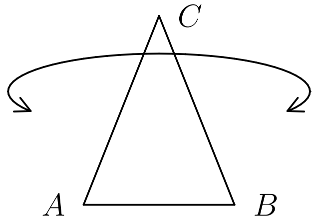
Kapitel 1

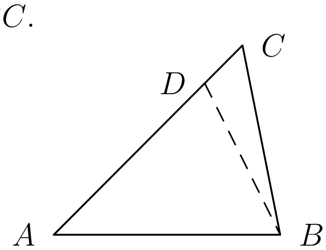
Lösung zu Aufgabe 1.1:



Ist Dreieck ABC gleichschenklig, so ist ABC kongruent zu BAC (SWS). Also ist auch $\angle BAC = \angle ABC$.

Der Trick besteht darin, es nicht als selbstverständlich anzusehen, dass der Kongruenzsatz auf zwei verschiedene Dreiecke anzuwenden ist. Angeblich hat diesen Trick schon der antike griechische Mathematiker Pappos entdeckt. ∎

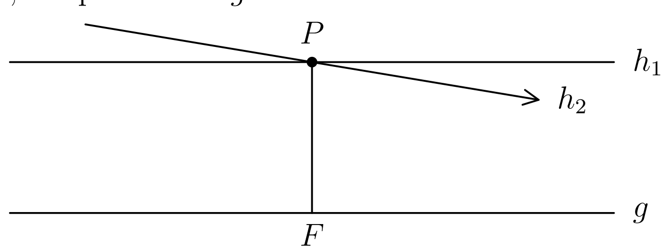
Lösung zu Aufgabe 1.2: Annahme, $BC < AC$. Wähle D zwischen A und C, mit $AD = BC$.



Die Dreiecke ABD und ABC sind kongruent (SWS: $AB = AB$, $AD = BC$ und $\angle BAD = \angle ABC$). Also muss auch $\angle ABD = \angle BAC = \angle ABC$ sein. Das ist ein Widerspruch, denn nach Konstruktion ist $\angle ABD < \angle ABC$. ∎

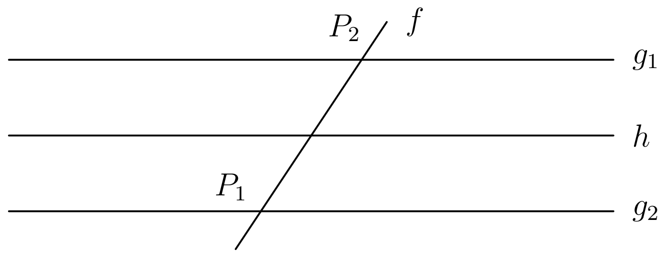
Lösung zu Aufgabe 1.3: Es ist sicher eine gute Idee, die beiden Versionen des Parallelenaxioms erst mal aufzuschreiben. Dann formulieren Sie die Annahme und versuchen, daraus Folgerungen zu ziehen, die zu einem Widerspruch führen.

Es sei eine Gerade g und ein Punkt $P \notin g$ gegeben, so dass durch P mindestens zwei Parallen zu g laufen. F sei der Fußpunkt des Lotes von P auf g. Sei h_1 die Gerade durch P, die senkrecht auf der Strecke FP steht. Dann gibt es eine Gerade $h_2 \neq h_1$ durch P, die parallel zu g ist.



Offensichtlich schließt h_2 mit FP auf einer Seite einen Winkel $< 90°$ ein. Aus dem Parallelenaxiom von Euklid folgt, dass sich h_2 und g in einem Punkt Q treffen müssen. Das ist ein Widerspruch. ∎

Lösung zu Aufgabe 1.4: Die Situation sieht folgendermaßen aus:



Man überzeugt sich sehr leicht davon, dass g_1, g_2 und f die Winkelbeziehungen erfüllen. Schwieriger ist es, daraus die Parallelität von g_1 und g_2 zu folgern.

Für $i = 1, 2$ sei P_i der Schnittpunkt von g_i und f. Wir nehmen an, g_1 und g_2 schneiden sich in einem Punkt Q. Dann enthält das Dreieck P_2QP_1 zwei nebeneinander liegende Winkel, deren Summe 180° beträgt. Das ist ein Widerspruch zum Satz über die Winkelsumme im Dreieck. ∎

Lösung zu Aufgabe 1.5: Die einzige Lösung der Ausgangsgleichung ist $x = 1$. Also hat der Schüler beim dritten Schritt durch 0 dividiert, ohne es zu merken. ∎

Lösung zu Aufgabe 1.6: Wir führen das Symbol $A \sqcup B$ für „**entweder** A **oder** B" ein. Dann muss die Wahrheitstafel folgendermaßen aussehen:

A	B	$A \sqcup B$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Das ist offensichtlich die Wahrheitstafel, die man bei $\neg(A \iff B)$ erhalten würde. Das kann man umformen zu $(A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A)$. Und das ist äquivalent zu $(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$. Man überlege, dass das genau das ist, was man will! ∎

Lösung zu Aufgabe 1.7: Eine große Wahrheitstafel zeigt: $(A \vee B) \wedge (C \vee \neg D)$ wird genau dann falsch, wenn A und B beide falsch sind oder wenn C falsch und D wahr ist. ∎

Lösung zu Aufgabe 1.8: Die Aussagen (1) und (2) sind wahr (Implikationen mit falscher Prämisse), Aussage (3) ist falsch (eine falsche und eine wahre Aussage können nicht äquivalent sein). ∎

Lösung zu Aufgabe 1.9: Wir identifizieren A, B, C, D jeweils mit ihrer Aussage. Dann gilt:

$$\begin{array}{rrcr} \text{(I)} & A & \iff & \neg B \\ \text{(II)} & \neg C & \iff & D \\ \text{(III)} & \neg D & \iff & \neg A \\ \text{(IV)} & D & \implies & B \end{array}$$

Wenn D die Wahrheit sagt, dann auch B (nach (IV)). Dann lügt aber A (nach (I)), und wegen (III) auch D. Das kann nicht sein! Also muss D lügen (die Implikation (IV) ist dann trotzdem richtig). Wegen (II) folgt, dass C die Wahrheit sagt.

Man sieht außerdem, dass A lügt und B die Wahrheit sagt. Diesmal tritt kein Widerspruch auf. ∎

Kapitel 2

Lösung zu Aufgabe 2.1: Es ist $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\{1\})) = \mathfrak{P}(\{\varnothing, \{1\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{1\}\}, \{\varnothing, \{1\}\}\}$ und
$\mathfrak{P}(\{\varnothing, 1\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{1\}, \{\varnothing, 1\}\}$. Der Durchschnitt beider Mengen enthält $\varnothing$ und $\{\varnothing\}$. ■

Lösung zu Aufgabe 2.2: Es ist $\mathfrak{P}(M \cup \{a\}) = \mathfrak{P}(M) \cup \{A \cup \{a\} \,:\, A \in \mathfrak{P}(M)\}$. Offensichtlich sind das doppelt so viele Elemente wie in $\mathfrak{P}(M)$. ■

Lösung zu Aufgabe 2.3: Es gilt:

$$\begin{aligned} A \in \mathfrak{P}(X) \cap \mathfrak{P}(Y) &\iff (A \subset X) \wedge (A \subset Y) \\ &\iff A \subset X \cap Y \\ &\iff A \in \mathfrak{P}(X \cap Y) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} A \in \mathfrak{P}(X) \cup \mathfrak{P}(Y) &\iff (A \in \mathfrak{P}(X)) \vee (A \in \mathfrak{P}(Y)) \\ &\iff (A \subset X) \vee (A \subset Y) \\ &\implies A \subset X \cup Y \\ &\iff A \in \mathfrak{P}(X \cup Y). \end{aligned}$$

An der Stelle, wo der Implikationspfeil steht, gilt nicht die Umkehrung. Beispiel: Sei $X = \{1\}$ und $Y = \{2, 3\}$, sowie $A = \{1, 2\}$. Dann liegt A in $\mathfrak{P}(X \cup Y)$, aber weder in $\mathfrak{P}(X)$, noch in $\mathfrak{P}(Y)$. ■

Lösung zu Aufgabe 2.4: 1. Inklusion: Wir haben folgende Implikationen:

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \setminus C) &\implies (x \in A) \vee (x \in B \wedge x \notin C) \\ &\implies (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \notin C) \\ &\implies (x \in A \cup B) \wedge \neg(x \notin A \wedge x \in C) \\ &\implies (x \in A \cup B) \wedge \neg(x \in C \setminus A) \\ &\implies x \in (A \cup B) \setminus (C \setminus A). \end{aligned}$$

2. Inklusion: Hier gilt:

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B) \setminus (A \cap C) &\implies (x \in A \cap B) \wedge \neg(x \in A \cap C) \\ &\implies (x \in A \wedge x \in B) \wedge (x \notin A \vee x \notin C) \\ &\implies (x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \\ &\implies x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C \\ &\implies (x \in A) \wedge (x \in B \setminus C) \\ &\implies x \in A \cap (B \setminus C). \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Lösung zu Aufgabe 2.5: Sei B die Menge der schwarzen und W die Menge der silbernen Geräte, sowie F die Menge der fehlerhaften Geräte. Dann gilt für die Anzahlen:

$$\#(B \cup F) = 159, \quad \#(B \cap F) = 21 \quad \text{und} \quad \#(W \cap F) = 17.$$

Also ist $\#F = 21 + 17 = 38$. Außerdem gilt:

$$B \cup F = (B \setminus F) \cup (B \cap F) \cup (F \setminus B) = (B \setminus F) \cup F.$$

Da die beiden letzteren Mengen disjunkt sind, ist $B \setminus F = (B \cup F) \setminus F$ und $\#(B \setminus F) = 159 - 38 = 121$. Daraus folgt:

$$\#B = \#(B \setminus F) + \#(B \cap F) = 121 + 21 = 142.$$

$\blacksquare$

Lösung zu Aufgabe 2.6: Für $x \in G$ gilt:

$$\begin{aligned}
x \in G \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n) &\iff \neg\big((x \in A_1) \vee \ldots \vee (x \in A_n)\big) \\
&\iff \neg(\,\exists\, i \text{ mit } x \in A_i) \\
&\iff \forall\, i \,:\, x \notin A_i \\
&\iff \forall\, i \,:\, x \in G \setminus A_i \\
&\iff x \in (G \setminus A_1) \cap \ldots \cap (G \setminus A_n).
\end{aligned}$$

Die zweite Aussage wird analog bewiesen. $\blacksquare$

Lösung zu Aufgabe 2.7: a) Es ist

$$\begin{aligned}
x^2 - 4x + 3 = 0 &\iff (x-2)^2 = 1 \\
&\iff (x - 2 = 1) \vee (x - 2 = -1) \\
&\iff (x = 3) \vee (x = 1).
\end{aligned}$$

