alpha_k = \alpha_{k-2} - q_{k-1}\alpha_{k-1}$ und $\beta_k = \beta_{k-2} - q_{k-1}\beta_{k-1}$.

Hier wurde das zweite Induktionsprinzip verwendet. Weil der Induktionsschluss außerdem erst ab $k \geq 3$ funktioniert, muss der Induktionsanfang die Fälle $k = 1$ **und** $k = 2$ behandeln.

Lösung zu Aufgabe 3.20 : „3 im Quadrat“ bedeutet „3 in 3 Dreiecken“, und „a im Dreieck“ bedeutet a^a. Daraus folgt:

- „3 im Dreieck“ ist $= 3^3 = 27$.
- „3 in 2 Dreiecken“ ist $= 27^{27} = 3^{3^4} = 3^{81}$.
- „3 in 3 Dreiecken“ ist $= (3^{81})^{(3^{81})} = 3^{3^4\cdot 3^{81}} = 3^{3^{85}}$.

4 Auf dem Weg ins Irrationale

Lösungen zu den Aufgaben

Lösung zu Aufgabe 4.1:

(1) $(a_n + a_{n-1}) - (a_1 + a_2)$ und $\displaystyle\sum_{n=1}^{20} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{20} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{20}{21}$.

(2) $\displaystyle\left(2 - \frac{n+2}{2^n}\right) + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}$.

(3) Natürlich ist vorauszusetzen, dass $n \geq k$ ist. Man führe Induktion nach n (mit Induktionsanfang $n = k$) und benutze die bekannten Formeln über Binomialkoeffizienten.

(4) Ist $1 \leq i \leq p-1$, so sind p und $i!$ teilerfremd. Also ist p ein Teiler von $\binom{p}{i}$. Weiter ist

$$(a+1)^p - (a+1) = (a^p - a) + \sum_{i=1}^{p-1} \binom{p}{i} a^i.$$

Daraus folgt die erste Behauptung. Die zweite ergibt sich durch Induktion.

Lösung zu Aufgabe 4.2: Es ist $i = 1/20$ und $q = 21/20$, also $S_{n-1} = 20 \cdot (q^{20} - 1) \approx 33$ (für $n = 20$). Die Berechnung von $q^{20} = q^{16} \cdot q^4$ führt man am besten durch fortgesetztes Quadrieren aus.

Dann ist $T_1 \approx 1\,515$, $Z_1 = 2\,500$ und $A \approx 4\,015$. Die weiteren Tilgungsraten gewinnt man durch fortgesetztes Multiplizieren mit q: $T_2 \approx 1\,590.91$, $T_3 \approx 1\,670.45$, $\ldots$, $T_{20} \approx 3\,828.71$. Das ist die letzte Tilgungsrate. Insgesamt bezahlt der Schuldner $\approx 20 \times 4\,015.-$ Euro $= 80\,300.-$ Euro.

Lösung zu Aufgabe 4.3: $\inf(A) = 0 =$ kleinstes Element, $\sup(A) = 2 =$ größtes Element.
$B = \{x : 5 < x \leq 8\}$, $\inf(B) = 5$, $\sup(B) = 8 =$ größtes Element.
$C = \{x \mid 0 < x < 6\}$, $\inf(C) = 0$ ist nicht kleinstes Element, $\sup(C) = 6$ ist nicht größtes Element.

Lösung zu Aufgabe 4.4: $\{x \mid x < -6/5\} \cup \{x \mid x > 14\}$ und $\{x \mid 10/3 \leq x \leq 10\}$.

Lösung zu Aufgabe 4.5: $\{x \mid \frac{1}{2} \leq x \leq 2\}$.

Lösung zu Aufgabe 4.6: (1) $4a^2b^4$, $z\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y^2}$ und $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{y}}$.

(2) a) $4\sqrt[3]{2} - 6\sqrt[3]{10}$. b) $\sqrt{7} + \sqrt{6}$.

$$c) \quad \frac{2+\sqrt{6}}{2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{6} - 2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{\sqrt{3}(2-\sqrt{2}) + \sqrt{2}(2-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}.$$

(3) a) $\Delta = 581^2$, $x_1 = 51/8$ und $x_2 = 23/15$.
b) $x^2 - 24x + 128 = 0$, also $x_1 = 8$ und $x_2 = 16$.
c) $x^2 = 12a^2$, also $x = \pm 2a\sqrt{3}$.

Lösung zu Aufgabe 4.7: (1) a_n und b_n konvergieren nicht, c_n konvergiert gegen Null.

(2) a_n konvergiert gegen $\dfrac{37}{8}$, $b_n = n \cdot \dfrac{1-\frac{7}{n}}{5+\frac{5}{n}}$ konvergiert nicht.

Lösung zu Aufgabe 4.8: (1) ist trivial.
(2) $x_{n+1}^2 - 2 = \dfrac{1}{4}(x_n - \dfrac{2}{x_n})^2 \geq 0.$ (3) $x_n - x_{n+1} = \dfrac{1}{2x_n}(x_n^2 - 2) \geq 0.$
(4) x_n ist monoton fallend und ≥ 0, also konvergent gegen ein $x \geq 0$. Da auch x_{n+1} gegen x konvergiert, ist $x = \dfrac{1}{2}(x + \dfrac{2}{x})$, also $x^2 = 2$.

Lösung zu Aufgabe 4.9: Es soll $k = n+1-i$ sein, also $i = n+1-k$, $i(i+2) = (n+1-k)(n+3-k) = n^2 + k^2 + 3 + 2 \cdot (\ldots)$ (und damit $(-1)^{i(i+2)} = (-1)^{n+k+1}$). Läuft i von 1 bis n, so läuft k von n bis 1 Somit steht auf der rechten Seite der Ausdruck

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+k+1} a^k b^{n+2-k} .$$

Lösung zu Aufgabe 4.10:

$$\text{Es ist} \quad \sum_{i=1}^{n}(4i-3) = 4 \cdot \sum_{i=1}^{n} i - 3 \cdot \sum_{i=1}^{n} 1 = 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 3n = n(2n-1).$$

Lösung zu Aufgabe 4.11: Wie man die Formel findet, wird im Buch an anderer Stelle gezeigt. Hier geht es nur darum, die fertig vorgelegte Formel per Induktion zu beweisen.

Induktionsanfang ($n = 1$): Es ist $1^2 = 1$ und $\frac{1}{6}(1+1)(2+1) = 1$.

Induktionsschluss: Es ist

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i^2 &= \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2 \\
&= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \text{ (nach Ind.-vor.)} \\
&= \frac{1}{6}[n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)(n+1)] \\
&= \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + 7n + 6)
\end{aligned}$$

und

$$\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2(n+1)+1) = \frac{1}{6}(n+1)(2n^2+7n+6).$$

Lösung zu Aufgabe 4.12: Wir versehen die hintereinander liegenden Kugeln mit Nummern $1, \ldots, n$. Dass die Kugeln mit den Nummern $i_1, \ldots, i_k$ weiß sind, liefert die Auswahl einer k-elementigen Teilmenge von $\{1, \ldots, n\}$. Es gibt also $\dbinom{n}{k}$ Möglichkeiten.

Will man erst k weiße Kugeln und aus den verbliebenen $n-k$ Kugeln dann l rote aussuchen, so gibt es $\dbinom{n}{k} \cdot \dbinom{n-k}{l} = \dfrac{n!}{k!\, l!\, m!}$ Möglichkeiten.

Lösung zu Aufgabe 4.13 : Aus den 11 Buchstaben des Wortes „MISSISSIPPI“ sollen andere Wörter mit wieder 11 Buchstaben gebildet werden.

Es gibt 11! Möglichkeiten, aber davon sind einige gleich. Wenn ein Buchstabe k-mal vorkommt, dann ergibt sich $k!$-mal das gleiche Wort. Also gilt:

Anzahl $= \dfrac{11!}{4!\,4!\,2!\,1!} = 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 = 34650.$

Lösung zu Aufgabe 4.14 : Ein Spieler erhält eine 10-elementige Teilmenge von $\{1, 2, \ldots, 32\}$. Dafür gibt es $M := \binom{32}{10}$ Möglichkeiten. Berücksichtigt man alle 3 Spieler, so gibt es

$$N := \binom{32}{10} \cdot \binom{22}{10} \cdot \binom{12}{10} = \frac{32!}{2 \cdot 10!\,10!\,10!} \text{ Möglichkeiten.}$$

Der Inhalt des Skats liegt dann fest.

Die Spieler seien mit A, B und C bezeichnet, es geht um die Möglichkeiten, die A berücksichtigen muss. Die Verteilung der Karten liefert drei Teilmengen T_A, T_B und T_C von $\{1, 2, \ldots, 32\}$. Nachdem Spieler A sein Blatt kennt, muss er noch die Möglichkeiten für T_B und T_C berücksichtigen. Die Anzahl beträgt

$$\binom{22}{10} \cdot \binom{12}{10} = \frac{22!\,12!}{10!\,12!\,10!\,2!} = \frac{22!}{2 \cdot 10!\,10!} = 42.678.636.$$

Lösung zu Aufgabe 4.15 : a) Es ist

$$\begin{aligned} (n+1)!/(n-1)! = 30 \quad &\iff \quad n(n+1) = 30 \\ &\iff \quad n^2 + n - 30 = 0 \\ &\iff \quad n = \frac{-1 \pm \sqrt{1+120}}{2}. \end{aligned}$$

Da $n \in \mathbb{N}$ ist, kommt nur die Lösung $n = 5$ in Frage.

b) $\dfrac{(n-3)!}{(n-4)(n-3)} < 5000 \iff (n-5)! < 5000$. Hier ist eine Tabelle von Fakultäten:

$$3! = 6,\ 4! = 24,\ 5! = 120,\ 6! = 720,\ 7! = 5040,\ \ldots$$

Dieser Tabelle entnimmt man, dass $1 \le n - 5 \le 6$ sein muss, also $6 \le n \le 11$.

Lösung zu Aufgabe 4.16 : a) Man kann z.B. Induktion nach m führen:

Im Falle $m = 1$ ergibt die linke Seite den Wert $\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} = 1 + (n+1) = n+2$ und die rechte Seite den Wert $\binom{n+1+1}{1} = n+2$.

Ist die Formel für m bewiesen, so ist

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m+1} \binom{n+k}{k} &= \sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{k} + \binom{n+m+1}{m+1} \\ &= \binom{n+m+1}{m} + \binom{n+m+1}{m+1} \\ &= \binom{n+m+2}{m+1}. \end{aligned}$$

b) Es ist $\binom{n}{k} \Big/ \binom{n-1}{k-1} = \dfrac{n!(k-1)!(n-k)!}{k!(n-k)!(n-1)!} = \dfrac{n}{k}$.

Lösung zu Aufgabe 4.17: Es ist

$$\begin{aligned}\overline{x} \;=\; 2^n - x \;&=\; 2^n - \sum_{i=0}^{n-1} x_i 2^i \;=\; (2^n - 1) - \sum_{i=0}^{n-1} x_i 2^i + 1 \\ &=\; \sum_{i=0}^{n-1} 2^i - \sum_{i=0}^{n-1} x_i 2^i + 1 \;=\; \sum_{i=0}^{n-1} (1 - x_i) 2^i + 1 \;=\; 1 + \sum_{i=1}^{n-1} (1 - x_i) 2^i .\end{aligned}$$

Die Stelle x_0 bleibt gleich, alle anderen Stellen x_i wechseln.

Lösung zu Aufgabe 4.18: Es ist $16^0 = 1$, $16^1 = 16$, $16^2 = 256$ und $16^3 > 2500$, und

$$2003 = 256 \cdot 7 + 211 = 256 \cdot 7 + 16 \cdot 13 + 3.$$

Mit den Ziffern $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F$ ist dann $2003 = (7D3)_{16}$.

Für jede Hexadezimal-Stelle braucht man 4 Dualstellen. Es ist zum Beispiel $(15)_{10} = (F)_{16} = (1111)_2$, insbesondere ist $(7)_{16} = (0111)_2$. Lässt man die führende Null weg, so braucht man $3 + 4 + 4 = 11$ Stellen im Dualsystem.

Lösung zu Aufgabe 4.19: Es ist $B_n = (1 - i)^n \cdot B_0$, also

$$A = B_0 = \left(\frac{100}{100 - p}\right)^6 \cdot B_n = \left(\frac{10}{7}\right)^6 \cdot 3000 \approx 8.49986 \cdot 3000 = 25\,499.58.$$

Lösung zu Aufgabe 4.20: Es ist $\inf(M_1) = 0$ und $\sup(M_1) = 1$,
und auch $\inf(M_2) = 0$ und $\sup(M_2) = 1$. In beiden Fällen gehört Infimum und Supremum nicht zur Menge.

Es ist $M_3 = \{x \,:\, -2 < x^2 - 1 < 2\} = \{x \,:\, 0 \le x^2 < 3\} = \{x \,:\, 0 \le |x| < \sqrt{3}\} = (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$, also $\inf(M_3) = -\sqrt{3}$ und $\sup(M_3) = \sqrt{3}$. Auch hier gehört Infimum und Supremum nicht zur Menge.

Lösung zu Aufgabe 4.21: a) Es ist $x^2(x - 1) \ge 0 \iff (x = 0) \vee (x \ge 1)$.

b) Die Ungleichung $|x - 5| < |x + 1|$ bedeutet: x hat von 5 einen kleineren Abstand als von -1. Demnach muss $x > 2$ sein.

Lösung zu Aufgabe 4.22: Anschaulich bedeutet die Aussage der Aufgabe: Haben x und y beide von a einen Abstand $< r$, so gilt das auch für alle Punkte z zwischen x und y.

Beweis: Ist $a - r < x < a + r$, $a - r < y < a + r$ und $x \le z \le y$, so ist $a - r < x \le z$ und $z \le y < a + r$, also $a - r < z < a + r$.

Lösung zu Aufgabe 4.23: Die Folgeglieder a_n nehmen abwechselnd die Werte $+1$ und -1 an. Die positiven reellen Zahlen sind weit von -1 entfernt, die negativen Zahlen weit von $+1$.

Ist $x \ge 0$, so ist $|a_{2n+1} - x| = |-1 - x| = |x + 1| = x + 1 \ge 1 > \frac{1}{2}$, für alle n.

Ist $x < 0$, so ist $|a_{2n} - x| = |1 - x| = 1 - x > 1 > \frac{1}{2}$, für alle n.

Damit ist übrigens auch bewiesen, dass (a_n) keine konvergente Folge ist.

Lösung zu Aufgabe 4.24: Definitionsgemäß ist $F_1 = F_2 = 1$ und $F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$ (vgl. Aufgabe 3.14). Weil $\alpha - \beta = \sqrt{5}$ ist, folgt:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha - \beta) = 1 = F_1 \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^2 - \beta^2) = \alpha + \beta = 1 = F_2.$$

Es ist $x^2 = x + 1$ genau dann, wenn $x = \dfrac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$ ist. Also ist $\alpha^2 = \alpha + 1$ und $\beta^2 = \beta + 1$. Daraus folgt:

$$(*) \qquad \alpha^{n+1} = \alpha^n + \alpha^{n-1} \quad \text{und} \quad \beta^{n+1} = \beta^n + \beta^{n-1} \quad \text{für alle } n \geq 1.$$

Setzt man $w_n := \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$, so ist $w_1 = w_2 = 1$, und mit $(*)$ ergibt sich: $w_{n+1} = w_n + w_{n-1}$. Also ist $w_n = F_n$.

Lösung zu Aufgabe 4.25: a) Es ist $a_n = (3/5)^n + (2/5)^n$. Beide Summanden konvergieren gegen Null, also auch a_n.

b) Es ist $b_n = \dfrac{6n^2 + 2}{n^2} = 6 + \dfrac{2}{n^2}$, und das konvergiert gegen 6.

c) Trick: Erweitern!

$$c_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Also ist $0 < c_n < 1/(2\sqrt{n})$. Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben und $n > 1/(4\varepsilon^2)$, so ist $|c_n| < \varepsilon$. Also konvergiert c_n gegen Null.

d) Im Buch wird gezeigt, dass $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ ist, also $d_n = (n/(n+1))^2$, und dieser Ausdruck strebt gegen 1.

Lösung zu Aufgabe 4.26: Ist $x = 0.12373\underline{737}\ldots$, so ist $100x - x = 12.25$, also $x = 1225/9900 = 245/1980 = 49/396$.

Das gleiche Ergebnis erhält man durch die Rechnung

$$x = \frac{12}{100} + 37 \cdot \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{10^{2i}} = \frac{12}{100} + 37 \cdot \Big(\frac{100}{99} - \frac{101}{100}\Big) = \frac{1225}{9900}.$$

Lösung zu Aufgabe 4.27: x_0 ist obere Schranke von A, und $x_0 - 1/n$ ist keine obere Schranke mehr (weil x_0 die kleinste obere Schranke ist). Also gibt es ein $a_n \in A$ mit $x_0 - 1/n < a_n \leq x_0$. Dann ist $|a_n - x_0| < 1/n$ und (a_n) konvergiert gegen x_0.

Lösung zu Aufgabe 4.28: Wenn $a_n = a$ für fast alle n gilt, dann ist die Aussage trivial. Ist dagegen $a_n \neq a$ für unendlich viele n, so ist entweder $a_n < a$ oder $a_n > a$ für unendlich viele n. Man kann sich auf den ersten Fall beschränken, der andere wird analog behandelt. Und man kann dann o.B.d.A. annehmen, dass **alle** $a_n < a$ sind.

Weil die Folge (a_n) gegen a konvergiert, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass **alle** a_n mit $n \geq n(\varepsilon)$ im Intervall $(a - \varepsilon, a)$ liegen. Es soll nun induktiv eine monoton wachsende Teilfolge (x_i) von (a_n) konstruiert werden, so dass $a - 1/i < x_i < a$ für alle i gilt.

Induktionsanfang: Für x_1 kann man ein beliebiges Element $a_{n(1)} \in (a - 1, a)$ nehmen.

Induktionsschluss: Seien $x_1, \ldots, x_k$ schon konstruiert. Dann ist $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_k$, und es gibt eine Folge $n(1) < n(2) < \ldots < n(k)$ von natürlichen Zahlen, so dass $x_i = a_{n(i)}$ und $x_i \in (a-1/i, a)$ für $i = 1, 2, \ldots, k$ gilt.

Es gibt ein $n_0 > n(k)$, so dass $a - 1/(k+1) < a_j < a$ für alle $j \ge n_0$ gilt. Weil $x_k < a$ ist, kann man j so groß wählen, dass $a_j > x_k$ ist. Sei $n(k+1) := j$. Dann ist $n(k+1) > n(k)$, und für $x_{k+1} := a_j$ gilt:

$$x_{k+1} > x_k \quad \text{und} \quad a - \frac{1}{k+1} < a_{k+1} < a.$$

Damit ist (x_i) eine monoton wachsende Teilfolge von (a_n), die gegen a konvergiert.