Also ist diese Behauptung wahr.

b) und c) sind wahr, d) ist falsch, e) ist wahr und f) ist falsch. $\blacksquare$

Lösung zu Aufgabe 2.8: a) Sei A die Aussage „g trifft g_1 und g_2 und bildet mit ihnen auf einer Seite Winkel, die zusammen $< 180°$ betragen“. Und B sei die Aussage „g_1 und g_2 treffen sich“. Dann soll $A \implies B$ verneint werden, das ist die Aussage $A \wedge (\neg B)$. Die Verneinung besagt also: „Es gibt zwei parallele Geraden g_1, g_2, die eine dritte Gerade g treffen und mit ihr auf einer Seite von g innere

Winkel bilden, die zusammen weniger als 180° ergeben.“ Diese Aussage war der Ausgangspunkt bei der Suche nach einer nichteuklidischen Geometrie.

b) Es gibt ein Dreieck und in diesem Dreieck zwei Winkel, die zusammen mindestens 180° ergeben.

c) Es gibt einen Abteilungsleiter, der beim Betriebsfest mindestens eine Stunde lang mit einer (bestimmten) Angestellten nicht Walzer getanzt hat.

d) Es gibt eine Stadt, in der alle Männer in allen Gaststätten bekannt sind.

e) Jeder Student kommt in wenigstens einem Semester in wenigstens einer Vorlesung pünktlich. ∎

Kapitel 3

Lösung zu Aufgabe 3.1 a): Zur Eindeutigkeit: Existiert eine Lösung x, so gilt $2(x+1) = x+4$, also $2x+2 = x+4$. Daraus folgt die Gleichung $x+2=4$ und schließlich $x=2$.

Zum Beweis der Existenz mache man die Probe: Es ist $2\cdot(2+1) = 6$ und $2+4=6$, also $x=2$ tatsächlich eine Lösung. ∎

Lösung zu Aufgabe 3.1 b): Die Ungleichung gilt genau dann, wenn $x > -1/7$ ist. ∎

Lösung zu Aufgabe 3.2: 1) Ein kleiner Trick: $a^2+b^2-2ab = (a-b)^2 \geq 0$, also $\frac{1}{2}(a^2+b^2) \geq ab$.

2) Sei $a<b$ und $ab<0$. Dann muss $a<0<b$ sein, und deshalb auch $\dfrac{1}{a} < 0 < \dfrac{1}{b}$.

3) Sei $0<a<1<b$. Dann ist $b-ab = b(1-a) > 1-a$, also $a+b > 1+ab$. ∎

Lösung zu Aufgabe 3.3: Definitionsgemäß ist $F_3 = F_1 + F_2 = 1+1 = 2$, also

$$F_1F_3 - F_2^2 = 1\cdot 2 - 1^2 = 2-1 = 1 = (-1)^2.$$

Damit ist der Induktionsanfang (für $n=2$) erledigt.

Wir kommen zum Induktionsschluss (von n nach $n+1$): Es ist

$$\begin{aligned}
F_nF_{n+2} - F_{n+1}^2 &= F_n(F_n + F_{n+1}) - F_{n+1}^2 \\
&= F_n^2 + F_nF_{n+1} - (F_{n-1} + F_n)^2 \\
&= F_nF_{n+1} - F_{n-1}^2 - 2F_{n-1}F_n \\
&= F_n(F_{n+1} - F_{n-1}) - F_{n-1}(F_{n-1} + F_n) \\
&= F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} \\
&= -(-1)^n \;=\; (-1)^{n+1}.
\end{aligned}$$

∎

Lösung zu Aufgabe 3.4: Induktionsanfang: **Eine** Gerade teilt die Ebene in 2 Teile, und andererseits ist $\frac{1(1+1)}{2} + 1 = 1+1 = 2$.

Induktionsschluss: Die Behauptung sei für n bewiesen. Sind $n+1$ Geraden $g_1, g_2, \ldots, g_n, g_{n+1}$ in der Ebene gegeben, so zerlegen $g_1, \ldots, g_n$ diese in höchstens $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ Teile. Die Gerade g_{n+1} hat höchstens n Schnittpunkte $S_1, \ldots, S_n$ mit den ersten n Geraden. Dadurch erhält man maximal $n+1$ Abschnitte zwischen den S_i auf g_{n+1}. Und jeder solche Abschnitt teilt ein altes Gebiet in 2 neue Gebiete. Die Anzahl der Gebiete erhöht sich also um höchstens $n+1$.

Es ist aber

$$\left[\frac{n(n+1)}{2}+1\right]+(n+1)=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}+1=\frac{(n+1)(n+2)}{2}+1.$$

■

Lösung zu Aufgabe 3.5: Ist $n \in \mathbb{Z}$, so ist $n = 3m$, $n = 3m+1$ oder $n = 3m+2$. Nun ist

$$\begin{array}{rrcl} & (3m)^2 & = & 9m^2 \;=\; 3\cdot(3m^2), \\ & (3m+1)^2 & = & 9m^2+6m+1 \;=\; 3(3m^2+2m)+1 \\ \text{und} & (3m+2)^2 & = & 9m^2+12m+4 \;=\; 3(3m^2+4m+1)+1. \end{array}$$

■

Lösung zu Aufgabe 3.6: Jede der Zahlen a_i besitzt eine Primfaktorzerlegung:

$$a_i = p_{i,1}\cdots p_{i,n_i},\ i=1,\ldots,n.$$

Die linke Seite der Äquivalenz bedeutet: $\{p_{i,1},\ldots,p_{i,n_i}\}\cap\{p_{j,1},\ldots,p_{j,n_j}\}=\varnothing$ für $i \neq j$. Aus dieser Aussage folgt sofort die rechte Seite.

Gibt es dagegen eine Primzahl $p \in T_{a_i}\cap T_{a_j}$, so ist $\mathrm{kgV}(a_1,\ldots,a_n)$ höchstens so groß wie $\frac{1}{p}a_1\cdots a_n$, also echt kleiner als $a_1\cdots a_n$. ■

Lösung zu Aufgabe 3.7: Wir bezeichnen die im euklidischen Algorithmus auftretenden Reste mit $r_1, r_2, r_3, \ldots$. Dann beweisen wir mit Induktion nach k:

Es gibt ganze Zahlen α_k, β_k mit $r_k = \alpha_k a + \beta_k b$.

Induktionsanfang: Aus der Darstellung $a = q\cdot b + r_1$ entnehmen wir $r_1 = \alpha_1 a + \beta_1 b$, mit $\alpha_1 = 1$ und $\beta_1 = -q$. Wegen $b = q_1\cdot r_1 + r_2$ ist auch $r_2 = \alpha_2 a + \beta_2 b$, mit $\alpha_2 = -q_1$ und $\beta_2 = 1 + q_1 q$.

Induktionsschluss: Es sei $k \geq 3$ und $r_i = \alpha_i a + \beta_i b$ für $i < k$. Wegen der Gleichung $r_{k-2} = q_{k-1}\cdot r_{k-1} + r_k$ ist

$$r_k = (\alpha_{k-2}a + \beta_{k-2}b) - q_{k-1}(\alpha_{k-1}a + \beta_{k-1}b) = \alpha_k a + \beta_k b,$$

mit $\alpha_k = \alpha_{k-2} - q_{k-1}\alpha_{k-1}$ und $\beta_k = \beta_{k-2} - q_{k-1}\beta_{k-1}$.

Hier wurde das zweite Induktionsprinzip verwendet. Weil der Induktionsschluss außerdem erst ab $k \geq 3$ funktioniert, muss der Induktionsanfang die Fälle $k = 1$ **und** $k = 2$ behandeln. ■

Lösung zu Aufgabe 3.8: „3 im Quadrat“ bedeutet „3 in 3 Dreiecken“, und „a im Dreieck“ bedeutet „a^a. Daraus folgt:

- „3 im Dreieck“ ist $= 3^3 = 27$.
- „3 in 2 Dreiecken“ ist $= 27^{27} = 3^{3^4} = 3^{81}$.
- „3 in 3 Dreiecken“ ist $= (3^{81})^{(3^{81})} = 3^{3^4 \cdot 3^{81}} = 3^{3^{85}}$.

$\blacksquare$

Kapitel 4

Lösung zu Aufgabe 4.1: Es soll $k = n+1-i$ sein, also $i = n+1-k$, $i(i+2) = (n+1-k)(n+3-k) = n^2+k^2+3+2\cdot(\ldots)$ (und damit $(-1)^{i(i+2)} = (-1)^{n+k+1}$). Läuft i von 1 bis n, so läuft k von n bis 1 Somit steht auf der rechten Seite der Ausdruck

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+k+1}a^k b^{n+2-k}\,.$$

■

Lösung zu Aufgabe 4.2:

$$\text{Es ist} \quad \sum_{i=1}^{n}(4i-3) \;=\; 4\cdot\sum_{i=1}^{n} i - 3\cdot\sum_{i=1}^{n} 1 \;=\; 4\cdot\frac{n(n+1)}{2} - 3n \;=\; n(2n-1).$$

■

Lösung zu Aufgabe 4.3: Induktionsanfang ($n = 1$): Es ist $1^2 = 1$ und $\frac{1}{6}(1+1)(2+1) = 1$.

Induktionsschluss: Es ist

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i^2 &= \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2 \\
&= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \text{ (nach Ind.-vor.)} \\
&= \frac{1}{6}[n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)(n+1)] \\
&= \frac{1}{6}[(n+1)(2n^2+n+6n+6)] \\
&= \frac{1}{6}(n+1)(2n^2+7n+6)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2(n+1)+1) &= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) \\
&= \frac{1}{6}(n+1)(2n^2+7n+6).
\end{aligned}$$

■

Lösung zu Aufgabe 4.4: Wir versehen die hintereinander liegenden Kugeln mit Nummern $1,\ldots,n$. Dass die Kugeln mit den Nummern $i_1,\ldots,i_k$ weiß sind, liefert die Auswahl einer k-elementigen Teilmenge von $\{1,\ldots,n\}$. Es gibt also $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten.

Will man erst k weiße Kugeln und aus den verbliebenen $n-k$ Kugeln dann l rote aussuchen, so gibt es $\binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{l} = \frac{n!}{k!\,l!\,m!}$ Möglichkeiten. ■

Lösung zu Aufgabe 4.5: Aus den 11 Buchstaben des Wortes „MISSISSIPPI“ sollen andere Wörter mit wieder 11 Buchstaben gebildet werden.