Lösung zu Aufgabe 4.29: Es ist

$$a_n = \frac{n^2+n}{n(n+1)} - \frac{2n-1}{n(n+1)} = 1 - \frac{2n-1}{n(n+1)} \le 1.$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \Big[1 - \frac{2(n+1)-1}{(n+1)(n+2)}\Big] - \Big[1 - \frac{2n-1}{n(n+1)}\Big] \\ &= \frac{(2n-1)(n+2) - n(2n+1)}{n(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{2n^2+3n-2-2n^2-n}{n(n+1)(n+2)} = \frac{2(n-1)}{n(n+1)(n+2)} \ \ge\ 0. \end{aligned}$$

Diese Erkenntnisse helfen allerdings nicht bei der Bestimmung des Grenzwertes. Den bekommt man zum Beispiel mit Hilfe der „Grenzwertsätze“: Es ist

$$a_n = \frac{1-n+n^2}{n^2+n} = \frac{1/n^2 - 1/n + 1}{1+1/n},$$

und dieser Ausdruck strebt für $n \to \infty$ gegen 1.

Lösung zu Aufgabe 4.30: Aus der Voraussetzung folgt die Ungleichung $|a_{n+1}| \le q|a_n|$. Das sagt einem noch nicht viel, aber man kann die Aussage iterieren:

$$|a_2| \le q|a_1|, \quad |a_3| \le q^2|a_1|, \quad |a_4| \le q^3|a_1|, \quad \ldots$$

Mit einem simplen Induktionsbeweis folgt allgemein, dass $|a_n| \le q^{n-1}|a_1|$ ist. Weil $0 \le q < 1$ ist, strebt q^n (und damit auch q^{n-1}) gegen Null. Daraus folgt, dass a_n gegen Null konvergiert.

Sei $a_n := 2^n/n!$. Dann ist $a_{n+1}/a_n = \big(2^{n+1}n!\big)/\big(2^n(n+1)!\big) = 2/(n+1)$. Für $n > 3$ ist $(n+1)/2 > 2$, also $a_{n+1}/a_n < 1/2 =: q < 1$. Das zeigt, dass (a_n) gegen Null konvergiert.

5 Eins hängt vom andern ab

Lösungen zu den Aufgaben

Lösung zu Aufgabe 5.1: Bruder: nicht t, nicht r, nicht s. (Zur Transitivität: Wenn Hans Bruder von Karl ist, ist Karl auch Bruder von Hans, aber natürlich Hans nicht Bruder von Hans).

Mutter: nicht r, nicht s, nicht t.
Teiler: r und t, aber nicht s.
liebt: nicht s, nicht t, wahrscheinlich auch nicht r (psychologische Frage).
Nachbar: s, nicht r und nicht t.

Lösung zu Aufgabe 5.2: $3x^2 + 7x - 2$ Rest $-2x + 3$.

Lösung zu Aufgabe 5.3: (1) $D_f = \{|x| \le 2\}$, $D_g = \{|x| \le 1\}$ und $D_h = \{x < 0 \text{ oder } x \ge 1\}$.

(2) f ist streng monoton wachsend und daher überall injektiv.

(3) Ist $f(x) = f(y)$, so ist $3(x^2 - y^2) + 6(x - y) = 0$. Entweder ist dann $x = y$, oder es muss $3(x + y) + 6 = 0$ sein, also $x + y = -2$. Mit $x, y > -1$ ist letzteres nicht möglich.

(4) $D_f = \{x \mid x \neq -d/c\}$. Da $y = a/c$ nicht als Bild vorkommt, ist f nicht surjektiv. Ist $f(x_1) = f(x_2)$, so ist $(ad - bc) \cdot (x_2 - x_1) = 0$, also $x_1 = x_2$. Damit ist f injektiv.

Lösung zu Aufgabe 5.4: $D_{f\circ g} = \{x : |x| \le 1\}$, $D_{g\circ f} = \{x : 0 \le x \le 2/5\}$.

Lösung zu Aufgabe 5.5: (1) ist eine triviale Anwendung der Rechenregeln für Logarithmen.

(2) ergibt $\lg \dfrac{x}{\sqrt{x}} = \lg 4$, also $x = 16$.

Lösung zu Aufgabe 5.6: 1) reflexiv, transitiv, aber nicht symmetrisch.
2) nicht reflexiv, nicht smmetrisch, nicht transitiv.
3) reflexiv, symmetrisch, nicht transitiv.

Lösung zu Aufgabe 5.7: Sei $f(x) = ax + b$ mit $f(1) = 2$ und $f(3) = 5$. Dann ist $a + b = 2$ und $3a + b = 5$. Daraus ergibt sich:

$$f(x) = \frac{1}{2}(3x + 1).$$

Ist $f(3) = -1$ und $f(4) = -7$, so ergibt sich $f(x) = -6x + 17$.

Lösung zu Aufgabe 5.8: Die Bedingung $f(c - x) = f(c + x)$ liefert:

$$-2cx - 10(c - x) = 2cx - 10(c + x), \quad \text{also } (4c - 20)x = 0.$$

Da dies für alle x gelten soll, muss $c = 5$ sein. Tatsächlich ist $f(5 - x) = x^2 - 24 = f(5 + x)$.

Lösung zu Aufgabe 5.9: Die Methode der quadratischen Ergänzung liefert.

$$f(x) = a \cdot \left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}\,x + \frac{c}{a}\right) = a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

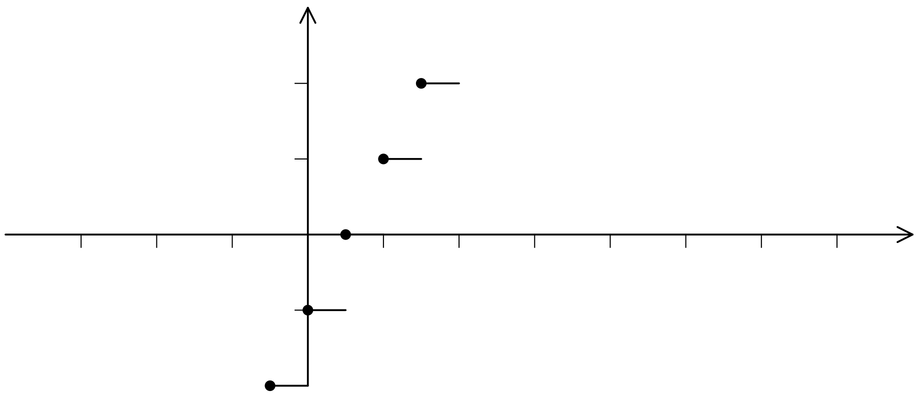
Dann ist $f(-b/(2a) + x) = f(-b/(2a) - x)$, also f symmetrisch zu $x = -b/(2a)$. Dort liegt auch der Scheitelpunkt. Der y-Wert ist dort $= -(b^2 - 4ac)/(4a)$.

Ist $a > 0$, so ist die Parabel nach oben geöffnet. Ist dann die Diskriminante $\Delta := b^2 - 4ac > 0$, so liegt der Scheitelpunkt unterhalb der x-Achse, und es gibt zwei Schnittpunkte mit der x-Achse. Ist $\Delta = 0$, so liegt der Scheitelpunkt genau auf der x-Achse. Ist $\Delta < 0$, so liegt er oberhalb der x-Achse und es gibt keinen Schnittpunkt.

Ist $a < 0$, so ist die Parabel nach unten geöffnet. Der Einfluss der Diskriminante bleibt gleich.

Gesucht ist nun eine Parabel mit $a < 0$, $-b/(2a) = 2$ und $\Delta > 0$. Setzt man z.B. $a = -1$, $b = 4$ und $c > -4$, so ist $\Delta = b^2 - 4ac = 16 + 4c > 0$ und alle Bedingungen sind erfüllt.

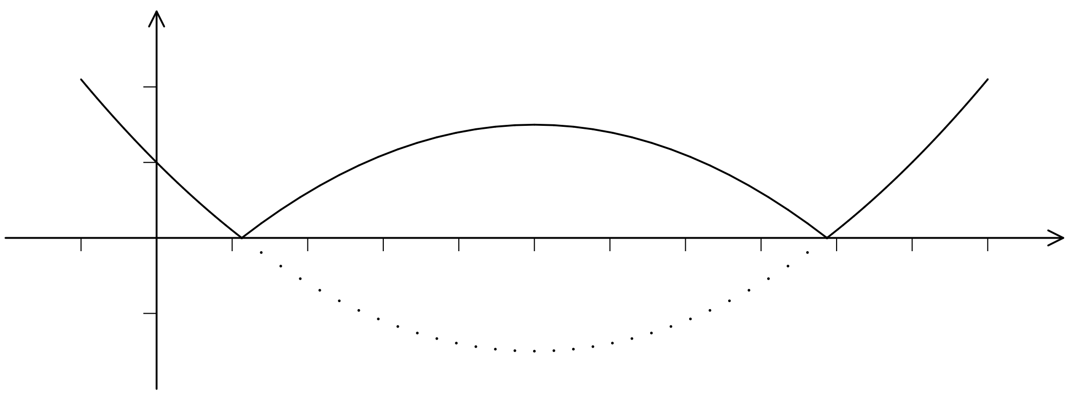
Lösung zu Aufgabe 5.10 : a) Ist $n \in \mathbb{Z}$ und $n \le x < n + 1/2$, so ist $2n - 1 \le 2x - 1 < 2n$, also $[2x - 1] = 2n - 1$. Ist $n + 1/2 \le x < n + 1$, so ist $[2x - 1] = 2n$. Das ergibt die folgende Skizze für $f(x)$:



b) Den zweiten Graphen gewinnt man folgendermaßen: Es ist

$$\frac{1}{10}x^2 - x + 1 = 0 \iff x = 5 \pm \sqrt{15} \approx \begin{cases} 8.873 \\ 1.127 \end{cases}$$

Die Parabel ist nach oben geöffnet, der Scheitelpunkt ist $(x, y) = (5, -1.5)$. Das ergibt die folgende Skizze für $g(x) = |f(x)|$:

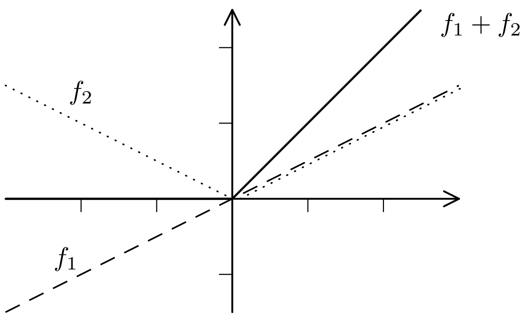


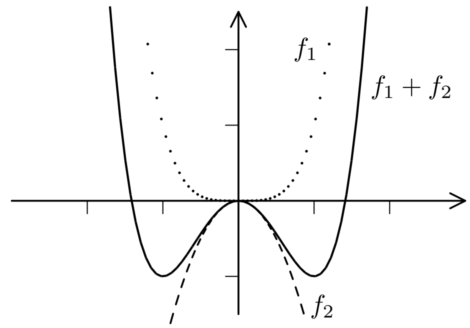
c) Sei $h_0(x) := 2x - 3$. Ist $x \ge 0$, so ist $h(x) = |h_0(x)|$. Ist $x < 0$, so ist $h(x) = h(-x)$. In beiden Fällen ist $h(x) = h(|x|) = \big| h_0(|x|) \big| = \big| 2|x| - 3 \big|$.

Lösung zu Aufgabe 5.11 : Es ist $f = f^+ - f^-$ und $|f| = f^+ + f^-$. Das kann man leicht nachprüfen.

Lösung zu Aufgabe 5.12 : Im ersten Fall ist $(f_1 + f_2)(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0, \\ x & \text{falls } x \ge 0. \end{cases}$

Im zweiten Fall ist $(f_1 + f_2)(x) = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2)$.





Lösung zu Aufgabe 5.13: 1) Ist $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, so ist $0 = f(x_0) = a_n x_0^n + \cdots + a_1 x_0 + a_0$. Man erinnere sich nun an die Formel

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \cdot \sum_{i=1}^{n} a^i b^{n-i}.$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) - f(x_0) \\ &= a_n(x^n - x_0^n) + \cdots + a_1(x - x_0) \\ &= (x - x_0) \cdot \left[a_n \sum_{i=1}^{n-1} x^i x_0^{n-1-i} + \cdots + a_1 \right]. \end{aligned}$$

In der eckigen Klammer steht ein Polynom der Gestalt $g(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0$ mit $b_{n-1} = a_n$, es hat offensichtlich den Grad $n-1$.

2) Man berechne formal $(x - x_0)g(x)$ und vergleiche die Koeffizienten mit denen von $f(x)$.

3a) Eine erste Nullstelle erhält man durch Probieren. Offensichtlich ist $x_1 = 1$ eine Nullstelle und daher $f(x) = (x-1) \cdot g(x)$. Man gewinnt $g(x)$ durch Polynomdivision.

$$(x^3 - \frac{5}{2}x^2 - x + \frac{5}{2}) : (x-1) = x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}.$$

Die noch fehlenden Nullstellen gewinnt man jetzt mit Hilfe der Lösungsformel für quadratische Gleichungen.

$$x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} = 0 \iff x = \frac{3/2 \pm \sqrt{(9/4) + 10}}{2} = \frac{3 \pm 7}{4}.$$

Also hat $f(x)$ noch die Nullstellen $x_2 = 5/2$ und $x_3 = -1$.

3b) Im Falle des Polynoms $f(x) = x^3 - 67x - 126$ ist $x = -2$ eine Nullstelle. Dann erhält man:

$$(x^3 - 67x - 126) : (x+2) = x^2 - 2x - 63.$$

Das quadratische Polynom auf der rechten Seite hat noch die Nullstellen $x_2 = 9$ und $x_3 = -7$.

Lösung zu Aufgabe 5.14: Die Beweise zu (a) sind ziemlich trivial. Exemplarisch sei hier nur der Beweis der zweiten Aussage vorgeführt:

$$\begin{aligned} y \in f(A \cap B) &\implies \exists\, x \in A \cap B \text{ mit } f(x) = y \\ &\implies \exists\, x \text{ mit } (x \in A) \wedge (x \in B) \wedge (f(x) = y) \\ &\implies y \in f(A) \ \wedge\ y \in f(B) \\ &\implies y \in f(A) \cap f(B). \end{aligned}$$

Die vorletzte Implikation kann nicht ohne weiteres umgekehrt werden. Deshalb gilt hier nur „$\subset$".

b) Sei zunächst $f(X \setminus A) = Y \setminus f(A)$ für alle $A \subset X$.

Injektivität: Ist $x_1 \neq x_2$, so ist $x_2 \in X \setminus \{x_1\}$, also $f(x_2) \in f(X \setminus \{x_1\}) = Y \setminus \{f(x_1)\}$. Damit ist auch $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Surjektivität: Ist $y \in Y$ vorgegeben, so wählen wir irgend ein $x \in X$. Ist $y = f(x)$, so sind wir fertig. Ist $y \neq f(x)$, so ist $y \in Y \setminus f(\{x\}) = f(X \setminus \{x\})$. Aber dann existiert ein $x' \neq x$ mit $f(x') = y$.

Nun sei umgekehrt f als bijektiv vorausgesetzt und $A \subset X$ nicht leer.

Ist $y \in f(X \setminus A)$, so gibt es ein $x \in X \setminus A$ mit $f(x) = y$. Weil f injektiv ist, ist $f(x') \neq y$ für $x' \in A$. Also ist $y \in Y \setminus f(A)$.

Ist andererseits $y \in Y \setminus f(A)$, so gibt es kein $x \in A$ mit $f(x) = y$. Aber weil f surjektiv ist, muss es ein $x_0 \in X$ mit $f(x_0) = y$ geben. Dann liegt x_0 in $X \setminus A$ und y in $f(X \setminus A)$.

Lösung zu Aufgabe 5.15: Sei $f(n) := 2n + 1$. Dann ist f nicht surjektiv. Außerdem sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$g(n) := \begin{cases} (n-1)/2 & \text{falls } n \geq 3 \text{ und ungerade,} \\ n & \text{sonst.} \end{cases}$$

g ist nicht injektiv, weil z.B. $g(3) = 1 = g(1)$ ist. Und schließlich ist $g \circ f(n) = g(2n+1) = n$.

Lösung zu Aufgabe 5.16: Sei $g \circ f$ bijektiv.

a) Ist $f(x_1) = f(x_2)$, so ist $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$, also

$$x_1 = (g \circ f)^{-1}(g \circ f(x_1)) = (g \circ f)^{-1}(g \circ f(x_2)) = x_2.$$

b) Sei $z \in C$. Dann gibt es ein $x \in A$ mit $g \circ f(x) = z$. Aber dann liegt $y := f(x)$ in B, und es ist $g(y) = z$.

Lösung zu Aufgabe 5.17: 1) f ist injektiv und surjektiv:

a) Ist $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$, so ist $x_1 = x_2$ und $x_1^2 - y_1 = x_2^2 - y_2$, also auch $y_1 = y_2$.

b) Sei $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ gegeben. Setzt man $x := v + 1$ und $y := (v+1)^2 - u$, so ist $f(x, y) = (u, v)$.

2) Der Ausdruck $(2x+3)/(1-x)$ ist für alle $x \neq 1$ erklärt, die Definitionslücke wird durch die Vorschrift $1 \mapsto -2$ gefüllt. Die Auflösung der Gleichung $g(x) = y$ führt einen zu der Funktion

$$x = k(y) = \begin{cases} (y-3)/(2+y) & \text{für } y \neq -2, \\ 1 & \text{für } y = -2 \end{cases}$$

Weil $g \circ k = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ und $k \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ ist, folgt, dass g bijektiv und $k = g^{-1}$ ist.

3) Ist $h(x_1, y_1) = h(x_2, y_2)$, so ist $x_1 - 1 = x_2 - 1$, also $x_1 = x_2$. Weil außerdem $x_1^2 - y_1 = x_2^2 - y_2$ ist, folgt auch $y_1 = y_2$. Also ist h injektiv.

Ist $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ gegeben, so setze man $x := v + 1$ und $y := (v+1)^2 - u$. Dann ist $h(x, y) = (u, v)$. Also ist h surjektiv.

Lösung zu Aufgabe 5.18: Es ist

$$g \circ f(x) = \begin{cases} (2x-3)^2 & \text{für } x \leq 0, \\ 14x - 1 & \text{für } x > 0, \end{cases}$$

und

$$f \circ g(x) = \begin{cases} 7x^2 & \text{für } x \leq -2, \\ 4x-5 & \text{für } -2 < x \leq 1/2, \\ 14x-7 & \text{für } x > 1/2. \end{cases}$$

Lösung zu Aufgabe 5.19: Hier ist $f((-\infty,2]) = \{2x-1 \,:\, x \leq 2\} = (-\infty,3]$ und $f((2,+\infty)) = \{x+1 \,:\, x > 2\} = (3,+\infty)$, also $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Damit ist f surjektiv.

Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2$. Man nehme an, dass $f(x_1) = f(x_2)$ ist. Liegen x_1, x_2 beide in $(-\infty,2]$ oder beide in $(2,+\infty)$, so müssen sie sogar gleich sein, weil die affin-linearen Funktionen $x \mapsto 2x-1$ und $x \mapsto x+1$ beide injektiv sind. Man kann also annehmen, dass $x_1 \leq 2$ und $x_2 > 2$ ist. Aber dann muss $f(x_1) = 2x_1 - 1 \leq 3$ und $f(x_2) = x_2 + 1 > 3$ sein. Das ist ein Widerspruch. Also ist f injektiv und damit sogar bijektiv.

Die Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} (y+1)/2 & \text{falls } y \leq 3, \\ y-1 & \text{falls } y > 3. \end{cases}$$

Wenn man diese Abbildung direkt angibt und die Gleichungen $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ und $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ beweist, dann kann man sich oben den Nachweis von Injektivität und Surjektivität sparen.

Lösung zu Aufgabe 5.20: Damit der Graph von f durch $(3,3)$ läuft, muss $m \cdot 3 - 3 = 3$ sein, also $m = 2$. Dann ist $f(2) = 2+1 = 3$ und $f(3) = 2 \cdot 3 - 3 = 3$. Also ist f nicht injektiv.

Lösung zu Aufgabe 5.21: Ist $1 \leq x \leq 3$, so ist $1 < 3/2 \leq f(x) \leq 5/2 < 3$, also $f([1,3]) \subset [1,3]$. Nun ist

$$f^2(x) = \frac{1}{2}\big(\frac{1}{2}\,x + 1\big) + 1 = \frac{1}{4}\,x + \frac{3}{2}$$

und

$$f^3(x) = \frac{1}{2}\big(\frac{1}{4}\,x + \frac{3}{2}\big) + 1 = \frac{1}{8}\,x + \frac{7}{4}\,.$$

Das legt folgende Vermutung nahe:

$$f^n(x) = \frac{1}{2^n}\,x + \frac{2^n - 1}{2^{n-1}}\,.$$

Man beweist diese Formel ganz einfach durch Induktion. Und offensichtlich konvergiert $f^n(x)$ unabhängig von x gegen 2.

Man kann auch folgendermaßen vorgehen: Weil $f(x) - f(y) = \frac{1}{2}(x-y)$ ist, bilden die Intervalle $[f^n(1), f^n(3)]$ eine Intervallschachtelung, die gegen eine Zahl c konvergiert. Ist x fest, so ist $f^{n+1}(x) = \frac{1}{2}f^n(x) + 1$. Weil $f^n(x)$ und $f^{n+1}(x)$ gegen den gleichen Grenzwert c konvergieren, muss $c/2 + 1 = c$ sein, also $c = 2$.

Lösung zu Aufgabe 5.22: a) Ist $x = 2t/(t^2+1)$ und $y = (t^2-1)/(t^2+1)$, so ist $x^2 + y^2 = (4t^2 + t^4 - 2t^2 + 1)/(t^2+1)^2 = 1$, also $F(\mathbb{R}) \subset B$.

b) Ist $x^2 + y^2 = 1$ und $(x,y) \neq (0,1)$, so setze man $t := x/(1-y)$. Dann kann man nachrechnen, dass $t^2+1 = 2/(1-y)$ und $t^2-1 = 2y/(1-y)$ ist, also $F(t) = (x,y)$. Damit ist $H(x,y) = x/(1-y)$ die Umkehrabbildung zu F.

Lösung zu Aufgabe 5.23: 1) Sei $z := \log_2(3)$. Dann ist $2^z = 3$ und $2^{3/2} = \sqrt{8} < \sqrt{9} = 3 = 2^z$, also $3/2 < z$.

Weiter ist $2 > \dfrac{6561}{4096} = \big(\dfrac{81}{64}\big)^2$, also $2^{1/4} > 9/8$, $2^{5/4} = 2 \cdot 2^{1/4} > 9/4$ und $2^{5/8} > 3/2$. Daraus folgt:

$$2^{11/16} > 2^{10/16} = 2^{5/8} > \frac{3}{2} \quad \text{und} \quad 2^{27/16} = 2 \cdot 2^{11/16} > 3 = 2^{\log_2(3)} = 2^z, \text{ also } \frac{3}{2} < z < \frac{27}{16}.$$

2) Es ist

$$\begin{aligned} \log_5\big(100^{\log_{10}(5)}\big) &= \log_5\big(10^{2\cdot\log_{10}(5)}\big) \\ &= \log_5(25) \;=\; 2 \cdot \log_5(5) \;=\; 2. \end{aligned}$$

3) Sei $A = B_0$ der Anschaffungspreis. Es ist $B_n = A \cdot (1-i)^n$, mit $i = p/100$. Dann folgt für eine beliebige Basis a:

$$\log_a(1-i) = \frac{1}{n}\big(\log_a B_n - \log_a A\big),$$

also

$$p = 100 \cdot \Big[1 - a^{(\log_a B_n - \log_a A)/n}\Big].$$

In dem angegebenen Zahlenbeispiel (Aufgabe 4.19) war $n = 6$, und der Restwert betrug 3000 Euro. Als Anschaffungspreis wurde ein Wert von 25 500 Euro berechnet. Also ist $A = 25\,500$, $n = 6$ und $B_n = 3000$, und daher $\log_{10}(B_n) \approx 3.47712$, $\log_{10}(A) \approx 4.40654$,

$$p \approx 100 \cdot \Big[1 - 10^{-0.92942/6}\Big] \approx 100 \cdot (1 - 0.7) = 30.$$

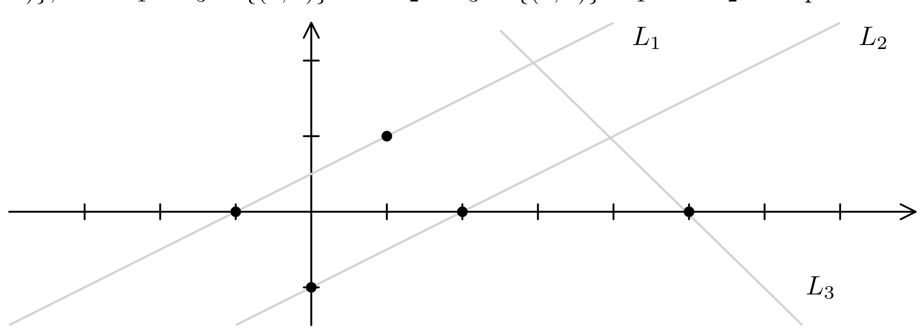
Der Prozentsatz beträgt etwa 30%, so wie es sein soll.

6 Die Parallelität der Ereignisse

Lösungen zu den Aufgaben

Lösung zu Aufgabe 6.1: Ist $b = 0$ und $L = \{x = r/a\}$, so ist $L' := \{x = x_0\}$ die Parallele zu L durch P_0. Ist $b \neq 0$, so ist $L' := \{ax + by = ax_0 + by_0\}$ die gesuchte Parallele.

Lösung zu Aufgabe 6.2: Es ist $L_1 = \{y = \frac{1}{2}(x+1)\}$, $L_2 = \{y = \frac{1}{2}(x-2)\}$ und $L_3 = \{y = -(x-5)\}$, also $L_1 \cap L_3 = \{(3,2)\}$ und $L_2 \cap L_3 = \{(4,1)\}$. L_1 und L_2 sind parallel.



Lösung zu Aufgabe 6.3: a) Wähle Koordinatensystem so, dass $A = (0,0)$, $B = (1,0)$ und $C = (0,1)$. Dann ist $R = (1/2, 0)$ Mittelpunkt von AB und $Q = (0, 1/2)$ Mittelpunkt von AC. Die Gerade BC ist gegeben durch $y = 1 - x$. Außerdem ist $\pi(x,y) := y$ ein Lineal für BC

mit $\pi(B) = 0$ und $\pi(C) = 1$. Also ist $P := \pi^{-1}(1/2) = (1/2, 1/2)$ Mittelpunkt von BC. Die Seitenhalbierenden CR, AP und BQ sind gegeben durch die Gleichungen

$$2x + y - 1 = 0, \quad y - x = 0 \text{ und } x + 2y - 1 = 0\,.$$

Gemeinsame Lösung ist der Punkt $M = (1/3, 1/3)$. Wählt man $\widetilde{\pi}(x, y) := 2x$ als Lineal für CR, so ist $\widetilde{\pi}(C) = 0$ und $\widetilde{\pi}(R) = 1$, sowie $\widetilde{\pi}(M) = 2/3$. Deshalb ist $CM : MR = (0-2/3)/(2/3-1) = 2 : 1$. Bei den beiden anderen Seitenhalbierenden geht es genauso.

b) $P_1P_2 || P_3P$ und $P_1P_3 || P_2P$ (berechne die Steigungen, die sind gleich).

c) Ist (x_3, y_3) die 4. Ecke des Parallelogramms mit den Ecken $(0, 0)$, (x_1, y_1), ..., (x_2, y_2), so ist $x_3 = x_2 + x_1$ und $y_3 = y_2 + y_1$.

Lösung zu Aufgabe 6.4: Sei $b := f(0)$ und $a := f(1) - f(0)$. Nach Voraussetzung ist $f(1) \neq f(0)$, also $a \neq 0$. Ist $t \in \mathbb{R}$ beliebig, so setze man $p := t$, $q := 0$, $r := 1$ und $s := 0$. Dann ist

$$t = \frac{p-q}{r-s} = \frac{f(p) - f(q)}{f(r) - f(s)} = \frac{f(t) - f(0)}{f(1) - f(0)} = \frac{f(t) - b}{a}\,,$$

also $f(t) = at + b$.

Lösung zu Aufgabe 6.5: Es gibt Zahlen a_1, a_2, b_1, b_2, so dass $a_1 \neq 0$ und $a_2 \neq 0$ ist, sowie

$$\begin{aligned} \mu_1 \circ f \circ \lambda_2^{-1}(t) \;=\; \lambda_1 \circ \lambda_2^{-1}(t) \quad &= \quad a_1t + b_1 \\ \text{und} \quad \mu_2 \circ \mu_1^{-1}(t) \quad &= \quad a_2t + b_2. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \mu_2 \circ f \circ \lambda_2^{-1}(t) &= \mu_2 \circ \mu_1^{-1}(\mu_1 \circ f \circ \lambda_2^{-1}(t)) \\ &= a_2(a_1t + b_1) + b_2 \\ &= (a_1a_2)t + (a_2b_1 + b_2). \end{aligned}$$

Natürlich ist auch $a_1a_2 \neq 0$.

Lösung zu Aufgabe 6.6: 1) Sei $X \in L$ und $x := \lambda(X)$. Genau dann liegt X in $\overrightarrow{PQ}$, wenn P nicht zwischen X und Q liegt. Das ist genau dann der Fall, wenn 0 nicht zwischen x und 1 liegt, wenn also $-x = (x - 0)/(0 - 1) \leq 0$ ist.

2) Es gibt Zahlen a, b mit $a \neq 0$, so dass $\lambda \circ \mu^{-1}(t) = at + b$ ist. Dann ist $b = \lambda \circ \mu^{-1}(0) = \lambda(P) = 0$.

Lösung zu Aufgabe 6.7: Die Gleichung lässt sich nach y auflösen, $y = -(4/5)x - (6/5)$. Also ist $m := -4/5$ die Steigung der Geraden. Sie schneidet die y-Achse in $(0, -6/5)$ und die x-Achse in $(-3/2, 0)$.

Lösung zu Aufgabe 6.8: (I) Addition der beiden Gleichungen ergibt

$$3x = 42, \text{ also } x = 14 \text{ und dann } 21 + 2y/3 = 27, \text{ also } y = 9.$$

(II) Hier muss man vorsichtiger sein. Die Gleichungen sind für $x = 1$ und $y = -6$ nicht definiert. Unter Beachtung dieser Ausnahmeregeln kann man z.B.

$$u := 1/(x-1) \quad \text{ und } \quad v := 1/(y+6)$$

setzen und das Gleichungssystem

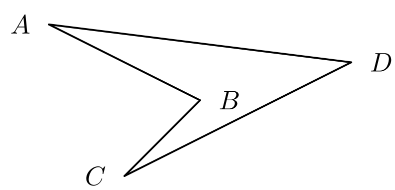
$$7u + 4v = 8 \quad \text{und} \quad 4u + 7v = 23/4$$

lösen, durch $u = 1$ und $v = 1/4$. Dann ist $x = 2$ und $y = -2$. Die Probe zeigt, dass das tatsächlich die Lösung ist.

Lösung zu Aufgabe 6.9: a) Seien K_1 und K_2 zwei konvexe Mengen. Sind X und Y Punkte aus $K_1 \cap K_2$, so liegt ihre Verbindungsstrecke in K_1 uznd in K_2, also auch in $K_1 \cap K_2$.

b) Jede Halbebene ist konvex, also auch das Innere eines Winkels (als Durchschnitt zweier Halbebenen). Das Innere eines Dreiecks ist der Durchschnitt der Mengen der inneren Punkte der drei Winkel des Dreiecks.

Liegen die Punkte B und D auf **einer** Seite der Geraden AC (und keine drei von ihnen auf einer Geraden), so ist $ABCD$ ein nicht-konvexes Viereck.



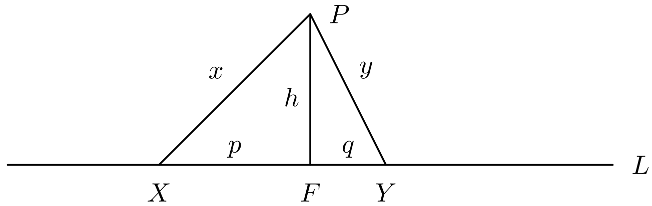
Lösung zu Aufgabe 6.10: Sei $ABCD$ das Parallelogramm. Man kann Koordinaten einführen, so dass $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (1,1)$ und $D = (0,1)$ ist. Die Diagonale durch A und C wird durch $y = x$ gegeben, die Diagonale durch B und D durch die Gleichung $y = 1 - x$. Der Schnittpunkt ist $S = (1/2, 1/2)$. Auf der ersten Diagonalen haben die Punkte A, S und C die Koordinaten $a = 0$, $s = 1/2$ und $c = 1$. Also ist $AS : SC = (0 - 1/2)/(1/2 - 1) = 1$. Bei der anderen Diagonalen geht's analog.

Lösung zu Aufgabe 6.11: Ist der Winkel $\angle AOB$ gegeben, so führe man ein Koordinatensystem mit $O = (0,0)$, $A = (1,0)$ und $B = (0,1)$ ein. Dann ist $X = (x_0, y_0)$ mit $x_0 > 0$ und $y_0 > 0$. Ist $L = \{x = c\}$ eine vertikale Gerade, so schneidet L den Strahl $\overrightarrow{OA}$ im Punkt $(c, 0)$. Ist $L = \{y = mx + b\}$ schräg, so schneidet L die Gerade durch O und B in $(0, b)$. Ist $b \geq 0$, so ist man fertig. Ist $b < 0$, so ist $m = (y_0 - b)/x_0 > 0$, und L schneidet den Strahl $\overrightarrow{OA}$ im Punkt $(-b/m, 0)$.

Lösung zu Aufgabe 6.12: Sei ABC das Dreieck und X der Punkt im Innern des Dreiecks. Nach Einführung geeigneter Koordinaten ist $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (0,1)$ und $X = (x_0, y_0)$, mit $x_0 > 0$, $y_0 > 0$ und $x_0 + y_0 < 1$.

Sei nun L die Gerade durch A und X. Dann ist $L = \{y = mx\}$, mit $m = y_0/x_0 > 0$. Man setze $(u_0, v_0) := (1/(m+1), m/(m+1))$. Dann ist $u_0 > 0$, $v_0 > 0$ und $u_0 + v_0 = 1$. Also liegt (u_0, v_0) auf L und auf der Seite BC.

Lösung zu Aufgabe 6.13: 1) Sei h die Länge des Lotes von P auf L, $p := d(F, X)$, $q := d(F, Y)$, $x := d(X, P)$ und $y := d(Y, P)$.



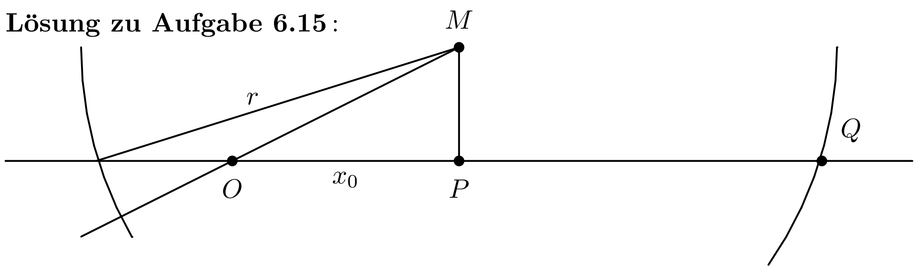
Es ist $p^2 + h^2 = x^2$ und $q^2 + h^2 = y^2$, also $p^2 = x^2 - h^2$ und $q^2 = y^2 - h^2$. Damit ist

$$\begin{aligned} x > y \quad &\iff \quad x^2 > y^2 \iff x^2 - h^2 > y^2 - h^2 \\ &\iff \quad p^2 > q^2 \iff p > q. \end{aligned}$$

2) Sei X der Schnittpunkt von L und M. Außerdem sei P ein Punkt auf M und F der Fußpunkt des Lotes von P auf L, $x = d(X, F)$, $y = d(X, P)$ und $h = d(F, P)$. Dann ist $x^2 + h^2 = y^2$. Der Skalenfaktor m der orthogonalen Projektion ist die Zahl $m = (x - 0)/(y - 0)$. Offensichtlich ist $0 < m^2 < x^2/y^2 = x^2/(x^2 + h^2) \leq 1$, also $0 < |m| \leq 1$.

Lösung zu Aufgabe 6.14: Sei a die Dreiecksseite, die A gegenüberliegt, und b die Dreiecksseite, die B gegenüberliegt. Dann ist $a^2 + b^2 = (p + q)^2 = p^2 + q^2 + 2pq = (b^2 - h^2) + (a^2 - h^2) + 2pq$, also $h^2 = pq$.

Lösung zu Aufgabe 6.15:



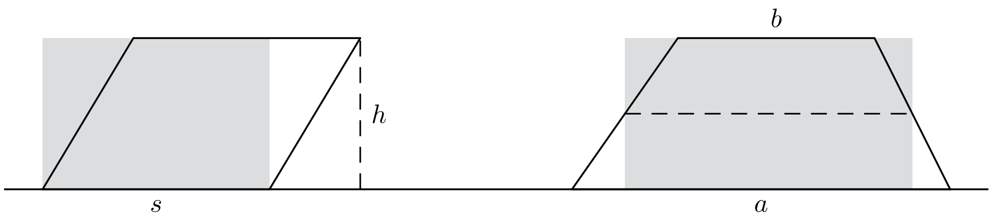
Es ist $x_0^2 + y_0^2 < r^2$, also $t := \sqrt{r^2 - y_0^2}$ eine positive reelle Zahl. Damit liegt $Q := (x_0 + t, 0)$ auf $\overrightarrow{OP}$. Außerdem ist $d(Q, M)^2 = t^2 + y_0^2 = r^2$, also $Q \in K_r(M)$.