Es gibt 11! Möglichkeiten, aber davon sind einige gleich. Wenn ein Buchstabe k-mal vorkommt, dann ergibt sich $k!$-mal das gleiche Wort. Also gilt:

Anzahl $= \dfrac{11!}{4!4!2!1!} = 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 = 34650.$ ■

Lösung zu Aufgabe 4.6: Ein Spieler erhält eine 10-elementige Teilmenge von $\{1, 2, \ldots, 32\}$. Dafür gibt es $M := \binom{32}{10}$ Möglichkeiten. Berücksichtigt man alle 3 Spieler, so gibt es

$$N := \binom{32}{10} \cdot \binom{22}{10} \cdot \binom{12}{10} = \frac{32!}{10!\,10!\,10!} \text{ Möglichkeiten.}$$

Nachdem ein Spieler sein Blatt kennt, muss er noch

$$\frac{N}{M} = \frac{22!}{10!10!} = \binom{22}{10} \cdot \frac{12!}{10!} = \binom{22}{10} \cdot 132$$

Möglichkeiten berücksichtigen. ■

Lösung zu Aufgabe 4.7: a) Es ist

$$\begin{aligned} (n+1)!/(n-1)! = 30 \quad &\iff \quad n(n+1) = 30 \\ &\iff \quad n^2 + n - 30 = 0 \\ &\iff \quad n = \frac{-1 \pm \sqrt{1+120}}{2}. \end{aligned}$$

Da $n \in \mathbb{N}$ ist, kommt nur die Lösung $n = 5$ in Frage.

b) $\dfrac{(n-3)!}{(n-4)(n-3)} < 5000 \iff (n-5)! < 5000$. Aus der Tabelle auf Seite **??** entnimmt man, dass $1 \leq n-5 \leq 6$ sein muss, also $6 \leq n \leq 11$. ■

Lösung zu Aufgabe 4.8: a) Man kann z.B. Induktion nach m führen:

Im Falle $m = 1$ ergibt die linke Seite den Wert $\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} = 1 + (n+1) = n+2$ und die rechte Seite den Wert $\binom{n+1+1}{1} = n+2$.

Ist die Formel für m bewiesen, so ist

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m+1}\binom{n+k}{k} &= \sum_{k=0}^{m}\binom{n+k}{k}+\binom{n+m+1}{m+1}\\ &= \binom{n+m+1}{m}+\binom{n+m+1}{m+1}\\ &= \binom{n+m+2}{m+1}.\end{aligned}$$

b) Es ist $\dfrac{\binom{n}{k}}{\binom{n-1}{k-1}} = \dfrac{n!(k-1)!(n-k)!}{k!(n-k)!(n-1)!} = \dfrac{n}{k}\,.$ ∎

Lösung zu Aufgabe 4.9: Es ist

$$\begin{aligned}\overline{x} \;=\; 2^n - x &= 2^n - \sum_{i=0}^{n-1} x_i 2^i\\ &= (2^n-1) - \sum_{i=0}^{n-1} x_i 2^i + 1\\ &= \sum_{i=0}^{n-1} 2^i - \sum_{i=0}^{n-1} x_i 2^i + 1\\ &= \sum_{i=0}^{n-1}(1-x_i)2^i + 1 \;=\; 1+\sum_{i=1}^{n-1}(1-x_i)2^i\,.\end{aligned}$$

Die Stelle x_0 bleibt gleich, alle anderen Stellen x_i wechseln. ∎

Lösung zu Aufgabe 4.10: Es ist $16^0 = 1$, $16^1 = 16$, $16^2 = 256$ und $16^3 > 2500$, und

$$2003 = 256\cdot 7 + 211 = 256\cdot 7 + 16\cdot 13 + 3.$$

Mit den Ziffern $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F$ ist dann $(2003)_{16} = 7D3$.

Für jede Hexadezimal-Stelle braucht man 4 Dualstellen (es ist $(15)_{10} = (F)_{16} = (1111)_2$), insbesondere ist $(7)_{16} = (0111)_2$. Lässt man die führende Null weg, so braucht man $3 + 4 + 4 = 11$ Stellen im Dualsystem. ∎

Lösung zu Aufgabe 4.11: Es ist $B_n = (1-i)^n\cdot B_0$, also

$$A = B_0 = \Big(\frac{100}{100-p}\Big)^6\cdot B_n = \Big(\frac{10}{7}\Big)^6\cdot 3000 \approx 8.49986\cdot 3000 = 25\,499.58.$$

∎

Lösung zu Aufgabe 4.12: Es ist $\inf(M_1) = 0$ und $\sup(M_1) = 1$, und auch $\inf(M_2) = 0$ und $\sup(M_2) = 1$. In beiden Fällen gehört Infimum und Supremum nicht zur Menge.

Es ist $M_3 = \{x : -2 < x^2 - 1 < 2\} = \{x : 0 \leq x^2 < 3\} = \{x : 0 \leq |x| < \sqrt{3}\} = (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$, also $\inf(M_3) = -\sqrt{3}$ und $\sup(M_3) = \sqrt{3}$. Auch hier gehört Infimum und Supremum nicht zur Menge. ∎

Lösung zu Aufgabe 4.13: a) Es ist $x^2(x-1) \geq 0 \iff (x = 0) \vee (x \geq 1)$.

b) Die Ungleichung $|x - 5| < |x + 1|$ bedeutet: x hat von 5 einen kleineren Abstand als von -1. Demnach muss $x > 2$ sein.

Systematischer kann man folgendermaßen argumentieren:

a) Ist $x < -1$, so ist auch $x < 5$ und daher $-(x-5) < -(x+1)$. Das liefert nur einen Widerspruch.

b) Ist $-1 \leq x < 5$, so ist $-(x-5) < x+1$, also $2x > 4$ und damit $x > 2$.

c) Ist $x \geq 5$, so ist $x - 5 < x + 1$. Das ist automatisch immer erfüllt.

Also kommen nur Elemente $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 2$ in Frage. ∎

Lösung zu Aufgabe 4.14: Anschaulich bedeutet das: Haben x und y beide von a einen Abstand $< r$, so gilt das auch für alle Punkte z zwischen x und y.

Ausführlicher: Ist $a - r < x < a + r$, $a - r < y < a + r$ und $x \leq z \leq y$, so ist $a - r < x \leq z$ und $z \leq y < a + r$, also $a - r < z < a + r$. ∎

Lösung zu Aufgabe 4.15: Die Folgeglieder a_n nehmen abwechselnd die Werte $+1$ und -1 an. Die positiven reellen Zahlen sind weit von -1 entfernt, die negativen Zahlen weit von $+1$.

Ist $x \geq 0$, so ist $|a_{2n+1} - x| = |-1 - x| = |x + 1| = x + 1 \geq 1 > \frac{1}{2}$, für alle n.

Ist $x < 0$, so ist $|a_{2n} - x| = |1 - x| = 1 - x > 1 > \frac{1}{2}$, für alle n.

Damit ist übrigens auch bewiesen, dass (a_n) keine konvergente Folge ist. ∎

Lösung zu Aufgabe 4.16: Es ist $\alpha - \beta = \sqrt{5}$, also

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha - \beta) = 1 = F_1 \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^2 - \beta^2) = \alpha + \beta = 1 = F_2.$$

Es ist $x^2 = x + 1$ genau dann, wenn $x = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$ ist. Also ist $\alpha^2 = \alpha + 1$ und $\beta^2 = \beta + 1$. Daraus folgt:

$$\alpha^{n+1} = \alpha^n + \alpha^{n-1} \quad \text{und} \quad \beta^{n+1} = \beta^n + \beta^{n-1}.$$

Setzt man $w_n := \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$, so ergibt sich: $w_{n+1} = w_n + w_{n-1}$. Also ist $w_n = F_n$. ∎

Lösung zu Aufgabe 4.17: Es ist $a_n = (3/5)^n + (2/5)^n$. Beide Summanden konvergieren gegen Null, also auch a_n.

Es ist $b_n = \dfrac{6n^2+2}{n^2} = 6 + \dfrac{2}{n^2}$, und das konvergiert gegen 6.

Wir schreiben

$$c_n = \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\,.$$

Also ist $0 < c_n < 1/(2\sqrt{n})$. Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben und $n > 1/(4\varepsilon^2)$, so ist $|c_n| < \varepsilon$. Also konvergiert c_n gegen Null.

Nach Satz 4.2 ist $1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$, also $d_n = (n/(n+1))^2$, und dieser Ausdruck strebt gegen 1. ∎

Lösung zu Aufgabe 4.18: Ist $x = 0.12373\underline{73}\ldots$, so ist $100x - x = 12.25$, also $x = 1225/9900 = 245/1980 = 49/396$. ∎

Lösung zu Aufgabe 4.19: x_0 ist obere Schranke von A, und $x_0 - 1/n$ ist keine obere Schranke mehr (weil x_0 die kleinste obere Schranke ist). Also gibt es ein $a_n \in A$ mit $x_0 - 1/n < a_n \leq x_0$. Dann ist $|a_n - x_0| < 1/n$ und (a_n) konvergiert gegen x_0. ∎

Kapitel 5

Lösung zu Aufgabe 5.1: Sei $f(x) = ax + b$ mit $f(1) = 2$ und $f(3) = 5$. Dann ist $a + b = 2$ und $3a + b = 5$. Daraus ergibt sich:

$$f(x) = \frac{1}{2}(3x + 1).$$

Ist $f(3) = -1$ und $f(4) = -7$, so ergibt sich $f(x) = -6x + 17$. ∎

Lösung zu Aufgabe 5.2: Die Bedingung $f(c - x) = f(c + x)$ liefert:

$$-2cx - 10(c - x) = 2cx - 10(c + x), \quad \text{also } (4c - 20)x = 0.$$

Da dies für alle x gelten soll, muss $c = 5$ sein. Es ist $f(5 - x) = x^2 - 24 = f(5 + x)$. ∎

Lösung zu Aufgabe 5.3: Die Methode der quadratischen Ergänzung liefert.

$$f(x) = a \cdot \left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}\, x + \frac{c}{a}\right) = a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

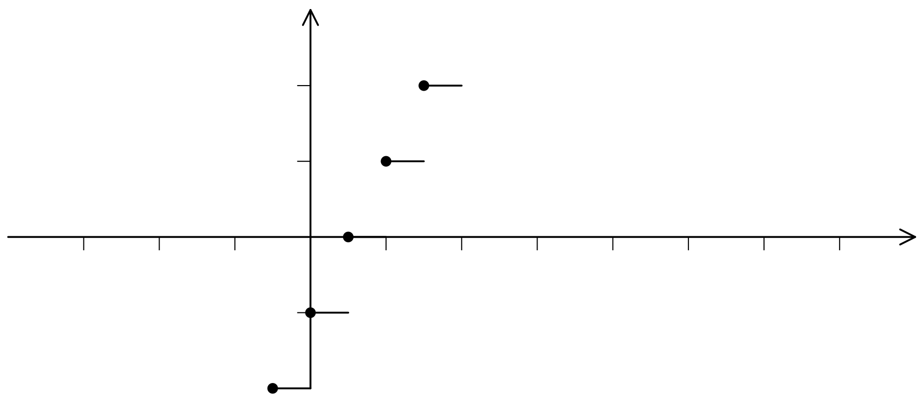
Dann ist $f(-b/(2a) + x) = f(-b/(2a) - x)$, also f symmetrisch zu $x = -b/(2a)$. Dort liegt auch der Scheitelpunkt. Der y-Wert ist dort $= -(b^2 - 4ac)/(4a)$.