Lösung zu Aufgabe 6.16: Wir können ein Koordinatensystem einführen, so dass $P = (-a, 0)$ und $Q = (a, 0)$ ist, mit $a > 0$. Die Mittelsenkrechte zu P und Q ist dann die y-Achse $\{(x, y) : x = 0\}$. Sei $X = (x_0, y_0)$ ein beliebiger Punkt. Dann gilt:

$$\begin{aligned} d(X, P) = d(X, Q) \quad &\iff \quad (x_0 - a)^2 + y_0^2 = (x_0 + a)^2 + y_0^2 \\ &\iff \quad a \cdot x_0 = 0 \iff x_0 = 0. \end{aligned}$$

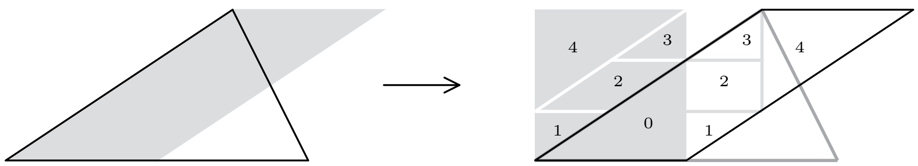
Lösung zu Aufgabe 6.17: Man kann das Polygongebiet in Dreiecksgebiete zerlegen. Ist G ein solches Dreiecksgebiet mit Grundlinie c und Höhe h, so ist $f(G)$ wieder ein Dreiecksgebiet, mit einer Grundlinie der Länge kc und einer Höhe der Länge kh. Dann ist $\mu(f(G)) = \frac{1}{2}(kc)(kh) = k^2 \cdot \frac{1}{2}ch = k^2\mu(G)$.

Lösung zu Aufgabe 6.18: Sei $ABCD$ das Parallelogramm bzw. Trapez. Man kann die Koordinaten so wählen, dass AB auf der x-Achse liegt.

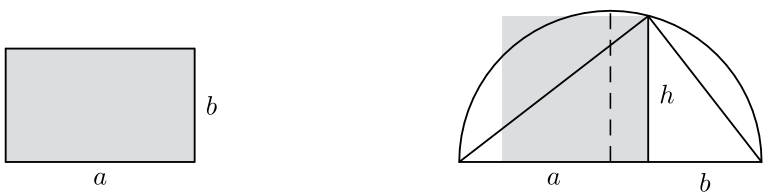


Offensichtlich beträgt dann die Fläche des Parallelogramms $s \cdot h$, und die des Trapezes $h \cdot (a+b)/2$.

Lösung zu Aufgabe 6.19 : 1) Man verwandle das Dreieck zunächst in ein Parallelogramm. Der zweite Schritt ist dann auf Grund der vorigen Aufgabe klar.



2) Man benutze den Halbkreis (mit Radius $(a+b)/2$) über einer Strecke der Länge $a+b$.



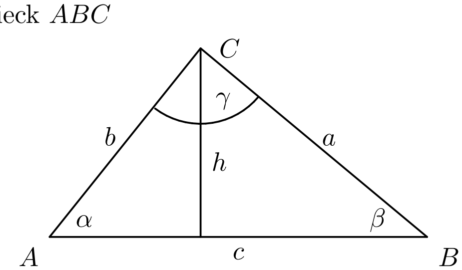
Wie schon früher gezeigt, ist $h^2 = a \cdot b$.

7 Allerlei Winkelzüge

Lösungen zu den Aufgaben

Lösung zu Aufgabe 7.1 : (1) $\sin(3x) = 3\sin(x)\cos^2(x) - \sin^3(x)$.

(2) Die Höhe h von C auf c teilt das Dreieck ABC in zwei rechtwinklige Dreiecke.

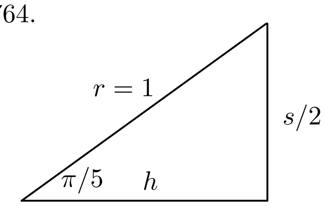


So bekommt man die Gleichung $a\sin\beta = h = b\sin\alpha$, und analog (mit der Höhe von B auf b) die Gleichung $c\sin\alpha = a\sin\gamma$, und (mit der Höhe von A auf a) auch $c\sin\beta = b\sin\gamma$. Dann ist

$$a = c \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)} = c \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\pi - (\alpha+\beta))} = c \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)} \quad \text{und} \quad b = c \cdot \frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Das Ganze funktioniert auch mit stumpfwinkligen Dreiecken.

(3) Sei s die Seite und $\alpha = \frac{2\pi}{5}$ der darüberliegende Zentrumswinkel. Dann ist $s = 2 \cdot \sin(\frac{\pi}{5})$, $h = \cos(\frac{\pi}{5})$ die Länge des Lotes vom Zentrum auf die Seite und $F = 5 \cdot h \cdot \frac{s}{2}$ die gesuchte Fläche. Also ist $F = 5 \cdot \sin(\frac{\pi}{5}) \cos(\frac{\pi}{5}) \approx 2.37764$.



(4) Sei α der Steigungswinkel. Es ist $\tan \alpha = 1/\sqrt{3}$, also $\alpha = 30°$.

(5) $b = \sqrt{a^2 - e^2} = 7$. Der gesuchte Punkt ist $X = (e, y)$, mit $y = b^2/a$.

Lösung zu Aufgabe 7.2: Sei $(a, b) \neq (1, 0)$ und $R(x, y) = (ax - by, ay + bx)$. Es ist $R(x, y) = (x, y) \iff y = \big((a-1)/b\big)x$ und $x = -\big((a-1)/b\big)y$.

Aus diesen Gleichungen folgt: $b^2 y = -(1-a)^2 y$, also $(1-a)y = 0$ und daher $y = 0$ und $x = 0$.

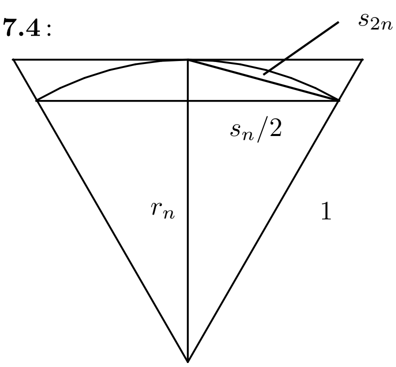
Lösung zu Aufgabe 7.3: Sei f eine beliebige Bewegung. Man wähle nicht-kollineare Punkte A, B, C und dazu eine spezielle Bewegung g, die sich aus Translationen, Drehungen und Spiegelungen zusammensetzt, so dass gilt:

$$g(f(A)) = (0, 0), \quad g(f(B)) = (r, 0) \text{ mit } r > 0 \text{ und } g(f(C)) \in H^+.$$

Genauso gibt es eine spezielle Bewegung h mit $h(A) = (0, 0)$, $h(B) = (r', 0)$ (mit $r' > 0$) und $h(C) \in H^+$.

Weil f, g, h Bewegungen sind, ist $r' = d\big(h(A), h(B)\big) = d(A, B) = d\big(g \circ f(A), g \circ f(B)\big) = r$. Wegen der Eindeutigkeitsaussage im Hauptsatz über Bewegungen ist dann $g \circ f = h$ und $f = g^{-1} \circ h$.

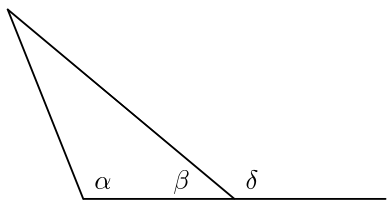
Lösung zu Aufgabe 7.4:



Es ist $(s_{2n})^2 = (s_n/2)^2 + (1 - r_n)^2$ und $(s_n/2)^2 + r_n^2 = 1$. Aus der zweiten Gleichung folgt $2r_n = \sqrt{4 - s_n^2}$. Setzt man dies in die erste Gleichung ein, so erhält man

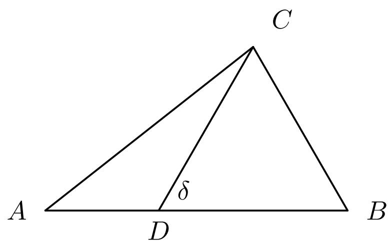
$$(s_{2n})^2 = 2 - \sqrt{4 - (s_n)^2}.$$

Lösung zu Aufgabe 7.5 : a)



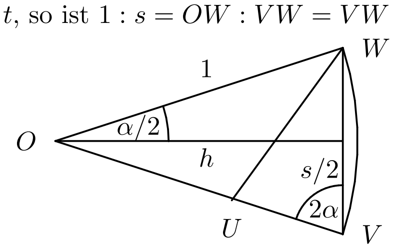
Da $\delta > \alpha$ ist, ist $2R = \delta + \beta > \alpha + \beta$.

b) Sei $AB > BC$. Wähle D auf AB mit $DB = BC$.



Die Winkel im Dreieck seien wie üblich mit α, β und γ bezeichnet. Nach dem Außenwinkelsatz ist $\delta > \alpha$. Weil $\angle DCB = \angle CDB = \delta$ ist, ist $\gamma > \angle DCB = \delta > \alpha$.

Lösung zu Aufgabe 7.6 : Das 10-Eck setzt sich aus 10 kongruenten Dreiecken zusammen, deren eine Ecke O ist und deren andere Ecken auf dem Einheitskreis liegen. Der Basiswinkel des gleichschenkligen Dreiecks VWO beträgt $2\alpha = (180 - 36)/2 = 90 - 18 = 72$. Die Winkelhalbierende des Winkels $\angle OWV$ trifft OV in einem Punkt U und zuvor die Höhe h des Dreiecks VWO (von O nach VW) in einem Punkt X. Das Dreieck UVW enthält die Winkel α, 2α und $180 - 3\alpha = 180 - 108 = 72 = 2\alpha$, ist also ähnlich zu dem Dreieck VWO. Bezeichnen wir VW mit s und VU mit t, so ist $1 : s = OW : VW = VW : VU = s : t$, also $s^2 = t$.



Das Dreieck WOU besitzt gleiche Basiswinkel ($= \alpha$), ist also gleichschenklig. Damit ist $OU = WU = WV = s$ und $UV = 1 - s$, was die Gleichung $1 - s = s^2$ liefert, also $s = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

Nun erhält man $h = \sqrt{1 - s^2/4} = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$.

Weil $\alpha/2 = 18°$ ist, ist

$$\sin(18°) = \frac{s/2}{1} = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1) \quad \text{und} \quad \cos(18°) = \frac{h}{1} = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

Lösung zu Aufgabe 7.7 : Man leitet leicht die folgenden Formeln her:

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + \tan^2\alpha} \quad \text{und} \quad \sin^2\alpha = \frac{\tan^2\alpha}{1 + \tan^2\alpha}\,.$$

Setzt man dies in die Formeln $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$ und $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ ein, so erhält man

$$\sin(2\alpha) = 2\frac{\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} \quad \text{und} \quad \cos(2\alpha) = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}\,,$$

also

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \quad \text{und} \quad \cot(2\alpha) = \frac{1}{\tan(2\alpha)} = \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}\,.$$

Lösung zu Aufgabe 7.8: Die Höhe h von C auf c zerschneidet c in die Abschnitte p und q. Dann ist

$$p^2 + h^2 = b^2 \quad \text{und} \quad q^2 + h^2 = a^2.$$

Zusammen ergibt das

$$a^2 = q^2 + (b^2 - p^2) = b^2 + (p+q)^2 - 2p^2 - 2pq = b^2 + c^2 - 2pc.$$

Weil $p/b = \cos\alpha$ ist, folgt $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

Weil $h/b = \sin\alpha$ und $h/a = \sin\beta$ ist, ist $b\sin\alpha = a\sin\beta$, also

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}\,.$$

Vertauscht man die Rollen der Seiten, so erhält man weitere Formeln.

Lösung zu Aufgabe 7.9: Wir können annehmen, dass der Schnittpunkt der Nullpunkt ist, sowie $0 < m_1 < m_2 < +\infty$. Dann geht die erste Gerade durch $(0,0)$ und $(1,m_1)$, die zweite durch $(0,0)$ und $(1,m_2)$. Die Neigung der Geraden gegen die x-Achse sei durch Winkel α und β beschrieben, mit $m_1 = \tan(\alpha)$ und $m_2 = \tan(\beta)$. Der Schnittwinkel ist $\varphi := \beta - \alpha$.

Allgemein ist

$$\begin{aligned}
\tan(u+v) &= \frac{\sin(u+v)}{\cos(u+v)} = \frac{\sin u\cos v + \cos u\sin v}{\cos u\cos v - \sin u\sin v} \\
&= \frac{(\sin u\cos v + \cos u\sin v)/(\cos u\cos v)}{(\cos u\cos v - \sin u\sin v)/(\cos u\cos v)} \\
&= \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u\tan v}\,.
\end{aligned}$$

Damit ist $\tan\varphi = \dfrac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\,.$

Bei den Geraden $3x - 2y + 5 = 0$ und $2x + 7y + 8 = 0$ sind die Steigungen $m_1 = 3/2$ und $m_2 = -2/7 =$. Für den Schnittwinkel φ gilt dann

$$\tan\varphi = \frac{-2/7\ -\ 3/2}{1 + (3/2)(-2/7)} = \frac{-25/14}{8/14} = -\frac{25}{8} \approx -3.125\ldots,$$

also $\varphi \approx |\arctan(-3.125)| \approx 72.2553°$.

Lösung zu Aufgabe 7.10: Es ist

$$\begin{aligned}
\sin(3x) &= \sin(2x + x) \ = \ \sin(2x)\cos x + \cos(2x)\sin x \\
&= 2\sin x\cos^2 x + (\cos^2 x - \sin^2 x)\sin x \\
&= 2\sin x(1 - \sin^2 x) + \sin x - 2\sin^2 x\sin x \\
&= 3\sin x - 4\sin^3 x.
\end{aligned}$$

Die Gleichung $\sin(3x) - 2\sin(x) = 0$ wird damit zu der Gleichung $\sin x - 4\sin^3 x = 0$. Also ist entweder $\sin x = 0$ oder $\sin x = \pm 1/2$. Das bedeutet:

$$x = 0^\circ, = 180^\circ \text{ oder } = 360^\circ,$$

oder

$$x = 30^\circ, = 150^\circ, = 210^\circ \text{ oder } = 330^\circ.$$

Nun zur zweiten Aufgabe! Es ist

$$\begin{aligned}
3\cos^2 x = \sin^2(2x) \quad &\iff \quad 3\cos^2 x = 4\sin^2 x \cos^2 x \\
&\iff \quad \cos^2 x\Big(3 - 4\sin^2 x\Big) = 0 \\
&\iff \quad \cos x = 0 \quad \text{oder} \quad \sin x = \pm\sqrt{3}/2 \\
&\iff \quad x = 90^\circ, = 270^\circ \\
& \quad \text{oder } = 60^\circ, = 120^\circ, = 240^\circ, = 300^\circ.
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 7.11: a) Sei $u := (\alpha + \beta)/2$ und $v := (\alpha - \beta)/2$. Dann ist $\alpha = u + v$ und $\beta = u - v$, also

$$\begin{aligned}
\sin\alpha + \sin\beta &= \sin(u+v) + \sin(u-v) \;=\; 2\sin u \cos v \\
&= 2\sin\Big(\frac{\alpha+\beta}{2}\Big)\cos\Big(\frac{\alpha-\beta}{2}\Big).
\end{aligned}$$

b) Ist $0 = \sin(2x+1) + \sin(3x-2) = 2\sin\Big((5x-1)/2\Big)\cos\Big((-x+3)/2\Big)$, so ist

a) $(5x-1)/2 = k\pi$, also $x = (1 + 2\pi k)/5$

oder b) $(-x+3)/2 = \pi/2 + k\pi$, also $x = 3 - (2k+1)\pi$.

Lösung zu Aufgabe 7.12: Sei $0 = 2\sin x - \tan x = 0$. Dann ist $2\sin x \cos x - \sin x = 0$ und $\cos x \neq 0$. Es folgt:

a) $\sin x = 0$, also $x = 0,\ \pi,\ 2\pi$,

oder b) $2\cos x - 1 = 0$, also $\cos x = 1/2$ und $x = \pi/3,\ 5\pi/3$.

Lösung zu Aufgabe 7.13: Man erhält die Geradengleichung $y = x/\sqrt{3} - 5\sqrt{3}$, also die Steigung $m = 1/\sqrt{3}$ und den Steigungswinkel $\alpha = 30^\circ$. Die Aufgabe 7.1 (Teil 4) ergab das gleiche Ergebnis, allerdings lautete die Geradengleichung dort $y = x/\sqrt{3} + 2$ (gleiche Steigung, aber anderer Achsenabschnitt).

Lösung zu Aufgabe 7.14: Es ist $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$, also

$$\begin{aligned}
1 \;=\; \cos(2\alpha + 2\beta - \pi) &= -\cos(2(\alpha+\beta)) \;=\; -\cos^2(\alpha+\beta) + \sin^2(\alpha+\beta) \\
&= 1 - 2\cos^2(\alpha+\beta).
\end{aligned}$$

Damit ist $\cos(\alpha+\beta) = 0$, also $\alpha + \beta = \pi/2$ oder $= 3\pi/2$. Im Dreieck kommt nur der erste Fall in Frage, damit ist $\gamma = \pi/2$.

Lösung zu Aufgabe 7.15: Sei $e := AB_1$ und $f := BA_1$, sowie

$$\alpha := \angle BAA_1,\ \alpha_1 := \angle BAB_1,\ \beta := \angle ABB_1 \quad \text{und} \quad \beta_1 := \angle ABA_1.$$

Da stets $\sin(180° - \varrho) = \sin\varrho$ ist, folgt im Dreieck ABB_1 aus dem Sinussatz die Gleichung

$$\frac{e}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin(\alpha_1+\beta)}$$

und im Dreieck ABA_1 die Gleichung

$$\frac{d}{\sin\beta_1} = \frac{a}{\sin(\alpha+\beta_1)}\,.$$

Der Cosinussatz liefert schließlich im Dreieck AB_1A_1 die Beziehung

$$c^2 = e^2 + d^2 - 2ed\cos(\alpha - \alpha_1).$$

Mit den obigen Gleichungen für e und d erhält man nun c aus a und den gegebenen Winkeln.

Lösung zu Aufgabe 7.16: Sei $x_0 = r\cos\alpha$ und $y_0 = r\sin\alpha$. Die Steigung der Geraden $L' = \{y = m'x\}$ durch $(0,0)$ und (x_0, y_0) ist die Zahl $m' = \tan\alpha = y_0/x_0$. Die Gerade L, die in (x_0, y_0) auf L' senkrecht steht, hat die Gestalt $L = \{y = m(x - x_0) + y_0\}$ mit $m = -1/m' = -x_0/y_0$.

Ist $(x, y) \in L$, $(x, y) \neq (x_0, y_0)$, so bilden die Punkte $O = (0,0)$, $X_0 := (x_0, y_0)$ und $X = (x, y)$ ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse OX. Daher ist $d(O,X)$ länger als $d(O,X_0) = r$ und damit X kein Punkt von K.

Lösung zu Aufgabe 7.17: Die Ellipse ist gegeben durch $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, hat also Mittelpunkt $(0,0)$ und die Halbachsen $a = 5$ und $b = 3$.

Liegt (x, y) auf der Geraden, so ist $3x = 3 - 5y$. Setzt man das in die Ellipsengleichung ein, so erhält man die Gleichung

$$25(9 - y^2) = 9x^2 = (3 - 5y)^2 = 9 + 25y^2 - 30y,$$

also $50y^2 - 30y - 216 =$. Die Lösungsformel für quadratische Gleichungen liefert

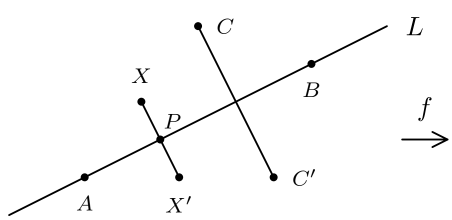
$$y = \frac{30 \pm \sqrt{900 + 200\cdot 216}}{100} = \frac{3 \pm \sqrt{441}}{10} = \frac{3 \pm 21}{10} = \begin{cases} 12/5 \\ -9/5. \end{cases}$$

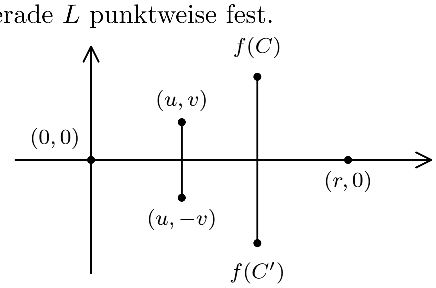
Die beiden Schnittpunkte sind somit $P_1 = (-3,\ 12/5)$ und $P_2 = (4,\ -9/5)$.

Lösung zu Aufgabe 7.18: Seien A, B zwei verschiedene Punkte auf L, so wie C ein Punkt, der nicht auf L liegt. Dann gibt es genau eine Bewegung f mit $f(A) = (0,0)$, $f(B) = (r, 0)$ (mit $r := d(A,B)$) und $f(C) \in H^+$. Ist $S(x, y) := (x, -y)$ die Spiegelung an der x-Achse, so ist $g := f^{-1} \circ S \circ f$ eine Bewegung mit

$$g(A) = A, \quad g(B) = B \quad \text{und} \quad g(C) = C' \neq C,\ C' \notin L.$$

Da g Geraden auf Geraden abbildet, lässt g die Gerade L punktweise fest.





Sei X ein beliebiger Punkt außerhalb von L und $f(X) = (u, v)$. Dann ist $X' = g(X) = f^{-1}(u, -v)$, also $f \circ g(X) = (u, -v)$. Damit bildet f die Gerade durch X und $g(X)$ auf die Gerade $\widetilde{L} := \{(u,t) : t \in \mathbb{R}\}$ ab. Die trifft die x-Achse in $(u, 0)$. Der Punkt $P := f^{-1}(u, 0)$ liegt auf L und zugleich auf der Verbindungsgeraden G von X und $g(X)$. Das bedeutet, dass X und $g(X)$ auf verschiedenen Seiten von L liegen.

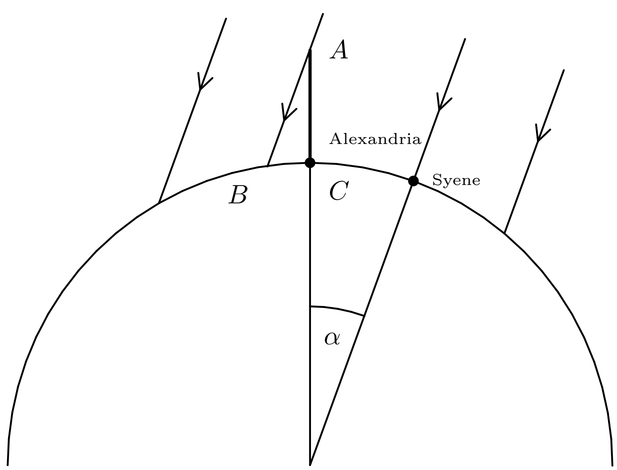
Die Eindeutigkeit von g folgt wie üblich.

Weil f Winkel respektiert, treffen sich G und L unter einem Winkel von 90°. Weil X und $g(X)$ den gleichen Abstand zu L haben, liegen sie spiegelbildlich zu L.

Lösung zu Aufgabe 7.19 : Seien $X_1, X_2 \in \text{Fix}(\varphi)$, $X_1 \neq X_2$. Sei X ein Punkt, der nicht auf der Geraden L durch X_1 und X_2 liegt. Es gibt genau eine Bewegung g, die X_1 auf O, X_2 auf einen Punkt $P = (r, 0)$ und X auf einen Punkt $Q \in H^+$ abbildet.

Die Bewegung $g \circ \varphi$ bildet ebenfalls X_1 auf O und X_2 auf P ab. Liegt $g \circ \varphi(X)$ auch in H^+, so ist $g = g \circ \varphi$ und $\varphi = \text{id}$. Liegt dagegen $g \circ \varphi(X)$ in der unteren Halbebene, so ist $g = S \circ g \circ \varphi$, also $\varphi = g^{-1} \circ S \circ g$ die Spiegelung an L.

Lösung zu Aufgabe 7.20 : Eratosthenes:



Es ist $\alpha = 7.2°$, also 1/50 von 360°. Deshalb beträgt der Bogen von Alexandria bis Syene auch 1/50 des Erdumfanges. Ein Stadion macht 1/6.25 km, also etwa 160 Meter aus. Die Entfernung von Alexandria bis Syene beträgt 5000 Stadien, der Erdumfang also $50 \cdot 5000 = 250000$ Stadien, das sind $0.16 \cdot 250000 = 40000$ km. Das entspricht recht gut dem wahren Wert.

8 Das Parallelogramm der Kräfte

Lösungen zu den Aufgaben

Lösung zu Aufgabe 8.1 : (1) $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ sind genau dann linear abhängig, wenn es ein $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ mit $\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} = \mathbf{0}$ gibt. Durch Fallunterscheidung ($\mu = 0$ und $\mu \neq 0$) kann man z.B. zeigen, dass $\gamma\beta - \delta\alpha = 0$ ist. Deshalb gilt: $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ sind linear unabhängig $\iff \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

(2) Die angegebenen Vektoren sind linear unabhängig.

Lösung zu Aufgabe 8.2: Es ist $L_1 = \{3x+y=15\}$, $L_2 = \{-x+7y=28\}$ und $L_3 = \{x+y=0\}$, also $C = (7/2, 9/2)$, $B = (15/2, -15/2)$ und $A = (-7/2, 7/2)$. Das Lot von C auf AB liegt auf der Geraden $L_4 := \{x - y = -1\}$, hat also den Fußpunkt $P = (-1/2, 1/2)$.

Es ist $L_2 = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \bullet \mathbf{n} = p\}$ in der Hesse'schen Normalform, mit $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{50}}(-1, 7)$ und $p = \frac{28}{\sqrt{50}}$. Für den Abstand des Punktes P von L_2 errechnet man $d = \frac{24}{\sqrt{50}} \approx 3.4$.

Lösung zu Aufgabe 8.3: Mit Gaußverfahren erhält man: $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

Spezielle Lösung: $\mathbf{x}_0 = \frac{1}{2}(7, -1, 0)$.
Erzeugendensystem des homogenen Systems: $\mathbf{a} = (0, -1, 1)$.

Lösung zu Aufgabe 8.4: 1) Es ist $\mathbf{x} - \mathbf{a} = \lambda(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \lambda(\mathbf{b} - \mathbf{x}) + \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{a})$, also

$$(1-\lambda)(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = \lambda(\mathbf{b} - \mathbf{x}) = (1-\lambda)\frac{\beta}{\alpha}(\mathbf{b} - \mathbf{x}).$$

Daraus folgt die Gleichung $\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = \beta(\mathbf{b} - \mathbf{a})$.

2) Aus (1) folgt: $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x} = \beta\mathbf{b} + \alpha\mathbf{a}$, also

$$\mathbf{x} = \frac{1}{\alpha + \beta}(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}).$$

Lösung zu Aufgabe 8.5: Es ist $\mathbf{z} - \mathbf{u} = \frac{1}{2}(\mathbf{c} - \mathbf{a})$, sowie

$$\begin{aligned} \mathbf{w} - \mathbf{v} &= \mathbf{c} - \mathbf{a} + \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{c}) = \frac{1}{2}(\mathbf{c} - \mathbf{a}) = \mathbf{z} - \mathbf{u}, \\ \mathbf{v} - \mathbf{u} &= \mathbf{a} + \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) - \frac{1}{2}\mathbf{a} = \frac{1}{2}\mathbf{b} \\ \text{und } \mathbf{w} - \mathbf{z} &= \mathbf{c} + \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{c}) - \frac{1}{2}\mathbf{c} = \frac{1}{2}\mathbf{b}. \end{aligned}$$

Es sei nun A ein beliebiger Punkt. Betrachtet man das Viereck mit den Ecken A, $B := A + \mathbf{a}$, $C := A + \mathbf{b}$ und $D := A + \mathbf{c}$, so bilden die Punkte $U := A + \mathbf{u}$, $V := A + \mathbf{v}$, $W := A + \mathbf{w}$ und $A + \mathbf{z}$ die Mittelpunkte der Seiten des Vierecks $ABCD$. Die Aufgabe zeigt, dass diese Mittelpunkte ein Parallelogramm bilden,

Lösung zu Aufgabe 8.6: 1) Ist $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} + \gamma\mathbf{z} = \mathbf{o}$, so liefert das entsprechende Gleichungssystem, dass $\alpha = \beta = \gamma = 0$ ist. Die Vektoren sind also linear unabhängig.

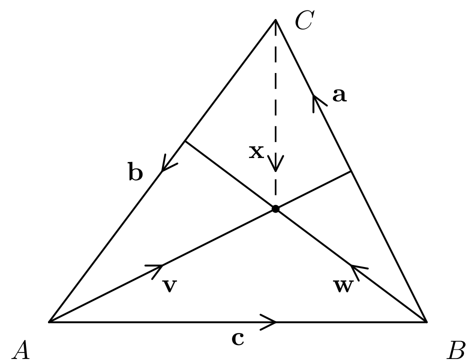
2) Es ist $(5, 2, 3) = (1, -1, 2) + (4, 3, 1)$. Die Vektoren sind linear abhängig.

Lösung zu Aufgabe 8.7: Ein Punkt auf der Geraden L hat die Gestalt $(x, y, z) = (2, 1 + 6t, 7 + 4t)$, mit $t \in \mathbb{R}$. Er ist Schnittpunkt mit der xy-, der xz- bzw. der yz-Ebene, wenn die Gleichung $7 + 4t = 0$, $1 + 6t = 0$ bzw. $2 = 0$ erfüllt ist. Also gibt es keinen Schnittpunkt mit der yz-Ebene. Der Schnittpunkt mit der xy-Ebene ist $(2, -19/2, 0)$, der Schnittpunkt mit der xz-Ebene ist $(2, 0, 19/3)$.

Lösung zu Aufgabe 8.8: 1) Der Cosinussatz besagt: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$. Tatsächlich ist

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{a}\|^2 &= \mathbf{a}\bullet\mathbf{a} \;=\; (-\mathbf{c}-\mathbf{b})\bullet(-\mathbf{c}-\mathbf{b}) \\
&= \|\mathbf{c}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 + 2\mathbf{b}\bullet\mathbf{c} \\
&= \|\mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{c}\|^2 + 2\|\mathbf{b}\|\cdot\|\mathbf{c}\|\cdot\cos(\mathbf{b},\mathbf{c}) \\
&= \|\mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{c}\|^2 - 2\|\mathbf{b}\|\cdot\|\mathbf{c}\|\cdot\cos(\alpha).
\end{aligned}
$$

2) Es geht um folgende Situation:



Es ist $\mathbf{a}=\mathbf{w}-\mathbf{x}$ und $\mathbf{b}=\mathbf{x}-\mathbf{v}$, also

$$\mathbf{v}\bullet\mathbf{w}-\mathbf{v}\bullet\mathbf{x}=\mathbf{v}\bullet(\mathbf{w}-\mathbf{x})=\mathbf{v}\bullet\mathbf{a}=0$$

und

$$\mathbf{w}\bullet\mathbf{x}-\mathbf{w}\bullet\mathbf{v}=\mathbf{w}\bullet(\mathbf{x}-\mathbf{v})=\mathbf{w}\bullet\mathbf{b}=0.$$

Daraus folgt

$$\mathbf{c}\bullet\mathbf{x}=(\mathbf{v}-\mathbf{w})\bullet\mathbf{x}=\mathbf{v}\bullet\mathbf{x}-\mathbf{w}\bullet\mathbf{x}=\mathbf{v}\bullet\mathbf{w}-\mathbf{v}\bullet\mathbf{w}=0.$$

Die drei Höhen eines Dreiecks treffen sich in einem Punkt.

Lösung zu Aufgabe 8.9: Die Vektoren $\mathbf{a}:=\mathbf{x}_0-\mathbf{p}$ und $\mathbf{b}:=\mathbf{x}_0+\mathbf{v}-\mathbf{p}$ verbinden $\mathbf{p}$ mit $\mathbf{x}_0$ bzw. $\mathbf{x}_0+\mathbf{v}$, liegen also in der gesuchten Ebene. Wären sie linear abhängig, so lägen $\mathbf{x}_0=\mathbf{p}+\mathbf{a}$ und $\mathbf{x}_0+\mathbf{v}=\mathbf{p}+\mathbf{b}$ beide auf einer Geraden, die $\mathbf{p}$ enthält. Diese Gerade müsste L sein, aber das ist unmöglich. Also sind sie linear unabhängig, und die gesuchte Ebene ist

$$E:=\{\mathbf{p}+t_1\mathbf{a}+t_2\mathbf{b}\,:\,t_1,t_2\in\mathbb{R}\}=\{\mathbf{p}+s_1(\mathbf{x}_0-\mathbf{p})+s_2\mathbf{v}\,:\,s_1,s_2\in\mathbb{R}\}.$$

Lösung zu Aufgabe 8.10: 1) Sei $E=\{\mathbf{x}_0+t\mathbf{v}+s\mathbf{w}\,:\,t,s\in\mathbb{R}\}$.

a) Ist $\mathbf{x}\in E$, so ist $\mathbf{x}-\mathbf{x}_0=t\mathbf{v}+s\mathbf{w}$, also $(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\bullet\mathbf{n}=0$.

b) Sei umgekehrt $(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\bullet\mathbf{n}=0$. Da $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ und $\mathbf{n}$ linear unabhängig sind, ist $\mathbf{x}-\mathbf{x}_0=a\mathbf{v}+b\mathbf{w}+c\mathbf{n}$. Also ist

$$0=(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\bullet\mathbf{n}=c \quad\text{ und }\quad \mathbf{x}=\mathbf{x}_0+a\mathbf{v}+b\mathbf{w}\in E.$$

2) Im Text wird die Hesse'sche Normalform für Geraden in der Ebene behandelt. Hier geht es jetzt um die Hesse'sche Normalform einer Ebene im Raum. Ist $p:=\mathbf{x}_0\bullet\mathbf{n}$, so ist $E=\{\mathbf{x}\,:\,\mathbf{x}\bullet\mathbf{n}=p\}$.

Offensichtlich ist $p\,\mathbf{n}\in E$, also $p\,\mathbf{n}=\mathbf{x}_0+a\mathbf{v}+b\mathbf{w}$, mit geeigneten Faktoren a und b. Ist $\mathbf{x}=\mathbf{x}_0+s\mathbf{v}+t\mathbf{w}\in E$ beliebig, so ist

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{x}\|^2 &= \|\mathbf{x}_0+s\mathbf{v}+t\mathbf{w}\|^2 \\
&= \|\mathbf{x}_0+a\mathbf{v}+b\mathbf{w}+(s-a)\mathbf{v}+(t-b)\mathbf{w}\|^2 \\
&= (p\,\mathbf{n}+(s-a)\mathbf{v}+(t-b)\mathbf{w})\bullet(p\,\mathbf{n}+(s-a)\mathbf{v}+(t-b)\mathbf{w}) \\
&= p^2+\|(s-a)\mathbf{v}+(t-b)\mathbf{w}\|^2\geq p^2.
\end{aligned}
$$

Also ist $\|\mathbf{x}\| \geq |p|$ und $\|p\,\mathbf{n}\| = |p|$. Das zeigt, dass $|p|$ der Abstand der Ebene vom Nullpunkt ist.

3) Sei L die Gerade, die auf E senkrecht steht und durch $\mathbf{z}$ geht. Dann ist $L = \{\mathbf{x} = \mathbf{z}+t\mathbf{n} \,:\, t \in \mathbb{R}\}$. Sei $\mathbf{z}_0 = \mathbf{z} + t_0\mathbf{n}$ der Schnittpunkt von E und L. Ist nun $\mathbf{x} \in E$ beliebig, so ist

$$(\mathbf{x} - \mathbf{z}_0) \bullet (\mathbf{z}_0 - \mathbf{z}) = (\mathbf{x} - \mathbf{z}_0) \bullet t_0\mathbf{n} = 0,$$

also

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|^2 = \|(\mathbf{x} - \mathbf{z}_0) + (\mathbf{z}_0 - \mathbf{z})\|^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{z}_0\|^2 + \|\mathbf{z}_0 - \mathbf{z}\|^2 \geq \|\mathbf{z}_0 - \mathbf{z}\|^2.$$

Damit ist $d := \|\mathbf{z}_0 - \mathbf{z}\| = |t_0|$ der Abstand von $\mathbf{z}$ und E. Weil $\mathbf{z}_0$ in E liegt, folgt: $p = \mathbf{z}_0 \bullet \mathbf{n} = \mathbf{z} \bullet \mathbf{n} + t_0$, also $d = |\mathbf{z} \bullet \mathbf{n} - p| = |\mathbf{z} \bullet \mathbf{n} - \mathbf{x}_0 \bullet \mathbf{n}| = |(\mathbf{z} - \mathbf{x}_0) \bullet \mathbf{n}|$.

Lösung zu Aufgabe 8.11 : Man kann das Ergebnis der vorigen Aufgabe verwenden. Hier ist $E = \{\mathbf{x} \,:\, \mathbf{x} \bullet \mathbf{n} = p\}$, mit $\mathbf{n} := (1/3, -2/3, 2/3)$ und $p := 3$. Dann ist $d = |p - \mathbf{z} \bullet \mathbf{n}| = 6$. Außerdem ist $\mathbf{z} - 6\mathbf{n} = (3, 5, 8) \in E$. Also wird der Abstand in diesem Punkt angenommen.