Ist $a > 0$, so ist die Parabel nach oben geöffnet. Ist dann die Diskriminante $\Delta := b^2 - 4ac > 0$, so liegt der Scheitelpunkt unterhalb der x-Achse, und es gibt zwei Schnittpunkte mit der x-Achse. Ist $\Delta = 0$, so liegt der Scheitelpunkt genau auf der x-Achse. Ist $\Delta < 0$, so liegt er oberhalb der x-Achse und es gibt keinen Schnittpunkt.

Ist $a < 0$, so ist die Parabel nach unten geöffnet. Der Einfluss der Diskriminante bleibt gleich.

Gesucht ist nun eine Parabel mit $a < 0$, $-b/(2a) = 2$ und $\Delta > 0$. Setzt man z.B. $a = -1$, $b = 4$ und $c > -4$, so ist $\Delta = b^2 - 4ac = 16 + 4c > 0$ und alle Bedingungen sind erfüllt. ∎

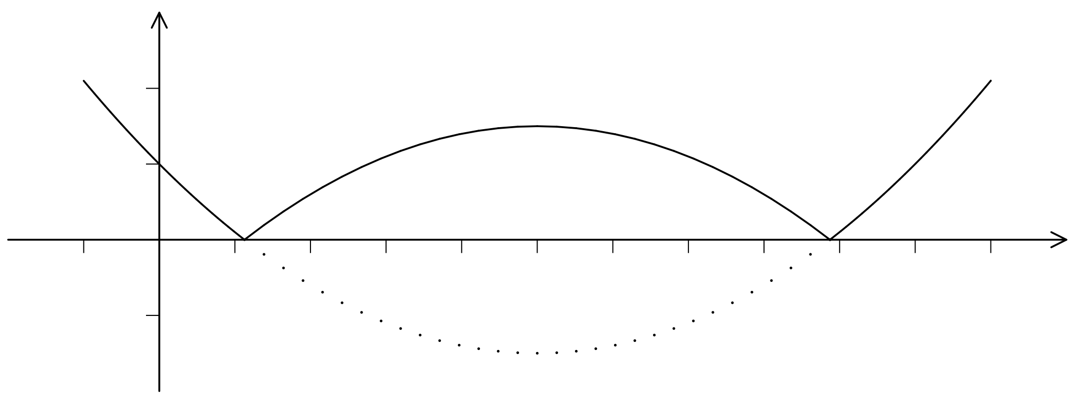
Lösung zu Aufgabe 5.4: Ist $n \in \mathbb{Z}$ und $n \leq x < n + 1/2$, so ist $2n - 1 \leq 2x - 1 < 2n$, also $[2x - 1] = 2n - 1$. Ist $n + 1/2 \leq x < n + 1$, so ist $[2x - 1] = 2n$. Das ergibt die folgende Skizze für $f(x)$:



Wir kommen zum zweiten Graphen. Es ist

$$\frac{1}{10}x^2 - x + 1 = 0 \iff x = 5 \pm \sqrt{15} \approx \begin{cases} 9 \\ 1 \end{cases}$$

Die Parabel ist nach oben geöffnet, der Scheitelpunkt ist $(x, y) = (5, -1.5)$. Das ergibt die folgende Skizze für $g(x)$:



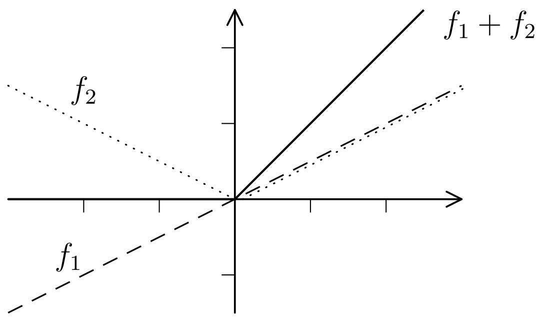
Schließlich ist $h(x) = \big|\, 2|x| - 3 \,\big|$. Wie findet man h?

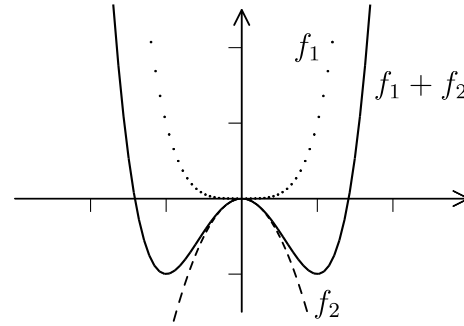
Sei $h_0(x) := 2x - 3$. Ist $x \geq 0$, so ist $h(x) = |h_0(x)|$. Ist $x < 0$, so ist $h(x) = h(-x)$. In beiden Fällen ist $h(x) = h(|x|) = \big|\, h_0(|x|) \,\big|$. ∎

Lösung zu Aufgabe 5.5: Es ist $f = f^+ - f^-$ und $|f| = f^+ + f^-$. Das kann man leicht nachprüfen. ∎

Lösung zu Aufgabe 5.6: Im ersten Fall ist $(f_1 + f_2)(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0, \\ x & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$

Im zweiten Fall ist $(f_1 + f_2)(x) = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2)$.





■

Lösung zu Aufgabe 5.7: 1) Ist $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, so ist $0 = f(x_0) = a_n x_0^n + \cdots + a_1 x_0 + a_0$. Man erinnere sich nun an die Formel

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \cdot \sum_{i=1}^{n} a^i b^{n-i}.$$

Zusammen mit der Anfangsbemerkung erhält man:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) - f(x_0) \\ &= (a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) - (a_n x_0^n + \cdots + a_1 x_0 + a_0) \\ &= a_n (x^n - x_0^n) + \cdots + a_1 (x - x_0) \\ &= (x - x_0) \cdot \left[a_n \sum_{i=1}^{n-1} x^i x_0^{n-1-i} + \cdots + a_1 \right] . \end{aligned}$$

In der eckigen Klammer steht ein Polynom der Gestalt $g(x) = a_n x^{n-1} + \cdots$, es hat offensichtlich den Grad $n-1$.

2) Man berechne $(x - x_0) g(x)$ und vergleiche die Koeffizienten mit denen von $f(x)$.

3) Eine erste Nullstelle erhält man durch Probieren. Offensichtlich ist $x_1 = 1$ eine Nullstelle und daher $f(x) = (x-1) \cdot g(x)$. Man gewinnt $g(x)$ durch Polynomdivision.

$$(x^3 - \frac{5}{2} x^2 - x + \frac{5}{2}) : (x - 1) = x^2 - \frac{3}{2} x - \frac{5}{2} \, .$$

Die noch fehlenden Nullstellen gewinnt man jetzt mit Hilfe der Lösungsformel für quadratische Gleichungen.

$$x^2 - \frac{3}{2} x - \frac{5}{2} = 0 \iff x = \frac{3/2 \pm \sqrt{(9/4) + 10}}{2} = \frac{3 \pm 7}{4} \, .$$

Also hat $f(x)$ noch die Nullstellen $x_2 = \frac{5}{2}$ und $x_3 = -1$.

Im Falle des Polynoms $f(x) = x^3 - 67x - 126$ ist $x = -2$ eine Nullstelle. Weiter erhält man:

$$(x^3 - 67x - 126) : (x + 2) = x^2 - 2x - 63.$$

Das quadratische Polynom auf der rechten Seite hat noch die Nullstellen $x_2 = 9$ und $x_3 = -7$.

■

Lösung zu Aufgabe 5.8: Die Beweise zu (a) sind ziemlich trivial. Exemplarisch sei hier nur der Beweis der zweiten Aussage vorgeführt:

$$\begin{aligned} y \in f(A \cap B) &\implies \exists\, x \in A \cap B \text{ mit } f(x) = y \\ &\implies \exists\, x \text{ mit } (x \in A) \wedge (x \in B) \wedge (f(x) = y) \\ &\implies y \in f(A) \ \wedge\ y \in f(B) \\ &\implies y \in f(A) \cap f(B). \end{aligned}$$

Die vorletzte Implikation kann nicht ohne weiteres umgekehrt werden.

b) Sei zunächst $f(X \setminus A) = Y \setminus f(A)$ für alle $A \subset X$.

Injektivität: Ist $x_1 \neq x_2$, so ist $x_2 \in X \setminus \{x_1\}$, also $f(x_2) \in f(X \setminus \{x_1\}) = Y \setminus \{f(x_1)\}$. Damit ist auch $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Surjektivität: Ist $y \in Y$ vorgegeben, so wählen wir irgend ein $x \in X$. Ist $y = f(x)$, so sind wir fertig. Ist $y \neq f(x)$, so ist $y \in Y \setminus f(\{x\}) = f(X \setminus \{x\})$. Aber dann existiert ein $x' \neq x$ mit $f(x') = y$.

Nun sei umgekehrt f als bijektiv vorausgesetzt und $A \subset X$ nicht leer. Ist $y \in f(X \setminus A)$, so gibt es ein $x \in X \setminus A$ mit $f(x) = y$. Weil f injektiv ist, ist $f(x') \neq y$ für $x' \in A$. Also ist $y \in Y \setminus f(A)$.

Ist andererseits $y \in Y \setminus f(A)$, so gibt es kein $x \in A$ mit $f(x) = y$. Aber weil f surjektiv ist, muss es ein $x_0 \in X$ mit $f(x_0) = y$ geben. Dann liegt x_0 in $X \setminus A$ und y in $f(X \setminus A)$. ∎

Lösung zu Aufgabe 5.9: Es ist

$$g \circ f(x) = \begin{cases} (2x-3)^2 & \text{für } x \leq 0, \\ 14x - 1 & \text{für } x > 0, \end{cases}$$

und

$$f \circ g(x) = \begin{cases} 7x^2 & \text{für } x \leq -2, \\ 4x - 5 & \text{für } -2 < x \leq 1/2, \\ 14x - 7 & \text{für } x > 1/2. \end{cases}$$

∎

Lösung zu Aufgabe 5.10: Hier ist $f((-\infty, 2]) = \{2x - 1 : x \leq 2\} = (-\infty, 3]$ und $f((2, +\infty)) = \{x + 1 : x > 2\} = (3, +\infty)$, also $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Damit ist f surjektiv.

Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2$. Wir nehmen an, dass $f(x_1) = f(x_2)$ ist. Liegen x_1, x_2 beide in $(-\infty, 2]$ oder beide in $(2, +\infty)$, so müssen sie sogar gleich sein, weil die affin-linearen Funktionen $x \mapsto 2x-1$ und $x \mapsto x+1$ beide injektiv sind. Wir können also annehmen, dass $x_1 \leq 2$ und $x_2 > 2$ ist. Aber dann muss $f(x_1) = 2x_1 - 1 \leq 3$ und $f(x_2) = x_2 + 1 > 3$ sein. Das ist ein Widerspruch. Also ist f injektiv und damit sogar bijektiv.

Die Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} (y+1)/2 & \text{falls } y \le 3, \\ y-1 & \text{falls } y > 3. \end{cases}$$

Wenn man diese Abbildung direkt angibt und die Gleichungen $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ und $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ beweist, dann kann man sich oben den Nachweis von Injektivität und Surjektivität sparen. ■

Lösung zu Aufgabe 5.11: Damit der Graph von f durch $(3,3)$ läuft, muss $m \cdot 3 - 3 = 3$ sein, also $m = 2$. Dann ist $f(2) = 2+1 = 3$ und $f(3) = 2\cdot 3 - 3 = 3$. Also ist f nicht injektiv. ■

Lösung zu Aufgabe 5.12: Ist $1 \le x \le 3$, so ist $1 < 3/2 \le f(x) \le 5/2 < 3$, also $f([1,3]) \subset [1,3]$. Nun ist

$$f^2(x) = \frac{1}{2}\big(\frac{1}{2}\,x + 1\big) + 1 = \frac{1}{4}\,x + \frac{3}{2}$$

und

$$f^3(x) = \frac{1}{2}\big(\frac{1}{4}\,x + \frac{3}{2}\big) + 1 = \frac{1}{8}\,x + \frac{7}{4}\,.$$

Das legt folgende Vermutung nahe:

$$f^n(x) = \frac{1}{2^n}\,x + \frac{2^n - 1}{2^{n-1}}\,.$$

Man beweist diese Formel ganz einfach durch Induktion. Und offensichtlich konvergiert $f^n(x)$ unabhängig von x gegen 2.

Man kann auch folgendermaßen vorgehen: Weil $f(x) - f(y) = \frac{1}{2}(x-y)$ ist, bilden die Intervalle $[f^n(1), f^n(3)]$ eine Intervallschachtelung, die gegen eine Zahl c konvergiert. Ist x fest, so ist $f^{n+1}(x) = \frac{1}{2}f^n(x) + 1$. Weil $f^n(x)$ und $f^{n+1}(x)$ gegen den gleichen Grenzwert c konvergieren, muss $c/2 + 1 = c$ sein, also $c = 2$. ■

Lösung zu Aufgabe 5.13: a) Ist $x = 2t/(t^2+1)$ und $y = (t^2-1)/(t^2+1)$, so ist $x^2 + y^2 = (4t^2 + t^4 - 2t^2 + 1)/(t^2+1)^2 = 1$, also $F(\mathbb{R}) \subset B$.

b) Ist $x^2 + y^2 = 1$ und $(x,y) \ne (0,1)$, so setze man $t := x/(1-y)$. Dann kann man nachrechnen, dass $t^2 + 1 = 2/(1-y)$ und $t^2 - 1 = 2y/(1-y)$ ist, also $F(t) = (x,y)$. Damit ist $H(x,y) = x/(1-y)$ die Umkehrabbildung zu F. ■

Lösung zu Aufgabe 5.14: 1) Sei $z := \log_2(3)$. Dann ist $2^z = 3$ und $2^{3/2} = \sqrt{8} < \sqrt{9} = 3 = 2^z$, also $3/2 < z$.

Weiter ist $2 > \dfrac{6561}{4096} = \big(\dfrac{81}{64}\big)^2$, also $2^{1/4} > 9/8$, $2^{5/4} > 9/4$ und $2^{5/8} > 3/2$. Daraus folgt:

$$2^{11/16} > 2^{10/16} = 2^{5/8} > \frac{3}{2} \quad \text{und} \quad 2^{27/16} > 3 = 2^{\log_2(3)}, \text{ also } \frac{3}{2} < z < \frac{27}{16}.$$

2) Es ist

$$\begin{aligned}\log_5\left(100^{\log_{10}(5)}\right) &= \log_5\left(10^{2\cdot\log_{10}(5)}\right)\\ &= \log_5(25) \;=\; 2\cdot\log_5(5) \;=\; 2.\end{aligned}$$

3) Es ist $B_n = A\cdot(1-i)^n$, mit $i = p/100$. Dann folgt für eine beliebige Basis a:

$$\log_a(1-i) = \frac{1}{n}\left(\log_a B_n - \log_a A\right),$$

also

$$p = 100\cdot\left[1 - a^{(\log_a B_n - \log_a A)/n}\right].$$

Ist $A = 25\,500$, $n = 6$ und $B_n = 3000$, so ist $\log_{10}(B_n) \approx 3.47712$, $\log_{10}(A) \approx 4.40654$,

$$p \approx 100\cdot\left[1 - 10^{-0.92942/6}\right] \approx 100\cdot(1-0.7) = 30.$$

Der Prozentsatz beträgt etwa 30%. ∎

Lösung zu Aufgabe 5.15: a) Es ist offensichtlich $g * 1 = 1 * g = g$.

b) Ist $g \in G$, so ist $\mathrm{ggT}(g,p) = 1$. Nach Aufgabe 43 gibt es ganze Zahlen h und b, so dass $gh + bp = 1$ ist. Ist nun $h' \in G$ mit $h = h' + kp$, so ist $g * h' = 1$.

c) Ist $gh = q_1p + r_1$, so ist $g*h = r_1$. Ist $r_1m = q_2p + r_2$, so ist $(g*h)*m = r_1*m = r_2$. Andererseits ist $r_2 = r_1m - q_2p = ghm - q_1pm - q_2p = ghm - (q_1m + q_2)p$. Daraus folgt:

$$(g*h)*m = \text{ Rest von } ghm \text{ bei Division durch } P.$$

Für $g*(h*m)$ beweist man das Gleiche. Damit folgt das Assoziativgesetz. ∎

Kapitel 6

Lösung zu Aufgabe 6.1: Sei $b := f(0)$ und $a := f(1) - f(0)$. Nach Voraussetzung ist $f(1) \neq f(0)$, also $a \neq 0$. Ist $t \in \mathbb{R}$ beliebig, so setze man $p := t$, $q := 0$, $r := 1$ und $s := 0$. Dann ist

$$t = \frac{p-q}{r-s} = \frac{f(p)-f(q)}{f(r)-f(s)} = \frac{f(t)-f(0)}{f(1)-f(0)} = \frac{f(t)-b}{a}\,,$$

also $f(t) = at + b$. ∎

Lösung zu Aufgabe 6.2: Es gibt Zahlen a_1, a_2, b_1, b_2, so dass $a_1 \neq 0$ und $a_2 \neq 0$ ist, sowie

$$\begin{aligned} \mu_1 \circ f \circ \lambda_2^{-1}(t) \;=\; \lambda_1 \circ \lambda_2^{-1}(t) &= a_1 t + b_1 \\ \text{und} \quad \mu_2 \circ \mu_1^{-1}(t) &= a_2 t + b_2. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \mu_2 \circ f \circ \lambda_2^{-1}(t) &= \mu_2 \circ \mu_1^{-1}(\mu_1 \circ f \circ \lambda_2^{-1}(t)) \\ &= a_2(a_1 t + b_1) + b_2 \\ &= (a_1 a_2)t + (a_2 b_1 + b_2). \end{aligned}$$

Natürlich ist auch $a_1 a_2 \neq 0$. ∎

Lösung zu Aufgabe 6.3: 1) Sei $X \in L$ und $x := \lambda(x)$. Genau dann liegt X in $\overrightarrow{PQ}$, wenn P nicht zwischen X und Q liegt. Das ist genau dann der Fall, wenn 0 nicht zwischen x und 1 liegt, wenn also $-x = (x-0)/(0-1) \leq 0$ ist.

2) Es gibt Zahlen a, b mit $a \neq 0$, so dass $\lambda \circ \mu^{-1}(t) = at + b$ ist. Dann ist $b = \lambda \circ \mu^{-1}(0) = \lambda(P) = 0$. ∎

Lösung zu Aufgabe 6.4: Die Gleichung lässt sich nach y auflösen, $y = -(4/5)x - (6/5)$. Also ist $m := -4/5$ die Steigung der Geraden. Sie schneidet die y-Achse in $(0, -6/5)$ und die x-Achse in $(-3/2, 0)$. ∎

Lösung zu Aufgabe 6.5: (I) Addition der beiden Gleichungen ergibt

$$3x = 42, \quad \text{also } x = 14 \text{ und dann } 21 + 2y/3 = 27, \ \text{also } y = 3.$$

(II) Hier muss man vorsichtiger sein. Die Gleichungen sind für $x = 1$ und $y = -6$ nicht definiert. Unter Beachtung dieser Ausnahmeregeln kann man z.B.

$$u := 1/(x-1) \qquad \text{und} \qquad v := 1/(y+6)$$

setzen und das Gleichungssystem

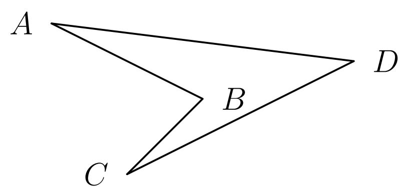
$$7u + 4v = 8 \quad \text{und} \quad 4u + 7v = 23/4$$

lösen, durch $u = 1$ und $v = 1/4$. Dann ist $x = 2$ und $y = -2$. Die Probe zeigt, dass das tatsächlich die Lösung ist. ∎

Lösung zu Aufgabe 6.6: a) Seien K_1 und K_2 zwei konvexe Mengen. Sind X und Y Punkte aus $K_1 \cap K_2$, so liegt ihre Verbindungsstrecke in K_1 uznd in K_2, also auch in $K_1 \cap K_2$.

b) Jede Halbebene ist konvex, also auch das Innere eines Winkels (als Durchschnitt zweier Halbebenen). Das Innere eines Dreiecks ist der Durchschnitt der Mengen der inneren Punkte der drei Winkel des Dreiecks.

Liegen die Punkte B und D auf **einer** Seite der Geraden AC (und keine drei von ihnen auf einer Geraden), so ist $ABCD$ ein nicht-konvexes Viereck.