Lösung zu Aufgabe 8.12 : 1. Fall: $\mathbf{v} \bullet \mathbf{n} = 0$. Dann ist L parallel zu E. Ist außerdem $(\mathbf{x}_0 - \mathbf{a}) \bullet \mathbf{n} = 0$, so ist $L \subset E$. Ist $(\mathbf{x}_0 - \mathbf{a}) \bullet \mathbf{n} \neq 0$, so ist $L \cap E = \varnothing$.

2. Fall: Ist $\mathbf{v} \bullet \mathbf{n} \neq 0$, so sind L und E nicht parallel und es gibt ein $\mathbf{s} \in L \cap E$. Dann ist $(\mathbf{s} - \mathbf{x}_0) \bullet \mathbf{n} = 0$, und es gibt ein t_0 mit $\mathbf{s} = \mathbf{a} + t_0\mathbf{v}$. Es folgt:

$$(\mathbf{a} + t_0\mathbf{v} - \mathbf{x}_0) \bullet \mathbf{n} = 0, \text{ also } t_0(\mathbf{v} \bullet \mathbf{n}) = (\mathbf{x}_0 - \mathbf{a}) \bullet \mathbf{n}.$$

Damit ist

$$\mathbf{s} = \mathbf{a} + \frac{(\mathbf{x}_0 - \mathbf{a}) \bullet \mathbf{n}}{\mathbf{v} \bullet \mathbf{n}}\,\mathbf{v}\,,$$

und das ist der einzige Punkt in $L \cap E$.

Lösung zu Aufgabe 8.13 : Es werden die Bezeichnungen der vorigen Aufgabe benutzt. Hier ist

$$\mathbf{a} = (6, 2, 0),\ \mathbf{v} = (1, 0, -1),\ \mathbf{x}_0 = (0, -2, 0) \text{ und } \mathbf{n} = (2/3, -1/3, -2/3),$$

also $\mathbf{v} \bullet \mathbf{n} = 4/3 \neq 0$. Es folgt, dass $L \cap E$ aus einem einzigen Punkt besteht, nämlich

$$\mathbf{s} = \mathbf{a} + \frac{(\mathbf{x}_0 - \mathbf{a}) \bullet \mathbf{n}}{\mathbf{v} \bullet \mathbf{n}}\,\mathbf{v} = (6, 2, 0) + \frac{-8/3}{4/3}\,(1, 0, -1) = (4, 2, 2).$$

Lösung zu Aufgabe 8.14 : Es ist $E = \{\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + s\mathbf{v} + t\mathbf{w} \,:\, s, t \in \mathbb{R}\}$, mit $\mathbf{v} := \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 = (2, -2, -3)$ und $\mathbf{w} = \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1 = (3, 0, -9)$. Nun werden α und β gesucht, mit $\mathbf{z} - \mathbf{x}_1 = (-1, 2, 0) = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w} = (2\alpha + 3\beta, -2\alpha, -3\alpha - 9\beta)$. Das geht mit $\alpha = -1$ und $\beta = 1/3$. Also liegt $\mathbf{z}$ in E.

Lösung zu Aufgabe 8.15 : Schreibe $\mathbf{x}_0 = \mathbf{a} + t_0\mathbf{v}$. Dann ist $0 = (\mathbf{z} - \mathbf{x}_0) \bullet \mathbf{v} = \mathbf{z} \bullet \mathbf{v} - \mathbf{a} \bullet \mathbf{v} - t_0 \cdot \mathbf{v} \bullet \mathbf{v}$, also

$$t_0 := \frac{\mathbf{z} \bullet \mathbf{v} - \mathbf{a} \bullet \mathbf{v}}{\mathbf{v} \bullet \mathbf{v}}\,.$$

Der Abstand von $\mathbf{z}$ und L ist die Zahl

$$d := \|\mathbf{z} - \mathbf{x}_0\| = \|\mathbf{z} - \mathbf{a} - \frac{(\mathbf{z} - \mathbf{a}) \bullet \mathbf{v}}{\mathbf{v} \bullet \mathbf{v}}\,\mathbf{v}\|.$$

Lösung zu Aufgabe 8.16: Sei $\mathbf{a}_1 = \dfrac{1}{\|\mathbf{v}_1\|}\,\mathbf{v}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)$, $\widetilde{\mathbf{a}}_2 := \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 \bullet \mathbf{a}_1)\mathbf{a}_1 = (2,-2,2)$ und $\mathbf{a}_2 := \dfrac{1}{\|\widetilde{\mathbf{a}}_2\|}\,\widetilde{\mathbf{a}}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$. Schließlich setzen wir $\widetilde{\mathbf{a}}_3 := (1,2,1) \times (1,-1,1) = (3,0,-3)$ und $\mathbf{a}_3 := \dfrac{1}{\|\widetilde{\mathbf{a}}_3\|}\,\widetilde{\mathbf{a}}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$.

Lösung zu Aufgabe 8.17: Wir haben die Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Vertauscht man die ersten beiden Zeilen und subtrahiert man dann das 3-Fache der ersten Zeile von der zweiten Zeile, so erhält man

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -8 & -7 \\ 0 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Jetzt kann man noch die zweite Zeile zur dritten Zeile addieren und erhält das reduzierte Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 3x_2 & = & -4x_3 \\ & & 8x_2 & = & -7x_3. \end{array}$$

Eine Variable kann bestimmt werden, wir setzen $x_3 := 1$. Dann ist $x_2 := -7/8$ und $x_1 := -11/8$. Die Lösungsmenge besteht aus allen Vielfachen von $\mathbf{a} := (-11,-7,8)$.

Lösung zu Aufgabe 8.18: Es ist $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (-s,0,0)$ und $\mathbf{c} \times \mathbf{d} = (c_2d_3 - c_3d_2, c_3d_1 - c_1d_3, c_1d_2 - c_2d_1)$, also

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \bullet (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = -s(c_2d_3 - c_3d_2).$$

Andererseits ist

$$(\mathbf{a} \bullet \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} \bullet \mathbf{d}) - (\mathbf{b} \bullet \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{a} \bullet \mathbf{d}) = c_3 \cdot (sd_2 + td_3) - (sc_2 + tc_3) \cdot d_3 = s(c_3d_2 - c_2d_3) + t(c_3d_3 - c_3d_3).$$

Lösung zu Aufgabe 8.19: Es ist

$$(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2) \bullet (2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_3) = (1,2,0) \bullet (2,1,-4) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 4,$$

$$(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2) \times (2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_3) = (1,2,0) \times (2,1,-4) = (-8,4,1-4) = (-8,4,-3).$$

$$\text{und} \quad \mathbf{e}_2 \bullet \big(\mathbf{e}_1 \times (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)\big) = (0,1,0) \bullet \big((1,0,0) \times (1,1,1)\big) = (0,1,0) \bullet (0,-1,1) = -1.$$

Lösung zu Aufgabe 8.20:
Drei Vektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ bilden ein „Rechtssystem", wenn $\mathbf{c} \bullet (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) > 0$ ist, also der Winkel zwischen $\mathbf{c}$ und $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ kleiner als $90°$.

a) $(0,1,1) \bullet \big((1,1,0) \times (1,0,1)\big) = (0,1,1) \bullet (1,-1,-1) = -2 < 0$. Kein Rechtssystem!

b) $(0,0,1) \bullet \frac{1}{5}\big((2,-1,0) \times (1,2,0)\big) = \frac{1}{5}(0,0,1) \bullet (0,0,5) = 1 > 0$. Hier liegt ein Rechtssystem vor!

Lösung zu Aufgabe 8.21: 1) $\mathbf{x}$ liegt genau dann in E, wenn es Zahlen $s,t \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ ist. Aus dieser Gleichung folgt die Beziehung

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\bullet(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) = s(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\bullet\mathbf{u} + t(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\bullet\mathbf{v} = 0.$$

Ist umgekehrt $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\bullet(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) = 0$, so steht $\mathbf{x}-\mathbf{x}_0$ auf $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ senkrecht, muss also eine Linearkombination von $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ sein.

2) $\mathbf{x}$ liegt genau dann in L, wenn es ein $t\in\mathbb{R}$ gibt, so dass $\mathbf{x}-\mathbf{x}_0 = t\mathbf{v}$ ist. Aber dann ist $\mathbf{v}\times(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) = \mathbf{v}\times(t\mathbf{v}) = \mathbf{o}$.

Sei umgekehrt $\mathbf{v}\times(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) = \mathbf{o}$ und $\mathbf{x}\neq\mathbf{x}_0$. Dann ist $\|\mathbf{v}\|\cdot\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|\cdot\sin(\mathbf{v},\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) = 0$, also $\angle(\mathbf{v},\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) = 0$. Das bedeutet, dass $\mathbf{x}-\mathbf{x}_0$ ein Vielfaches von $\mathbf{v}$ ist, also $\mathbf{x}\in L$.

9 Extremfälle

Lösungen zu den Aufgaben

Lösung zu Aufgabe 9.1: Es ist $-1\le f(x)\le 2$ auf $[1,2]$, sowie $f(1)=-1$ und $f(2)=2$. Also nimmt f in $x=1$ sein Minimum und in $x=2$ sein Maximum an. Dann gibt es ein $c\in(1,2)$ mit $f(c)=0$. Die Intervallschachtelung beginnt mit $I_1=[1,2]$, $I_2=[1,1.5]$ und $I_3=[1.25,1.5]$. Schließlich ist $I_9=[1.4140625,\ 1.4179688]$, also $\sqrt{2}=1.41\ldots$.

Lösung zu Aufgabe 9.2: (1) Es ist $\lim\limits_{x\to 1, x>0} f(x) = 2$ und $\lim\limits_{x\to 1, x<0} f(x) = 1$. Also besitzt f bei $x=1$ eine Sprungstelle und kann dort nicht stetig sein. Für $0\le x<1$ ist $f(x)=x$ und für $1\le x<2$ ist $f(x)=1+x$. Dort ist f überall stetig.
(2) Da $|f(x)|\le|x|$ ist, ist $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.
(3) a) Sei $y\in[0,1]$ gegeben. Ist y rational, so ist y Bild von sich selbst. Ist y irrational, so ist y Bild von $1-y$. Also ist f surjektiv.
b) Ist $|x-\frac{1}{2}|<\varepsilon$, so ist auch $|f(x)-\frac{1}{2}|<\varepsilon$. Also ist f in $x=1/2$ stetig.
c) Ist $0\le x_0<1/2$, so ist $(1-x_0)-x_0 = 2\cdot(\frac{1}{2}-x_0) = 1-2x_0>0$. In der Nähe von x_0 gibt es rationale und irrationale Zahlen, deren Bilder fast um $2\cdot(\frac{1}{2}-x_0)$ voneinander entfernt sind. Deshalb kann f dort nicht stetig sein. Für $x_0>\frac{1}{2}$ geht's analog.

Lösung zu Aufgabe 9.3: (1) Es ist

$$f'(x) = 3\sin x\cos x(\sin x-\cos x) = 3(\sin^2 x\cos x - \cos^2 x\sin x),$$

$$\begin{aligned}
f''(x) &= 3(2\sin x\cos^2 x + 2\cos x\sin^2 x - \sin^3 x - \cos^3 x)\\
&= 3\big(\cos^2 x(\sin x-\cos x) - \sin^2 x(\sin x-\cos x) + \sin x\cos x(\sin x+\cos x)\big)\\
&= 3(\sin x+\cos x)\big((\cos x-\sin x)(\sin x-\cos x) + \sin x\cos x\big)\\
&= 3(\sin x+\cos x)(3\sin x\cos x - 1)\\
&= 3\big(3\sin^2 x\cos x - \sin x + 3\cos^2 x\sin x - \cos x\big)\\
&= 3\big(\cos x(3\sin^2 x-1) + \sin x(3\cos^2 x-1)\big).
\end{aligned}$$

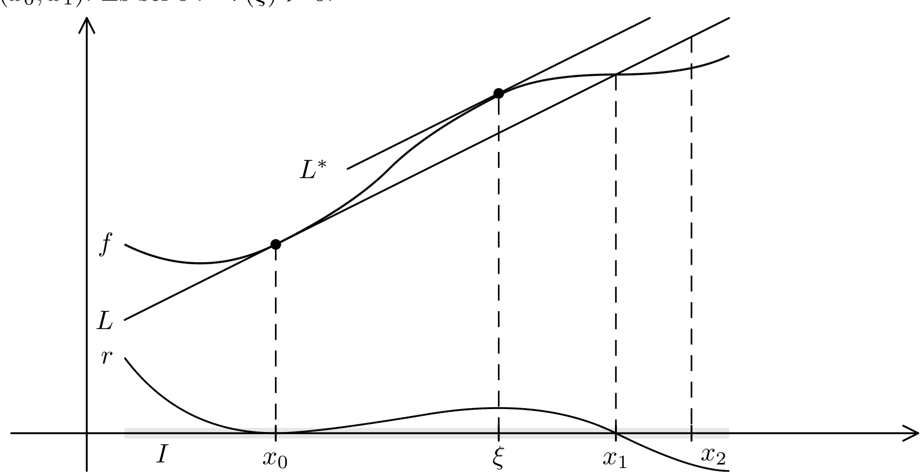
$$\text{und}\quad \begin{aligned}
f'''(x) &= 3(-3\sin^3 x + \sin x + 6\sin x\cos^2 x + 3\cos^3 x - \cos x - 6\sin^2 x\cos x)\\
&= 3\big(6\sin x\cos x(\cos x-\sin x) + 3(\cos^2 x - \sin^3 x) + \sin x - \cos x\big)\\
&= 3(\cos x-\sin x)(9\sin x\cos x+2).
\end{aligned}$$

(2) Es ist $g'(x) = 6x - 5$, also $g'(x) = 0 \iff x = 5/6$. Dort könnte ein Extremwert vorliegen. Da $g(x) = 3 \cdot \big(x - (5/6)\big)^2 - 1/12$ ist, folgt:

$g(5/6) = -1/12$ und $g(x) > -1/12$ für $x \neq 5/6$. Also liegt ein Minimum vor.

Lösung zu Aufgabe 9.4: Die Funktion f sei in jedem $q \in I$ strikt konvex. **Annahme**, f ist **nicht global** strikt konvex! Dann gibt es ein $x_0 \in I$ und ein $x_2 \neq x_0$ in I, so dass für die Tangente $L(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ gilt: $L(x_2) \geq f(x_2)$. O.B.d.A. sei $x_2 > x_0$.

Die Funktion $r = r_{x_0} := f - L$ ist differenzierbar, also erst recht stetig, und es ist $r(x_0) = 0$ und $r(x_2) \leq 0$ (letzteres gemäß Annahme). Da andererseits (wegen der lokalen strikten Konvexität) $r(x) > 0$ nahe x_0 ist, muss es nach dem Zwischenwertsatz ein $x_1 \in (x_0, x_2]$ mit $r(x_1) = 0$ geben. Auf dem abgeschlossenen Intervall $[x_0, x_1]$ muss r als stetige Funktion sein Maximum annehmen, etwa in $\xi \in (x_0, x_1)$. Es sei $c := r(\xi) > 0$.



Nun ist $L^*(x) := L(x) + c$ eine affin-lineare Funktion mit

$$L^*(\xi) = L(\xi) + r(\xi) = f(\xi)$$

$$\text{und} \quad (L^*)'(\xi) = L'(\xi) = f'(\xi) - r'(\xi) = f'(\xi).$$

Letzteres gilt, weil r in ξ ein lokales Maximum besitzt und dann $r'(\xi) = 0$ sein muss.

Die einzige affin-lineare Funktion, die diese Bedingungen erfüllt, ist die Tangente an f in ξ. Also ist L^* diese Tangente.

Wegen der lokalen strikten Konvexität von f in ξ muss auf einer Umgebung von ξ gelten: $L^*(x) < f(x)$ für $x \neq \xi$. Da aber $L^*(x) = L(x) + r(\xi) \geq L(x) + r(x) = f(x)$ nahe ξ ist, ergibt sich ein Widerspruch.

Lösung zu Aufgabe 9.5: Es ist $f'(x) = 2 \sin x \cos x$ und $f''(x) = 2(\cos^2(x) - \sin^2(x))$. Daher gilt:

$$f'(x) = 0 \iff \begin{cases} \sin(x) = 0, \text{ also } x = 0,\ \pi,\ 2\pi, \\ \text{oder} \\ \cos(x) = 0, \text{ also } x = \pi/2,\ 3\pi/2. \end{cases}$$

Es ist $f''(\pi/2) = -2 < 0$ (Maximum), $f''(\pi) = 2 > 0$ (Minimum) und $f''(3\pi/2) = -2 < 0$ (Maximum).

Weiter ist $f''(\pi/4) = f''(5\pi/4) = 0$, und die 2. Ableitung wechselt dort jeweils das Vorzeichen. Also liegen Wendepunkte vor.

Lösung zu Aufgabe 9.6: 1) Sei $x_1 \in M$ und $x_2 \in \mathbb{R} \setminus M$. O.B.d.A. sei $x_1 < x_2$. Dann definiere man $x_0 := \sup\{x \in [x_1, x_2] \, : \, x \in M\}$. Es ist $x_1 \le x_0 \le x_2$.

1. Fall: Ist $x_0 \in M$, so ist $x_0 < x_2$, und in jeder ε-Umgebung von x_0 liegt ein $x \in \mathbb{R} \setminus M$. Also ist x_0 ein Randpunkt von M.

2. Fall: Ist $x_0 \notin M$, so ist $x_1 < x_0$, und in jeder ε-Umgebung von x_0 liegt ein $x \in M$. Auch dann ist x_0 ein Randpunkt.

2) Ist $q \in \mathbb{Q}$, so muss jede ε-Umgebung Punkte von $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ enthalten, denn die Umgebung ist keine abzählbare Menge, im Gegensatz zu $\mathbb{Q}$. Ist $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig, so gibt es eine Folge (q_ν) von rationalen Zahlen, die gegen x_0 konvergiert. Jede ε-Umgebung von x_0 enthält deshalb rationale und irrationale Zahlen. Deshalb ist x_0 Randpunkt von $\mathbb{Q}$.

Lösung zu Aufgabe 9.7: Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und (x_ν) eine Folge von reellen Zahlen, die gegen x_0 konvergiert. Dann ist $x_\nu = x_0 + q_\nu$, mit einer gegen 0 konvergenten Folge (q_ν). Es folgt:

$$f(x_\nu) = f(x_0 + q_\nu) = f(x_0) + f(q_\nu) \to f(x_0) + f(0) = f(x_0 + 0) = f(x_0).$$

Also ist f stetig in x_0.

Lösung zu Aufgabe 9.8: Es ist $x^k - 1 = (x-1) \cdot \sum_{\nu=0}^{k-1} x^\nu$. Also kann man in $f(x)$ den Faktor $x - 1$ herauskürzen und erhält, dass $f(x)$ für $x \to 1$ gegen n/m konvergiert. Diesen Wert kann man einsetzen.

Lösung zu Aufgabe 9.9: 1) Eine simple Anwendung der Grenzwertsätze ergibt:

$$\lim_{x \to 6} (2x^3 - 24x + x^2) = 12 \cdot 36 - 4 \cdot 36 + 36 = (12 - 4 + 1) \cdot 36 = 9 \cdot 36 = 324.$$

2) Polynomdivision ergibt $x^2 + 7x + 10 = (x+2)(x+5)$. Also ist

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + 7x + 10}{(x-7)(x+2)} = \lim_{x \to -2} \frac{x+5}{x-7} = -1/3.$$

3) Es ist $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^3}{x^3 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^2}{1 + x + x^2} = 0.$

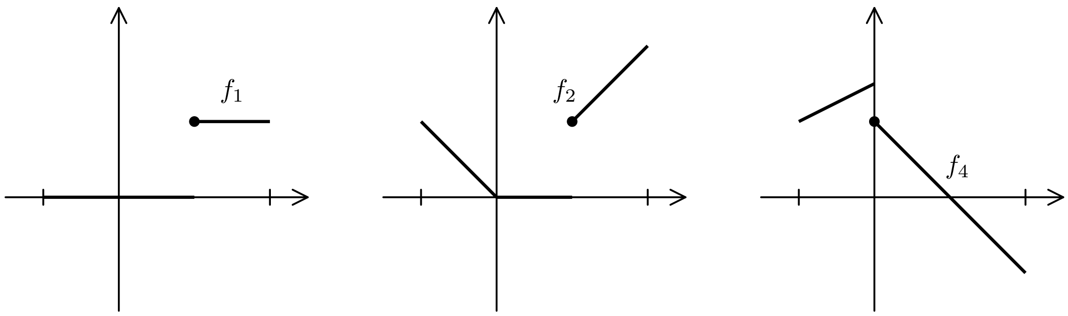
Lösung zu Aufgabe 9.10: Es geht um die Stetigkeit von f im Punkte $x = -1$. Dabei kann man sich auf das Intervall $(-2, 0)$ beschränken, und damit auf den Fall $|x| < 2$. Polynomdivision ergibt $f(x) = x^2 - x + 1$. Also ist $f(-1) = 3$ und daher $f(x) - f(-1) = f(x) - 3 = x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$. Ist $\delta > 0$ eine kleine Zahl und $|x + 1| < \delta$, so ist $|f(x) - f(-1)| = |(x+1)(x-2)| < \delta(\,|x| + 2) < 4\delta$. Das legt folgendes nahe:

Ist $\varepsilon = 0.1 = 1/10$ vorgegeben, so wähle man $\delta = \varepsilon/4 = 1/40$. Ist dann $|x + 1| < \delta$, so ist $|f(x) - 3| < 4\delta = \varepsilon = 1/10$.

Lösung zu Aufgabe 9.11: Die Funktion $b(x) := |x|$ ist stetig. Im Nullpunkt ist das klar, und außerhalb des Nullpunktes stimmt sie mit $x \mapsto x$ oder mit $x \mapsto -x$ überein und ist deshalb stetig. Daraus folgt, dass $|f| = b \circ f$ stetig ist.

Und dann ist auch $\max(f, g) = \dfrac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ stetig.

Lösung zu Aufgabe 9.12 : Hier sind einige Graphen:



Der Leser möge die Fragen für die gezeichneten Funktionen selbst beantworten. Die Funktion f_3 ist in $x = -1/2$ nicht definiert und es gibt dort auch keine einseitigen Grenzwerte. In allen anderen Punkten ist f_3 stetig.

Lösung zu Aufgabe 9.13 : Es ist $f(x) = |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & x \le -1, \\ 1 - x^2 & -1 < x < 1, \\ x^2 - 1 & x \ge 1. \end{cases}$

In den Punkten $x \neq \pm 1$ ist f differenzierbar. Weiter ist

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \begin{cases} x + 1 \to 2 & \text{für } x > 1, \\ -x - 1 \to -2 & \text{für } x < 1. \end{cases}$$

Bei $x = -1$ sieht es entsprechend aus. Also ist f in $x = 1$ und $x = -1$ nicht differenzierbar.

Lösung zu Aufgabe 9.14 : Ist $x_1 < x_2$, so gibt es ein $x \in (x_1, x_2)$ mit $\left| \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \right| = |f'(x)|$ (Mittelwertsatz). Daraus folgt die Behauptung.

Lösung zu Aufgabe 9.15 : Zu jedem x in der Nähe von x_0 gibt es ein ξ zwischen x_0 und x mit $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi)$. Daraus folgt, dass f in x_0 differenzierbar und $f'(x_0) = c$ ist.

Lösung zu Aufgabe 9.16 : a) Es ist $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \dfrac{4 - 1}{2 - 1} = 3$ und $f'(x) = 2x$. Also kann man $x_0 = 3/2$ setzen.

b) Hier ist $(f(b) - f(a))/(b - a) = 2$ und $f'(x) = 3x^2 - 2x$. Es ist $f'(x_0) = 2 \iff x_0 = 1/3 \pm \sqrt{7}/3$. Der Punkt $x_0 := 1/3 + \sqrt{7}/3$ liegt zwischen 0 und 2.

Lösung zu Aufgabe 9.17 : Für $x \neq 0$ ist $f'(x) = 1 + 4x\sin(1/x) - 2\cos(1/x)$, und das konvergiert nicht für $x \to 0$.

$\dfrac{f(x)}{x} = 1 + 2x\sin(1/x)$ strebt für $x \to 0$ gegen 1. Also ist f in $x = 0$ differenzierbar und $f'(0) = 1$.

Weil $f'\big(1/(2\pi n)\big)$ für $n \to \infty$ gegen -1 und $f'\big(2/((4n+1)\pi)\big)$ für $n \to \infty$ gegen $+1$ konvergiert, gibt es kein $\varepsilon > 0$, so dass $f'(x) \ge 0$ für $|x| < \varepsilon$ ist. f wächst auf keiner Umgebung von 0 streng monoton.

Lösung zu Aufgabe 9.18 : Es ist

$$f_1'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}, \quad f_2'(x) = 3x^2 - 2x - 5 \text{ und } f_3'(x) = \frac{8x-8}{(8-2x^2)^{3/2}}.$$

Lösung zu Aufgabe 9.19: 1) Es ist $f'(x) = 3x^2 - 12x + 21/4$ und $f''(x) = 6x - 12$. Dann ist $f'(x) = 0 \iff x = 1/2$ oder $x = 7/2$. Weil $f''(1/2) = -9 < 0$ und $f''(7/2) = 9 > 0$ ist, liegt in $x = 1/2$ ein Maximum und in $x = 7/2$ ein Minimum vor.

2) Es ist $g'(x) = 1 + \cos x$ und $g''(x) = -\sin x$. Nun ist $g'(x) = 0 \iff x = \pi + 2\pi n$ und $g''(\pi + 2\pi n) = 0$. Weil $g'''(\pi) = 1$ ist, liegen nur Wendepunkte vor, keine Extremwerte.

3) Es ist
$$h'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \quad \text{und} \quad h''(x) = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}.$$
Also ist $h'(x) = 0 \iff x = \pm 1$, $h''(1) = -1/2 < 0$ und $h''(-1) = 1/2 > 0$. Das ergibt ein Maximum und ein Minimum.

4) Es ist $q'(x) = \frac{3}{8}(4x - x^2)$ und $q''(x) = \frac{3}{4}(2 - x)$, also $q'(x) = 0 \iff x = 0$ oder $x = 4$, sowie $q''(0) > 0$ (Minimum) und $q''(4) < 0$ (Maximum).

Lösung zu Aufgabe 9.20: Es ist
$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 2ax + b, \\ f''(x) &= 6x + 2a \\ \text{und} \quad f'''(x) &= 6. \end{aligned}$$

a) $f''(x) = 0 \iff x = -a/3$. In diesem Punkt liegt offensichtlich immer ein Wendepunkt vor.

b) $f'(x) = 0 \iff x = -\frac{a}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{a^2 - 3b}$. Ist $a^2 - 3b > 0$, also $|a| > \sqrt{3b}$, so hat f' zwei Nullstellen. In diesem Falle erhält man ein isoliertes Minimum und ein isoliertes Maximum.

Lösung zu Aufgabe 9.21: Es soll $f''(-2/3) = 0$ sein, $f'(-2) = 0$ und $f(-3) = 0$. Aus den daraus folgenden Gleichungen erhält man $b = 2$, $c = -4$ und $d = -3$.

10 Die Kunst des Integrierens

Lösungen zu den Aufgaben

Lösung zu Aufgabe 10.1: (1) Offensichtlich ist
$$S_0 = 1 \text{ und } S_{n+1}^2 - S_n^2 = \big(S_n + (n+1)\big)^2 - S_n^2 = 2S_n(n+1) + (n+1)^2 = (n+1)^3 \text{ für } n \geq 0.$$
Es folgt:
$$\sum_{i=1}^n i^3 = \sum_{i=1}^n (S_i^2 - S_{i-1}^2) = S_n^2 - S_0^2 = S_n^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$
(2) Zur Berechnung des Integrals benutzt man Riemann'sche Summen zu äquidistanten Zerlegungen. Als Zwischenpunkte wählt man die Zerlegungspunkte. Das ergibt für das Intervall $[0, x]$:

$$
\begin{aligned}
\Sigma(f, \mathbf{Z}_n, \xi^{(n)}) &= \sum_{k=1}^{n} (x_k)^3 (x_k - x_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{kx}{n}\right)^3 \frac{x}{n} \;=\; \frac{x^4}{n^4} \sum_{k=1}^{n} k^3 \\
&= \frac{x^4}{4}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \;\to\; \frac{x^4}{4} \quad (\text{für } n \to \infty\,)
\end{aligned}
$$

Also ist $\displaystyle\int_0^x t^3\,dt = \frac{x^4}{4}$.

Lösung zu Aufgabe 10.2: Sei $f(x) := x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x-1)(x-2)(x+2)$, $F(x)$ die Stammfunktion, also $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x$. Dann ist

$$
\begin{aligned}
\int_{-2}^{+2} |f(x)|\,dx &= \int_{-2}^{1} f(x)\,dx - \int_{1}^{2} f(x)\,dx \\
&= \big(F(1) - F(-2)\big) - \big(F(2) - F(1)\big) \\
&= \left(14 - \frac{33}{12}\right) - \left(2 - \frac{31}{12}\right) \;=\; \left(11 + \frac{1}{4}\right) + \frac{7}{12} \;=\; 11 + \frac{5}{6} \;=\; \frac{71}{6}.
\end{aligned}
$$

Lösung zu Aufgabe 10.3: (1) Die Substitution $\varphi(x) = \sin(x)$ liefert:

$$
\int_0^t \cos^3(x)\,dx = \int_0^t (1 - \varphi(x)^2)\varphi'(x)\,dx = \int_0^{\varphi(t)} (1 - y^2)\,dy = (y - \frac{1}{3}y^3)\,\Big|_0^{\varphi(t)} = \sin(t) - \frac{1}{3}\sin^3(t).
$$

(2) Nochmals die Substitution $\varphi(x) = \sin(x)$:

$$
\int_a^b e^{\sin(x)}\cos(x)\,dx = \int_a^b e^{\varphi(x)}\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} e^t\,dt = e^{\sin(b)} - e^{\sin(a)}.
$$

(3) Da $\displaystyle\frac{t+5}{t-1} = 1 + \frac{6}{t-1}$ ist, gilt für $x > a > 1$:

$$
\begin{aligned}
\int_a^x \frac{t+5}{t-1}\,dt &= \int_a^x dt + 6\int_a^x \frac{1}{t-1}\,dt \\
&= (t)\,\Big|_a^x + 6\cdot(\ln|t-1|)\,\Big|_a^x = x - a + 6\cdot\ln\left|\frac{x-1}{a-1}\right|.
\end{aligned}
$$

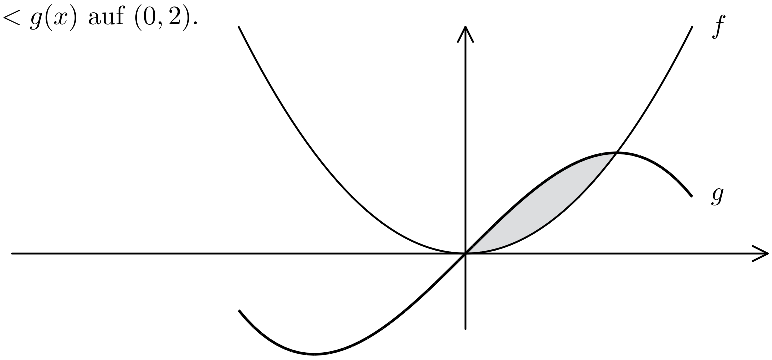
(4) Bei $f(x) = x^2e^x$ benutzt man zweimalige partielle Integration
($\int x^2(e^x)'dx = x^2e^x - 2\int xe^x dx$ und $\int x(e^x)'dx = xe^x - \int e^x dx$).
Damit erhält man $F(x) := e^x(x^2 - 2x + 2)$ als Stammfunktion.

Lösung zu Aufgabe 10.4: Sei

$$
F(x) := \begin{cases} 2x^2 - x & \text{für } -1 \le x < 0, \\ x^2 + 3x + c_1 & \text{für } 0 \le x < 1, \\ x - x^2/2 + c_2 & \text{für } 1 \le x \le 2. \end{cases}
$$

Dann ist F eine Stammfunktion von f, lediglich die Konstanten c_1 und c_2 müssen so angepasst werden, dass F stetig ist. Das funktioniert mit $c_1 = 0$ und $c_2 = 7/2$.

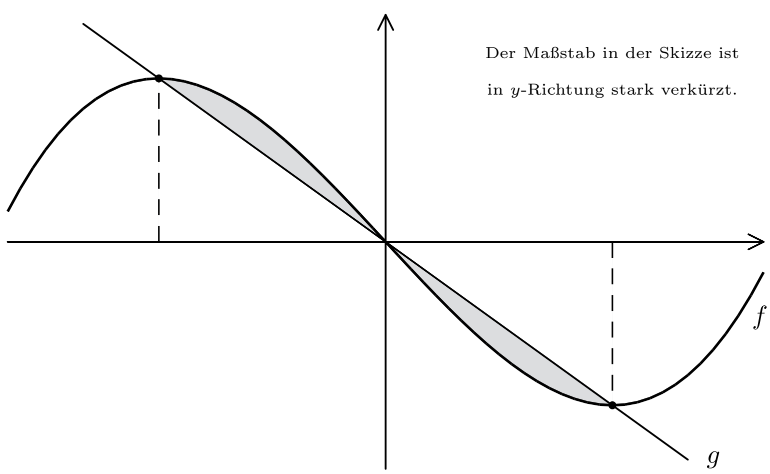
Lösung zu Aufgabe 10.5: Es ist $f(x) = g(x) \iff x = 0$ oder $x/3 = 1 - x^2/12$ (also $x = 2$ oder $x = -6$). Dabei ist $f(0) = g(0) = 0$ und $f(2) = g(2) = 4/3$. Weil $f(1) = 1/3 < 11/12 = g(1)$ ist, ist $f(x) < g(x)$ auf $(0, 2)$.



Die Fläche zwischen den Graphen ist gegeben durch

$$\int_0^2 \big(g(x) - f(x)\big)\,dx = \int_0^2 (x - \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{3}x^2)\,dx = \frac{7}{9}\,.$$

Lösung zu Aufgabe 10.6:



f hat bei $x = -3$ ein Maximum (mit $f(-3) = 54$) und bei $x = 3$ ein Minimum (mit $f(3) = -54$). Daher ist $g(x) = -18x$.

Aus Symmetriegründen hat die gesuchte Fläche den Inhalt

$$I = 2\int_0^3 \big(g(x) - f(x)\big)\,dx = 2\int_0^3 (-x^3 + 9x)\,dx = \frac{81}{2}\,.$$

Lösung zu Aufgabe 10.7: Es ist

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{2} |x^2 - 1|\,dx &= \int_{-2}^{-1} (x^2 - 1)\,dx - \int_{-1}^{1} (x^2 - 1)\,dx + \int_{1}^{2} (x^2 - 1)\,dx \\
&= \Big(\frac{x^3}{3} - x\Big)\Big|_{-2}^{-1} - \Big(\frac{x^3}{3} - x\Big)\Big|_{-1}^{1} + \Big(\frac{x^3}{3} - x\Big)\Big|_{1}^{2} \\
&= \frac{4}{3} - \Big(-\frac{4}{3}\Big) + \frac{4}{3} \;=\; 4\,,
\end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx = \int_0^{\pi} \sin x\,dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,dx = (-\cos x)\Big|_0^{\pi} - (-\cos x)\Big|_{\pi}^{2\pi} = 2+2 = 4$$

und

$$\int_0^2 (2-5x)(2+5x)\,dx = \int_0^2 (4-25x^2)\,dx = \Big(4x - \frac{25}{3}\,x^3\Big)\Big|_0^2 = -\frac{176}{3}\,.$$

Lösung zu Aufgabe 10.8: Es ist

$$f'(x) = \frac{2\ln x}{x}, \quad g'(x) = \frac{x}{x^2-a^2}, \quad h'(x) = 2\cot x \quad \text{und} \quad q'(x) = \frac{1}{x\ln x}\,.$$

Lösung zu Aufgabe 10.9: Es gibt einen Trick für diese Aufgabe: Man setze $g(x) := f(x)e^{-kx}$. Dann ist

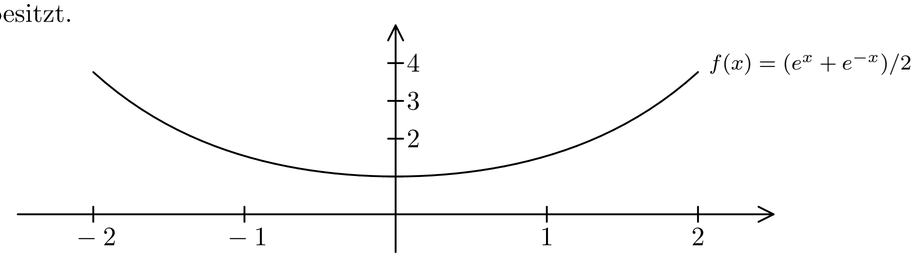
$$g'(x) = \big(f'(x) - kf(x)\big)e^{-kx} \equiv 0,$$

also $g(x) \equiv c_0$ konstant. Damit ist $f(x) \equiv c_0\,e^{kx}$. Dabei ist $c_0 = f(0) = c$.

Lösung zu Aufgabe 10.10: 1) Es ist $f'(x) = (e^x - e^{-x})/2$ und $f''(x) = (e^x + e^{-x})/2$. Daher ist $f'(x) = 0 \iff e^{2x} = 1 \iff x = 0$, und $f''(0) = 1 > 0$, also $x = 0$ ein Minimum und der einzige Extremwert von f.

Weiter ist $f''(x) = 0 \iff e^{2x} = -1$. Letzteres ist unmöglich, es gibt also keinen Wendepunkt.