∎

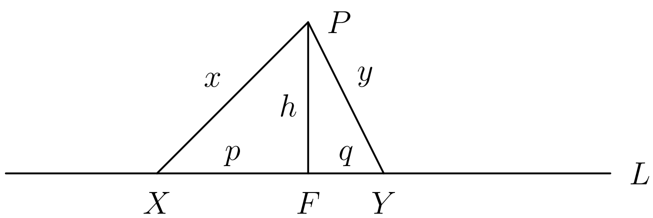
Lösung zu Aufgabe 6.7: Sei $ABCD$ das Parallelogramm. Man kann Koordinaten einführen, so dass $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (1,1)$ und $D = (0,1)$ ist. Die Diagonale durch A und C wird durch $y = x$ gegeben, die Diagonale durch B und D durch die Gleichung $y = 1 - x$. Der Schnittpunkt ist $S = (1/2, 1/2)$. Auf der ersten Diagonalen haben die Punkte A, S und C die Koordinaten $a = 0$, $s = 1/2$ und $c = 1$. Also ist $AS : SC = (0 - 1/2)/(1/2 - 1) = 1$. Bei der anderen Diagonalen geht's analog. ∎

Lösung zu Aufgabe 6.8: Ist der Winkel $\angle AOB$ gegeben, so führe man ein Koordinatensystem mit $O = (0,0)$, $A = (1,0)$ und $B = (0,1)$ ein. Dann ist $X = (x_0, y_0)$ mit $x_0 > 0$ und $y_0 > 0$. Ist $L = \{x = c\}$ eine vertikale Gerade, so schneidet L den Strahl $\overrightarrow{OA}$ im Punkt $(c, 0)$. Ist $L = \{y = mx + b\}$ schräg, so schneidet L die Gerade durch O und B in $(0, b)$. Ist $b \geq 0$, so ist man fertig. Ist $b < 0$, so muss $m = (y_0 - b)/x_0 > 0$ und L schneidet den Strahl $\overrightarrow{OA}$ im Punkt $(-b/m, 0)$. ∎

Lösung zu Aufgabe 6.9: Sei ABC das Dreieck und X der Punkt im Innern des Dreiecks. Nach Einführung geeigneter Koordinaten ist $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (0,1)$ und $X = (x_0, y_0)$, mit $x_0 > 0$, $y_0 > 0$ und $x_0 + y_0 < 1$.

Sei nun L die Gerade durch A und X. Dann ist $L = \{y = mx\}$, mit $m = y_0/x_0 > 0$. Man setze $(u_0, v_0) := (1/(m+1), m/(m+1))$. Dann ist $u_0 > 0$, $v_0 > 0$ und $u_0 + v_0 = 1$. Also liegt (u_0, v_0) auf L und auf der Seite BC. ■

Lösung zu Aufgabe 6.10: 1) Sei h die Länge des Lotes von P auf L, $p := d(F, X)$, $q := d(F, Y)$, $x := d(X, P)$ und $y := d(Y, P)$.



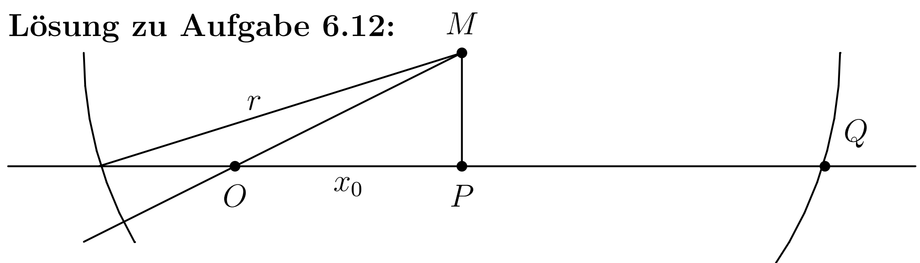
Es ist $p^2 + h^2 = x^2$ und $q^2 + h^2 = y^2$, also $p^2 = x^2 - h^2$ und $q^2 = y^2 - h^2$. Damit ist

$$\begin{aligned} x > y &\iff x^2 > y^2 \iff x^2 - h^2 > y^2 - h^2 \\ &\iff p^2 > q^2 \iff p > q. \end{aligned}$$

2) Sei X der Schnittpunkt von L und M. Außerdem sei P ein Punkt auf M und F der Fußpunkt des Lotes von P auf L, $x = d(X, F)$, $y = d(X, P)$ und $h = d(F, P)$. Dann ist $x^2 + h^2 = y^2$. Der Skalenfaktor m der orthogonalen Projektion ist die Zahl $m = (x - 0)/(y - 0)$. Offensichtlich ist $0 < m^2 < x^2/y^2 = x^2/(x^2 + h^2) \leq 1$, also $0 < |m| \leq 1$. ■

Lösung zu Aufgabe 6.11: Sei a die Dreiecksseite, die A gegenüberliegt, und b die Dreiecksseite, die B gegenüberliegt. Dann ist $a^2 + b^2 = (p+q)^2 = p^2 + q^2 + 2pq = (b^2 - h^2) + (a^2 - h^2) + 2pq$, also $h^2 = pq$. ■

Lösung zu Aufgabe 6.12:



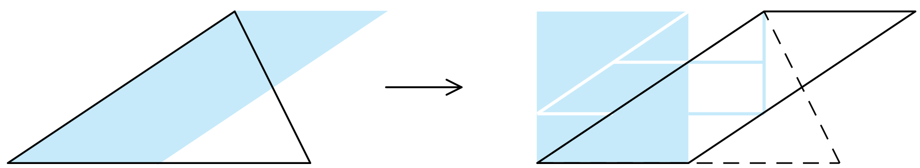
Es ist $x_0^2 + y_0^2 < r^2$, also $t := \sqrt{r^2 - y_0^2}$ eine positive reelle Zahl. Damit liegt $Q := (x_0 + t, 0)$ auf $\overrightarrow{OP}$. Außerdem ist $d(Q, M)^2 = t^2 + y_0^2 = r^2$, also $Q \in K_r(M)$. ■

Lösung zu Aufgabe 6.13: Wir können ein Koordinatensystem einführen, so dass $P = (-a, 0)$ und $Q = (a, 0)$ ist, mit $a > 0$. Die Mittelsenkrechte zu P und Q ist dann die y-Achse $\{(x, y) : x = 0\}$. Sei $X = (x_0, y_0)$ ein beliebiger Punkt. Dann gilt:

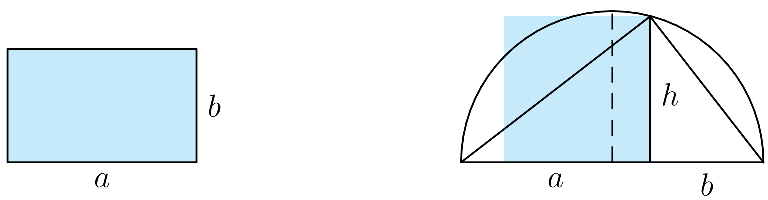
$$
\begin{aligned}
d(X,P) = d(X,Q) \quad &\Longleftrightarrow \quad (x_0 - a)^2 + y_0^2 = (x_0 + a)^2 + y_0^2 \\
&\Longleftrightarrow \quad a \cdot x_0 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_0 = 0.
\end{aligned}
$$

■

Lösung zu Aufgabe 6.14: 1) Man verwandle das Dreieck zunächst in ein Parallelogramm. Der zweite Schritt ist dann auf Grund der vorigen Aufgabe klar.



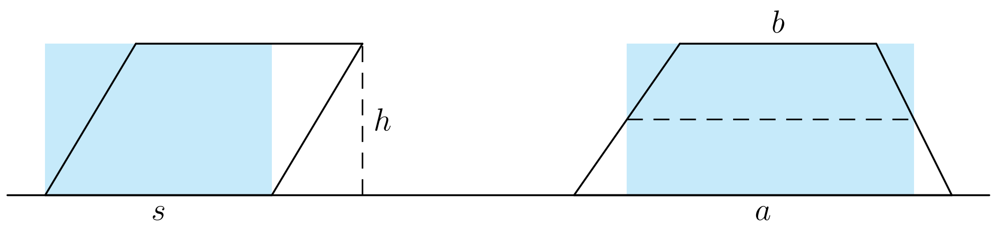
2) Man benutze den Halbkreis (mit Radius $(a+b)/2$) über einer Strecke der Länge $a+b$.



Wie schon früher gezeigt, ist $h^2 = a \cdot b$. ■

Lösung zu Aufgabe 6.15: Man kann das Polygongebiet in Dreiecksgebiete zerlegen. Ist G ein solches Dreiecksgebiet mit Grundlinie c und Höhe h, so ist $f(G)$ wieder ein Dreiecksgebiet, mit einer Grundlinie der Länge kc und einer Höhe der Länge kh. Dann ist $\mu(f(G)) = \dfrac{1}{2}(kc)(kh) = k^2 \cdot \dfrac{1}{2}ch = k^2\mu(G)$. ■

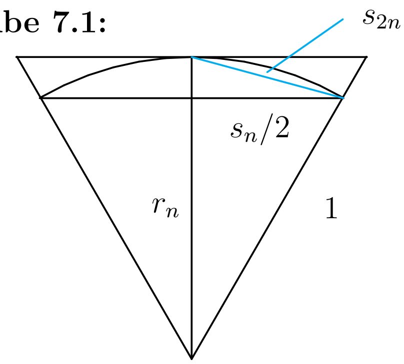
Lösung zu Aufgabe 6.16: Sei $ABCD$ das Parallelogramm bzw. Trapez. Man kann die Koordinaten so wählen, dass AB auf der x-Achse liegt.



Offensichtlich beträgt dann die Fläche des Parallelogramms $s \cdot h$, und die des Trapezes $h \cdot (a+b)/2$. ■

Kapitel 7

Lösung zu Aufgabe 7.1:



Es ist $(s_{2n})^2 = (s_n/2)^2 + (1-r_n)^2$ und $(s_n/2)^2 + r_n^2 = 1$. Aus der zweiten Gleichung folgt $2r_n = \sqrt{4-s_n^2}$. Setzt man dies in die erste Gleichung ein, so erhält man

$$(s_{2n})^2 = 2 - \sqrt{4-(s_n)^2}.$$

■

Lösung zu Aufgabe 7.2: Das 10-Eck setzt sich aus 10 kongruenten Dreiecken zusammen, deren eine Ecke O ist und deren andere Ecken auf dem Einheitskreis liegen. Der Basiswinkel des gleichschenkligen Dreiecks VWO beträgt $2\alpha = (180 - 36)/2 = 90 - 18 = 72$. Die Winkelhalbierende des Winkels $\angle OWV$ trifft OV in einem Punkt U und zuvor die Höhe h des Dreiecks VWO (von O nach VW) in einem Punkt X. Das Dreieck UVW enthält die Winkel α, 2α und $180 - 3\alpha = 180 - 108 = 72 = 2\alpha$, ist also ähnlich zu dem Dreieck VWO. Bezeichnen wir VW mit s und VU mit t, so ist $1 : s = OW : VW = VW : VU = s : t$, also $s^2 = t$.