Da $f''(x) > 0$ überall gilt, ist f überall konvex. Ist $x < 0$, so ist $e^x < 1$ und $e^{-x} > 1$, also $f'(x) < 0$ und f streng monoton fallend. Ist $x > 0$, so ist $e^x > 1$ und $e^{-x} < 1$, also $f'(x) > 0$ und f streng monoton wachsend. Auch hieraus könnte man sehen, dass f in $x = 0$ ein globales Minimum besitzt.



2) Es ist

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x^2+2x+1)e^x = (x+1)^2e^x \\ \text{und}\quad g''(x) &= (x^2+4x+3)e^x = \big[(x+2)^2-1\big]e^x. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist $g'(x) > 0$ für alle x, also g überall streng monoton wachsend. Weiter ist

$$g'(x) = 0 \iff x = -1.$$

Weil $g''(-1) = 0$ und $g''(x) < 0$ für $-3 < x < -1$ und $g''(x) > 0$ für $x > 1$ ist, besitzt g keinen Extremwert und einen Wendepunkt bei $x = -1$. Schließlich ist auch $g''(-3) = 0$ und $g''(x) > 0$ für $x < -3$, also $x = -3$ ein weiterer Wendepunkt. Auf $(-\infty, -3)$ ist g konvex, auf $(-3, -1)$ konkav und auf $(-1, +\infty)$ wieder konvex.

Lösung zu Aufgabe 10.11: Die Funktion $f(x) := \ln(1+x)$ ist auf $(-1, +\infty)$ definiert. Es gilt:

$$f(0) = 0, \quad f'(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{und} \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}.$$

Weil $f''(x) < 0$ für alle $x \in (-1, \infty)$ ist, ist f überall konkav. Also liegt G_f unterhalb jeder Tangente an den Graphen.

Die Tangente an G_f in $(0,0)$ ist gegeben durch

$$L(x) = f(0) + f'(0)(x-0) = x.$$

Also ist $f(x) \leq x$ für alle $x \in (-1, \infty)$.

Lösung zu Aufgabe 10.12: 1) Sei $f(x) := x^2$ und $g(x) := \cos(2x)$. Dann ist

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} x^2 \sin(2x)\,dx &= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} f(x)g'(x)\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\Big[x^2\cos(2x)\,\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2x\cos(2x)\,dx\Big]\end{aligned}$$

und nach dem gleichen Schema erhält man

$$\int_0^{\pi/2} x\cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\Big[x\sin(2x)\,\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\sin(2x)\,dx\Big].$$

Schließlich liefert die Substitutionsregel die Formel

$$\int_0^{\pi/2}\sin(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin t\,dt = -\frac{1}{2}\cos t\,\Big|_0^{\pi} = 1.$$

Setzt man alles zusammen, so erhält man:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} x^2\sin(2x)\,dx &= -\frac{1}{2}\Big[-\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^2 - 2\int_0^{\pi/2} x\cos(2x)\,dx\Big] \\ &= -\frac{1}{2}\Big[-\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^2 + \int_0^{\pi/2}\sin(2x)\,dx\Big] \\ &= \frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^2 - 1\Big] = \frac{\pi^2-4}{8}.\end{aligned}$$

2) Es ist

$$\begin{aligned}\int_1^2 (x^2+1)e^x\,dx &= (x^2+1)e^x\,\Big|_1^2 - 2\int_1^2 xe^x\,dx \\ &= (x^2+1)e^x\,\Big|_1^2 - 2\Big[xe^x\,\Big|_1^2 - \int_1^2 e^x\,dx\Big] \\ &= (x^2-2x+3)e^x\,\Big|_1^2 = 3e^2 - 2e.\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 10.13: 1) Es ist $(x^3+8)' = 3x^2$. Also liegt es nahe, $\varphi(t) := t^3 + 8$ zu setzen. Dann ist

$$\int_a^b \frac{3x^2}{x^3+8}\,dx = \int_a^b \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \frac{1}{u}\,du = \ln u\,\Big|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \ln\Big(\frac{b^3+8}{a^3+8}\Big).$$

2) Setzt man $\varphi(t) := 2t+3$, so ist $\varphi'(t) = 2$. Also ist

$$\begin{aligned}\int_a^b \sin(2x+3)\,dx &= \frac{1}{2}\int_a^b \sin(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}\sin u\,du = \frac{1}{2}\big[\cos(2a+3) - \cos(2b+3)\big].\end{aligned}$$

11 Imaginäre Welten

Lösungen zu den Aufgaben

Lösung zu Aufgabe 11.1: Mit $x = u + v$ ergibt sich die Gleichung

$$u^3 + v^3 + 3uv(u + v) = p(u + v) + q.$$

Das wird gelöst, wenn man u und v so wählen kann, dass $u^3 + v^3 = q$ und $3uv = p$ ist, wenn also u^3 und v^3 Lösungen der quadratischen Gleichung

$$z^2 - qz + \frac{p^3}{27} = 0$$

sind. Die Lösungsformel für quadratische Gleichungen liefert

$$z = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}$$

und damit

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Ist nun $p = 12$ und $q = 16$, so ist $q/2 = 8$, $p/3 = 4$, $(q/2)^2 = 64$ und $(p/3)^3 = 64$. Daraus ergibt sich $x = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{8} = 4$. Die Probe zeigt, dass 4 tatsächlich eine Lösung ist.

Lösung zu Aufgabe 11.2: Es ist $z+w = 11-4\,\mathrm{i}$, $z \cdot w = 51 - 17\,\mathrm{i}$ und $z/w = (9/85) + (53/85)\,\mathrm{i}$.

Lösung zu Aufgabe 11.3: a) Es ist $1 + \mathrm{i} = r\,e^{\mathrm{i}\,t}$ mit $r = |1 + \mathrm{i}| = \sqrt{2}$ und $\cos t = \sin t = 1/\sqrt{2}$, also

$$1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\,e^{(\pi/4)\,\mathrm{i}} \quad \text{und} \quad \sqrt[3]{1 + \mathrm{i}} = \sqrt[6]{2}\,e^{(\pi/12)\,\mathrm{i}}.$$

Natürlich gibt es noch zwei weitere Lösungen, die sich durch Multiplikation mit dritten Einheitswurzeln ergeben.

b) Weiter ist $\sqrt[6]{-1} = \pm\sqrt[3]{\mathrm{i}} = e^{(\pi/6)\,\mathrm{i}} \cdot \zeta_k$, mit sechsten Einheitswurzeln ζ_k.

c) Die Ergebnisse sollen in der Form $x + \mathrm{i}\,y$ angegeben werden. Das erfordert weitere Rechnungen:

Es ist $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$ und $\sin(\pi/6) = 1/2$. Um auch die Werte für $\pi/12$ zu erhalten, benutzt man die Gleichungen

$$\sin(\pi/6) = 2xy \text{ und } \cos(\pi/6) = y^2 - x^2, \text{ mit } x := \sin(\pi/12) \text{ und } y := \cos(\pi/12).$$

Dazu setze man $u := 2x^2$ und $v := 2y^2$ und löse die Gleichungen $4uv = 1$ und $v - u = \sqrt{3}$. Das liefert

$$x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}} \quad \text{und} \quad y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

Somit ist

$$\sqrt[3]{1 + \mathrm{i}} = \frac{\sqrt[6]{2}}{2}\left(\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \mathrm{i}\sqrt{2 - \sqrt{3}}\right) \quad \text{und} \quad \sqrt[6]{-1} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + \mathrm{i}).$$

Die Lösung ist nicht eindeutig.

Lösung zu Aufgabe 11.4: Ist $z = \sqrt{3} + \mathrm{i}$, so ist $|z|^2 = (\sqrt{3} + \mathrm{i})(\sqrt{3} - \mathrm{i}) = 4$. Für den Winkel $t = \arg(z)$ gelten die Gleichungen

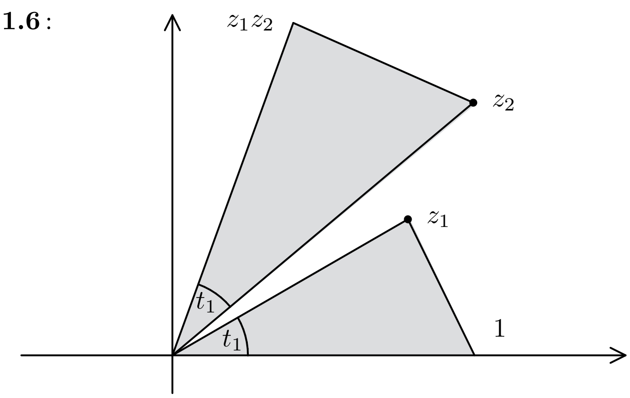
$$\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{und} \quad \sin t = \frac{1}{2}\,.$$

Also ist $t = \pi/6$ (d.h. $= 30°$). Damit ist $\sqrt{3} + \mathsf{i} = 2\,e^{(\pi/6)\,\mathsf{i}}$.

Lösung zu Aufgabe 11.5: $z = 4\big(\cos(\pi/12) + \mathsf{i}\,\sin(\pi/12)\big) = -(\sqrt{6}+\sqrt{2}) - \mathsf{i}\,(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

Hier wurden die Gleichungen $\cos(\pi/12) = (\sqrt{6}+\sqrt{2})/4$ und $\sin(\pi/12) = (\sqrt{6}-\sqrt{2})/4$ aus einer Formelsammlung benutzt. Tatsächlich stimmen diese Werte mit den in Aufgabe 11.3 errechneten Ergebnissen überein, wie man durch Quadrieren herausfinden kann.

Lösung zu Aufgabe 11.6:



Sei $z_1 = r_1\,e^{\mathsf{i}\,t_1}$ und $z_2 = r_2\,e^{\mathsf{i}\,t_2}$, also $z_1 z_2 = r_1 r_2\,e^{\mathsf{i}\,(t_1+t_2)}$. Dann haben die beim Nullpunkt anliegenden Seiten des ersten Dreiecks die Längen 1 und r_1, die des zweiten Dreiecks die Längen $r_2 = 1 \cdot r_2$ und $r_1 \cdot r_2$. Der dazwischen liegende Winkel hat im ersten Dreieck den Wert t_1 und im zweiten Dreieck den Wert $(t_1+t_2) - t_2 = t_1$. Also sind die Dreieke ähnlich.

Lösung zu Aufgabe 11.7: Die Potenzen von $1 + \mathsf{i}$ (für $n = 0, 1, 2, \ldots, 7, 8$) ergeben

$1,\ 1+\mathsf{i},\ 2\,\mathsf{i},\ -2+2\,\mathsf{i},\ -4,\ -4-4\,\mathsf{i},\ -8\,\mathsf{i},\ 8-8\,\mathsf{i},\ 16.$

Lösung zu Aufgabe 11.8: Es ist $z = 2\sqrt{3} + 2\,\mathsf{i} = r\,e^{\mathsf{i}\,t}$ mit $r = |z| = 4$ und $\cos t = \sqrt{3}/2$, $\sin t = 1/2$. Damit ist $t = \pi/6$.

Mit Moivre folgt: $z^6 = 4^6\big(\cos(6 \cdot (\pi/6)) + \mathsf{i}\,\sin(6 \cdot (\pi/6))\big) = 4^6(-1 + \mathsf{i} \cdot 0) = -4096$.

Lösung zu Aufgabe 11.9: Das Prinzip der quadratischen Ergänzung funktioniert auch in $\mathbb{C}$. Deshalb bleibt auch die Lösungsformel für quadratische Gleichungen gültig. Ist $z^2 + 15z + 57 = 0$, so ist

$$z = \frac{1}{2}(-15 \pm \sqrt{3}\,\mathsf{i}).$$

Lösung zu Aufgabe 11.10: Ist $\zeta = e^{2\pi\,\mathsf{i}\,k/n}$, $k = 1, \ldots, n-1$, so ist $1 + \zeta + \zeta^2 + \cdots + \zeta^{n-1} = 0$ (Kreisteilungsgleichung). Das bedeutet:

$$1 + e^{2\pi\,\mathsf{i}/n} + e^{4\pi\,\mathsf{i}/n} + \cdots + e^{2(n-1)\pi\,\mathsf{i}/n} = 0.$$

Der Imaginärteil liefert die gewünschte Gleichung.

Lösung zu Aufgabe 11.11: 1) Es ist $\sqrt{2\,\mathsf{i}} = \pm\sqrt{2}e^{\mathsf{i}\,\pi/4} = \pm\sqrt{2}\big(\sqrt{2}/2 + \mathsf{i}\,\sqrt{2}/2\big) = \pm(1+\mathsf{i})$ und $\sqrt{-2\,\mathsf{i}} = \pm\,\mathsf{i}\,(1+\mathsf{i}) = \pm(\mathsf{i}-1)$, also

$$\begin{aligned} p(z) &= (z^2 - 2\,\mathrm{i}\,)(z^2 + 2\,\mathrm{i}\,) \\ &= \big(z - (1 + \mathrm{i}\,)\big)\big(z + (1 + \mathrm{i}\,)\big)\big(z - (\,\mathrm{i} - 1)\big)\big(z + (\,\mathrm{i} - 1)\big). \end{aligned}$$

2) Die Nullstellen von $q(z)$ sind $z_1 = -2$ und $z_2 = 3$. Daher ist $q(z) = (z + 2)(z - 3)$.

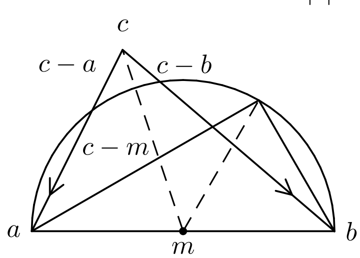
Lösung zu Aufgabe 11.12: a) Ist $z = x + \mathrm{i}\,y$ und $w = u + \mathrm{i}\,v$, so ist $\langle z\,,\,w\rangle = \mathrm{Re}(z\overline{w}) = \mathrm{Re}\big(xu + yv) + \mathrm{i}\,(yu - xv)\big) = xu + yv$ das Skalarprodukt der Vektoren (x, y) und (u, v). Es gilt:

$$\begin{aligned} |z - w|^2 &= (z - w)(\overline{z} - \overline{w}) \;=\; z\overline{z} + w\overline{w} - (z\overline{w} + \overline{z\overline{w}}) \\ &= |z|^2 + |w|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z\overline{w}). \end{aligned}$$

Insbesondere ist $\langle z\,,\,\mathrm{i}\,z\rangle = \mathrm{Re}\big(z(-\mathrm{i}\,\overline{z})\big) = -\,\mathrm{Re}(\,\mathrm{i}\,|z|^2) = 0$.

b) Weil $|a + b|^2 - |a - b|^2 = 4\langle a\,,\,b\rangle$ ist, folgt:

$$\begin{aligned} |c - m|^2 - r^2 &= |c - \frac{1}{2}(a + b)|^2 - \frac{1}{4}|a - b|^2 \\ &= |c|^2 + \frac{1}{4}|a + b|^2 - \langle c\,,\,a + b\rangle - \frac{1}{4}|a - b|^2 \\ &= |c|^2 + \langle a\,,\,b\rangle - \langle c\,,\,a + b\rangle \;=\; \langle c - a\,,\,c - b\rangle. \end{aligned}$$



m ist der Mittelpunkt der Strecke zwischen a und b. Die Vektoren $c - a$ und $c - b$ verbinden c mit a und b. Die gewonnene Gleichung zeigt: c liegt genau dann auf dem Kreis um m mit Radius $r = |b - a|/2$, wenn $c - a$ und $c - b$ aufeinander senkrecht stehen, wenn also a, b und c ein rechtwinkliges Dreieck bilden.

Lösung zu Aufgabe 11.13: Ist $c = a + t(b - a)$ für ein $t \in (0, 1)$, so ist $\dfrac{c - a}{b - a} = t \in \mathbb{R}$.

Ist umgekehrt $t := \dfrac{c - a}{b - a} \in \mathbb{R}$, so ist $c = a + t(b - a)$.

Lösung zu Aufgabe 11.14: Es ist

$$\begin{aligned} |z - z_0|^2 = r^2 \quad &\Longleftrightarrow \quad (z - z_0)(\overline{z} - \overline{z}_0) - r^2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad z\overline{z} - z\overline{z}_0 - z_0\overline{z} + z_0\overline{z}_0 - r^2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad z\overline{z} + cz + \overline{cz} + \delta = 0 \text{ (mit } c = -\overline{z}_0 \text{ und } \delta = z_0\overline{z}_0 - r^2), \end{aligned}$$

wobei $r = \sqrt{z_0\overline{z}_0 - \delta}$ ist und $c\overline{c} = z_0\overline{z}_0 = \delta + r^2 > \delta$ sein muss.

Ist umgekehrt ein $c \in \mathbb{C}$ und ein $\delta \in \mathbb{R}$ mit $c\overline{c} - \delta > 0$ gegeben, so setze man $z_0 := -\overline{c}$ und $r := \sqrt{c\overline{c} - \delta}$. Dann liefert die Gleichung $z\overline{z} + cz + \overline{cz} + \delta = 0$ einen Kreis mit Radius r um z_0.

Lösung zu Aufgabe 11.15: Man setze die Abbildung folgendermaßen zusammen:

- Translation $z \mapsto w = z - z_0$.

- Drehung $w \mapsto u = (1/v)w$.
- Spiegelung $u \mapsto y = \overline{u}$
- Drehung zurück: $y \mapsto k = vy$.
- Translation zurück: $k \mapsto k + z_0$.

Zusammen ergibt das: $z \mapsto z_0 + \dfrac{v}{\overline{v}}(\overline{z} - \overline{z}_0)$.

Lösung zu Aufgabe 11.16: Es ist

$$\begin{aligned} \mathbf{uvw} - \mathbf{vwu} &= (\mathbf{uv} + \mathbf{vu})\mathbf{w} - \mathbf{v}(\mathbf{uw} + \mathbf{wu}) \\ &= (-2\mathbf{u} \bullet \mathbf{v})\mathbf{w} + (2\mathbf{u} \bullet \mathbf{w})\mathbf{v} \\ &= -2(\mathbf{u} \bullet \mathbf{v})\mathbf{w} + 2(\mathbf{u} \bullet \mathbf{w})\mathbf{v}, \end{aligned}$$

also

$$\frac{1}{2}(\mathbf{uvw} - \mathbf{vwu}) = (\mathbf{u} \bullet \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \bullet \mathbf{v})\mathbf{w}.$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \mathbf{uvw} &= \mathbf{u}(-\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}) \\ &= -(\mathbf{v} \bullet \mathbf{w})\mathbf{u} + \mathbf{u}(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{vwu} &= (-\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w})\mathbf{u} \\ &= -(\mathbf{v} \bullet \mathbf{w})\mathbf{u} + (\mathbf{v} \times \mathbf{w})\mathbf{u}. \end{aligned}$$

also

$$\frac{1}{2}(\mathbf{uvw} - \mathbf{vwu}) = \frac{1}{2}\Big(\mathbf{u}(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) - (\mathbf{v} \times \mathbf{w})\mathbf{u}\Big) = \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}).$$

Daraus folgt die zweite Behauptung.