Das Dreieck WOU besitzt gleiche Basiswinkel ($= \alpha$), ist also gleichschenklig. Damit ist $OU = WU = WV = s$ und $UV = 1 - s$, was die Gleichung $1 - s = s^2$ liefert, also $s = \dfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

Nun erhält man $h = \sqrt{1 - s^2/4} = \dfrac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$.

Weil $\alpha/2 = 18°$ ist, ist

$$\sin(18°) = \frac{s/2}{1} = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1) \quad \text{und} \quad \cos(18°) = \frac{h}{1} = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

■

Lösung zu Aufgabe 7.3: Man leitet leicht die folgenden Formeln her:

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} \quad \text{und} \quad \sin^2\alpha = \frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}\,.$$

Setzt man darin die Formeln $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$ und $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ ein, so erhält man

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

und

$$\cot(2\alpha) = \frac{1}{\tan(2\alpha)} = \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}\,.$$

■

Lösung zu Aufgabe 7.4: Die Höhe h von C auf c zerschneidet c in die Abschnitte p und q. Dann ist

$$p^2 + h^2 = b^2 \quad \text{und} \quad q^2 + h^2 = a^2.$$

Zusammen ergibt das

$$a^2 = q^2 + (b^2 - p^2) = b^2 + (p+q)^2 - 2p^2 - 2pq = b^2 + c^2 - 2pc.$$

Weil $p/b = \cos\alpha$ ist, folgt $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

Weil $h/b = \sin\alpha$ und $h/a = \sin\beta$ ist, ist $b\sin\alpha = a\sin\beta$, also

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}\,.$$

Vertauscht man die Rollen der Seiten, so erhält man weitere Formeln. ■

Lösung zu Aufgabe 7.5: Wir können annehmen, dass der Schnittpunkt der Nullpunkt ist, sowie $0 < m_1 < m_2 < +\infty$. Dann geht die erste Gerade durch $(0,0)$ und $(1, m_1)$, die zweite durch $(0,0)$ und $(1, m_2)$. Die Neigung der Geraden gegen die x-Achse sei durch Winkel α und β beschrieben, mit $m_1 = \tan(\alpha)$ und $m_2 = \tan(\beta)$. Der Schnittwinkel ist $\varphi := \beta - \alpha$.

Allgemein ist

$$\begin{aligned}
\tan(u+v) &= \frac{\sin(u+v)}{\cos(u+v)} = \frac{\sin u\cos v + \cos u \sin v}{\cos u\cos v - \sin u\sin v} \\
&= \frac{(\sin u\cos v + \cos u\sin v)/(\cos u\cos v)}{(\cos u\cos v - \sin u\sin v)/(\cos u\cos v)} \\
&= \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u\tan v}\,.
\end{aligned}$$

Damit ist $\tan\varphi = \dfrac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\,.$

Bei den Geraden $3x - 2y + 5 = 0$ und $2x + 7y + 8 = 0$ sind die Steigungen $m_1 = 3/2$ und $m_2 = -2/7 =$. Für den Schnittwinkel φ gilt dann

$$\tan\varphi = \frac{-2/7\ -\ 3/2}{1 + (3/2)(-2/7)} = \frac{-25/14}{8/14} = -\frac{25}{8} \approx -3.125\ldots,$$

also $\varphi \approx |\arctan(-3.125)| \approx 72.2553°$. ∎

Lösung zu Aufgabe 7.6: Es ist

$$\begin{aligned} \sin(3x) &= \sin(2x+x) = \sin(2x)\cos x + \cos(2x)\sin x \\ &= 2\sin x\cos^2 x + (\cos^2 x - \sin^2 x)\sin x \\ &= 2\sin x(1-\sin^2 x) + \sin x - 2\sin^2 x \sin x \\ &= 3\sin x - 4\sin^3 x. \end{aligned}$$

Die Gleichung $\sin(3x) - 2\sin(x) = 0$ wird damit zu der Gleichung $\sin x - 4\sin^3 x = 0$. Also ist entweder $\sin x = 0$ oder $\sin x = \pm 1/2$. Das bedeutet:

$$x = 0°, = 180° \text{ oder } = 360°,$$

oder

$$x = 30°, = 150°, = 210° \text{ oder } = 330°.$$

Nun zur zweiten Aufgabe! Es ist

$$\begin{aligned} 3\cos^2 x = \sin^2(2x) &\iff 3\cos^2 x = 4\sin^2 x\cos^2 x \\ &\iff \cos^2 x\Big(3 - 4\sin^2 x\Big) = 0 \\ &\iff \cos x = 0 \quad \text{oder} \quad \sin x = \pm\sqrt{3}/2 \\ &\iff x = 90°, = 270° \\ & \text{ oder } = 60°, = 120°, = 240°, = 300°. \end{aligned}$$

∎

Lösung zu Aufgabe 7.7: Sei $e := AB_1$ und $f := BA_1$, sowie

$$\alpha := \angle BAA_1,\ \alpha_1 := \angle BAB_1,\ \beta := \angle ABB_1 \quad \text{und} \quad \beta_1 := \angle ABA_1.$$

Da stets $\sin(180° - \varrho) = \sin\varrho$ ist, folgt im Dreieck ABB_1 aus dem Sinussatz die Gleichung

$$\frac{e}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin(\alpha_1+\beta)}$$

und im Dreieck ABA_1 die Gleichung

$$\frac{d}{\sin\beta_1} = \frac{a}{\sin(\alpha+\beta_1)}\,.$$

Der Cosinussatz liefert schließlich im Dreieck AB_1A_1 die Beziehung

$$c^2 = e^2 + d^2 - 2ed\cos(\alpha - \alpha_1).$$

Mit den obigen Gleichungen für e und d erhält man nun c aus a und den gegebenen Winkeln. ∎

Lösung zu Aufgabe 7.8: Sei $x_0 = r\cos\alpha$ und $y_0 = r\sin\alpha$. Die Steigung der Geraden $L' = \{y = m'x\}$ durch $(0,0)$ und (x_0, y_0) ist die Zahl $m' = \tan\alpha = y_0/x_0$. Die Gerade L, die in (x_0, y_0) auf L' senkrecht steht, hat die Gestalt $L = \{y = m(x - x_0) + y_0\}$ mit $m = -1/m' = -x_0/y_0$.

Ist $(x, y) \in L$, $(x, y) \neq (x_0, y_0)$, so bilden die Punkte $O = (0,0)$, $X_0 := (x_0, y_0)$ und $X = (x, y)$ ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse OX. Daher ist $d(O, X)$ länger als $d(O, X_0) = r$ und damit X kein Punkt von K. ∎

Lösung zu Aufgabe 7.9: Die Ellipse ist gegeben durch $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, hat also Mittelpunkt $(0,0)$ und die Halbachsen $a = 5$ und $b = 3$.

Liegt (x, y) auf der Geraden, so ist $3x = 3 - 5y$. Setzt man das in die Ellipsengleichung ein, so erhält man die Gleichung

$$25(9 - y^2) = 9x^2 = (3 - 5y)^2 = 9 + 25y^2 - 30y,$$

also $50y^2 - 30y - 216 =$. Die Lösungsformel für quadratische Gleichungen liefert

$$y = \frac{30 \pm \sqrt{900 + 200 \cdot 216}}{100} = \frac{3 \pm \sqrt{441}}{10} = \frac{3 \pm 21}{10} = \begin{cases} 12/5 \\ -9/5. \end{cases}$$

Die beiden Schnittpunkte sind somit $P_1 = (-3,\ 12/5)$ und $P_2 = (4,\ -9/5)$. ∎

Lösung zu Aufgabe 7.10: Seien A, B zwei verschiedene Punkte auf L, so wie C ein Punkt, der nicht auf L liegt. Dann gibt es genau eine Bewegung f mit $f(A) = (0,0)$, $f(B) = (r, 0)$ (mit $r := d(A, B)$) und $f(C) \in H^+$. Ist $S(x, y) := (x, -y)$ die Spiegelung an der x-Achse, so ist $g := f^{-1} \circ S \circ f$ eine Bewegung mit

$$g(A) = A, \quad g(B) = B \quad \text{ und } \quad g(C) = C' \neq C,\ C' \notin L.$$

Da g Geraden auf Geraden abbildet, lässt g die Gerade L punktweise fest.

Sei X ein beliebiger Punkt außerhalb von L und $f(X) = (u, v)$. Dann ist $X' = g(X) = f^{-1}(u, -v)$, also $f \circ g(X) = (u, -v)$. Damit bildet f die Gerade durch X und $g(X)$ auf die Gerade $\widetilde{L} := \{(u, t) \,:\, t \in \mathbb{R}\}$ ab. Die trifft die x-Achse in $(u, 0)$. Der Punkt $P := f^{-1}(u, 0)$ liegt auf L und zugleich auf der Verbindungsgeraden G von X und $g(X)$. Das bedeutet, dass X und $g(X)$ auf verschiedenen Seiten von L liegen.

Die Eindeutigkeit von g folgt wie üblich.

Weil f Winkel respektiert, treffen sich G und L unter einem Winkel von $90°$. Weil X und $g(X)$ den gleichen Abstand zu L haben, liegen sie spiegelbildlich zu L. ∎

Lösung zu Aufgabe 7.11: Seien $X_1, X_2 \in \mathrm{Fix}(\varphi)$, $X_1 \neq X_2$. Sei X ein Punkt, der nicht auf der Geraden L durch X_1 und X_2 liegt. Es gibt genau eine Bewegung

g, die X_1 auf O, X_2 auf einen Punkt $P = (r, 0)$ und X auf einen Punkt $Q \in H^+$ abbildet.

Die Bewegung $g \circ \varphi$ bildet ebenfalls X_1 auf O und X_2 auf P ab. Liegt $g \circ \varphi(X)$ auch in H^+, so ist $g = g \circ \varphi$ und $\varphi = \mathrm{id}$. Liegt dagegen $g \circ \varphi(X)$ in der unteren Halbebene, so ist $g = S \circ g \circ \varphi$, also $\varphi = g^{-1} \circ S \circ g$ die Spiegelung an L. ■

Kapitel 8

Lösung zu Aufgabe 8.1: 1) Es ist $\mathfrak{x} - \mathfrak{a} = \lambda(\mathfrak{b} - \mathfrak{a}) = \lambda(\mathfrak{b} - \mathfrak{x}) + \lambda(\mathfrak{x} - \mathfrak{a})$, also

$$(1 - \lambda)(\mathfrak{x} - \mathfrak{a}) = \lambda(\mathfrak{b} - \mathfrak{x}) = (1 - \lambda)\frac{\beta}{\alpha}(\mathfrak{b} - \mathfrak{x}).$$

Daraus folgt die Gleichung $\alpha(\mathfrak{x} - \mathfrak{a}) = \beta(\mathfrak{b} - \mathfrak{a})$.

2) Aus (1) folgt: $\alpha\mathfrak{x} + \beta\mathfrak{x} = \beta\mathfrak{b} + \alpha\mathfrak{a}$, also

$$\mathfrak{x} = \frac{1}{\alpha + \beta}(\alpha\mathfrak{a} + \beta\mathfrak{b}).$$

■

Lösung zu Aufgabe 8.2: Es ist $\mathfrak{z} - \mathfrak{u} = \frac{1}{2}(\mathfrak{c} - \mathfrak{a})$, sowie

$$\begin{aligned}
\mathfrak{w} - \mathfrak{v} &= \mathfrak{c} - \mathfrak{a} + \frac{1}{2}(\mathfrak{a} - \mathfrak{c}) = \frac{1}{2}(\mathfrak{c} - \mathfrak{a}) = \mathfrak{z} - \mathfrak{u}, \\
\mathfrak{v} - \mathfrak{u} &= \mathfrak{a} + \frac{1}{2}(\mathfrak{b} - \mathfrak{a}) - \frac{1}{2}\mathfrak{a} = \frac{1}{2}\mathfrak{b} \\
\text{und } \mathfrak{w} - \mathfrak{z} &= \mathfrak{c} + \frac{1}{2}(\mathfrak{b} - \mathfrak{c}) - \frac{1}{2}\mathfrak{c} = \frac{1}{2}\mathfrak{b}.
\end{aligned}$$

Es sei nun A ein beliebiger Punkt. Betrachtet man das Viereck mit den Ecken A, $B := A + \mathfrak{a}$, $C := A + \mathfrak{b}$ und $D := A + \mathfrak{c}$, so bilden die Punkte $U := A + \mathfrak{u}$, $V := A + \mathfrak{v}$, $W := A + \mathfrak{w}$ und $A + \mathfrak{z}$ die Mittelpunkte der Seiten des Vierecks $ABCD$. Die Aufgabe zeigt, dass diese Mittelpunkte ein Parallelogramm bilden, ■

Lösung zu Aufgabe 8.3: 1) Ist $\alpha\mathfrak{x} + \beta\mathfrak{y} + \gamma\mathfrak{z} = \mathfrak{o}$, so liefert das entsprechende Gleichungssystem, dass $\alpha = \beta = \gamma = 0$ ist. Die Vektoren sind also linear unabhängig.

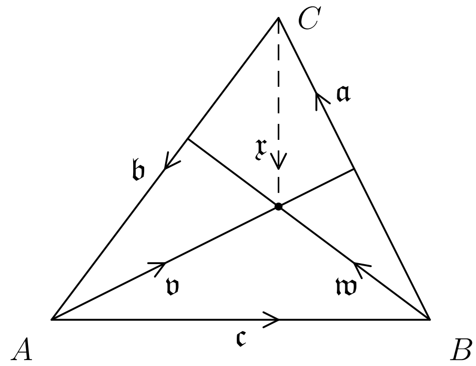
2) Es ist $(5, 2, 3) = (1, -1, 2) + (4, 3, 1)$. Die Vektoren sind linear abhängig. ■

Lösung zu Aufgabe 8.4: Ein Punkt auf der Geraden L hat die Gestalt $(x, y, z) = (2, 1 + 6t, 7 + 4t)$, mit $t \in \mathbb{R}$. Er ist Schnittpunkt mit der xy-, der xz- bzw. der yz-Ebene, wenn die Gleichung $7 + 4t = 0$, $1 + 6t = 0$ bzw. $2 = 0$ erfüllt ist. Also gibt es keinen Schnittpunkt mit der yz-Ebene. Der Schnittpunkt mit der xy-Ebene ist $(2, -19/2, 0)$, der Schnittpunkt mit der xz-Ebene ist $(2, 0, 19/3)$. ■

Lösung zu Aufgabe 8.5: 1) Der Cosinussatz besagt: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$. Tatsächlich ist

$$\begin{aligned}
\|\mathfrak{a}\|^2 &= \mathfrak{a} \bullet \mathfrak{a} = (-\mathfrak{c} - \mathfrak{b}) \bullet (-\mathfrak{c} - \mathfrak{b}) \\
&= \|\mathfrak{c}\|^2 + \|\mathfrak{b}\|^2 + 2\mathfrak{b} \bullet \mathfrak{c} \\
&= \|\mathfrak{b}\|^2 + \|\mathfrak{c}\|^2 + 2\|\mathfrak{b}\| \cdot \|\mathfrak{c}\| \cdot \cos(\mathfrak{b}, \mathfrak{c}) \\
&= \|\mathfrak{b}\|^2 + \|\mathfrak{c}\|^2 - 2\|\mathfrak{b}\| \cdot \|\mathfrak{c}\| \cdot \cos(\alpha).
\end{aligned}$$

2) Es geht um folgende Situation:



Es ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{w} - \mathfrak{x}$ und $\mathfrak{b} = \mathfrak{x} - \mathfrak{v}$, also

$$\mathfrak{v} \bullet \mathfrak{w} - \mathfrak{v} \bullet \mathfrak{x} = \mathfrak{v} \bullet (\mathfrak{w} - \mathfrak{x}) = \mathfrak{v} \bullet \mathfrak{a} = 0$$

und

$$\mathfrak{w} \bullet \mathfrak{x} - \mathfrak{w} \bullet \mathfrak{v} = \mathfrak{w} \bullet (\mathfrak{x} - \mathfrak{v}) = \mathfrak{w} \bullet \mathfrak{b} = 0.$$

Daraus folgt

$$\mathfrak{c} \bullet \mathfrak{x} = (\mathfrak{v} - \mathfrak{w}) \bullet \mathfrak{x} = \mathfrak{v} \bullet \mathfrak{x} - \mathfrak{w} \bullet \mathfrak{x} = \mathfrak{v} \bullet \mathfrak{w} - \mathfrak{v} \bullet \mathfrak{w} = 0.$$

Die drei Höhen eines Dreiecks treffen sich in einem Punkt. ■

Lösung zu Aufgabe 8.6: Die Vektoren $\mathfrak{a} := \mathfrak{x}_0 - \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{b} := \mathfrak{x}_0 + \mathfrak{v} - \mathfrak{p}$ verbinden $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{x}_0$ bzw. $\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{v}$, liegen also in der gesuchten Ebene. Wären sie linear abhängig, so lägen $\mathfrak{x}_0 = \mathfrak{p} + \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{v} = \mathfrak{p} + \mathfrak{b}$ beide auf einer Geraden, die $\mathfrak{p}$ enthält. Diese Gerade müsste L sein, aber das ist unmöglich. Also sind sie linear unabhängig, und die gesuchte Ebene ist

$$E := \{\mathfrak{p} + t_1\mathfrak{a} + t_2\mathfrak{b} \,:\, t_1, t_2 \in \mathbb{R}\} = \{\mathfrak{p} + s_1(\mathfrak{x}_0 - \mathfrak{p}) + s_2\mathfrak{v} \,:\, s_1, s_2 \in \mathbb{R}\}.$$

■

Lösung zu Aufgabe 8.7: 1) Sei $E = \{\mathfrak{x}_0 + t\mathfrak{v} + s\mathfrak{w} \,:\, t, s \in \mathbb{R}\}$.

a) Ist $\mathfrak{x} \in E$, so ist $\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0 = t\mathfrak{v} + s\mathfrak{w}$, also $(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0) \bullet \mathfrak{n} = 0$.

b) Sei umgekehrt $(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0) \bullet \mathfrak{n} = 0$. Da $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{n}$ linear unabhängig sind, ist $\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0 = a\mathfrak{v} + b\mathfrak{w} + c\mathfrak{n}$. Also ist

$$0 = (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0) \bullet \mathfrak{n} = c \quad \text{ und } \quad \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + a\mathfrak{v} + b\mathfrak{w} \in E.$$

2) Im Text wird die Hesse'sche Normalform für Geraden in der Ebene behandelt. Hier geht es jetzt um die Hesse'sche Normalform einer Ebene im Raum. Ist $p := \mathfrak{x}_0 \bullet \mathfrak{n}$, so ist $E = \{\mathfrak{x} \,:\, \mathfrak{x} \bullet \mathfrak{n} = p\}$.

Offensichtlich ist $p\mathfrak{n} \in E$, also $p\mathfrak{n} = \mathfrak{x}_0 + a\mathfrak{v} + b\mathfrak{w}$, mit geeigneten Faktoren a und b. Ist $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + s\mathfrak{v} + t\mathfrak{w} \in E$ beliebig, so ist

$$\begin{aligned}
\|\mathfrak{x}\|^2 &= \|\mathfrak{x}_0 + s\mathfrak{v} + t\mathfrak{w}\|^2 \\
&= \|\mathfrak{x}_0 + a\mathfrak{v} + b\mathfrak{w} + (s-a)\mathfrak{v} + (t-b)\mathfrak{w}\|^2 \\
&= (p\mathfrak{n} + (s-a)\mathfrak{v} + (t-b)\mathfrak{w}) \bullet (p\mathfrak{n} + (s-a)\mathfrak{v} + (t-b)\mathfrak{w}) \\
&= p^2 + \|(s-a)\mathfrak{v} + (t-b)\mathfrak{w}\|^2 \ge p^2.
\end{aligned}$$

Also ist $\|\mathfrak{x}\| \ge |p|$ und $\|p\mathfrak{n}\| = |p|$. Das zeigt, dass $|p|$ der Abstand der Ebene vom Nullpunkt ist.

3) Sei L die Gerade, die auf E senkrecht steht und durch $\mathfrak{z}$ geht. Dann ist $L = \{\mathfrak{x} = \mathfrak{z} + t\mathfrak{n} \,:\, t \in \mathbb{R}\}$. Sei $\mathfrak{z}_0 = \mathfrak{z} + t_0\mathfrak{n}$ der Schnittpunkt von E und L. Ist nun $\mathfrak{x} \in E$ beliebig, so ist

$$(\mathfrak{x} - \mathfrak{z}_0) \bullet (\mathfrak{z}_0 - \mathfrak{z}) = (\mathfrak{x} - \mathfrak{z}_0) \bullet t_0\mathfrak{n} = 0,$$

also

$$\|\mathfrak{x} - \mathfrak{z}\|^2 = \|(\mathfrak{x} - \mathfrak{z}_0) + (\mathfrak{z}_0 - \mathfrak{z})\|^2 = \|\mathfrak{x} - \mathfrak{z}_0\|^2 + \|\mathfrak{z}_0 - \mathfrak{z}\|^2 \ge \|\mathfrak{z}_0 - \mathfrak{z}\|^2.$$

Damit ist $d := \|\mathfrak{z}_0 - \mathfrak{z}\| = |t_0|$ der Abstand von $\mathfrak{z}$ und E.

Nun ist $p = \mathfrak{z}_0 \bullet \mathfrak{n} = \mathfrak{z} \bullet \mathfrak{n} + t_0$, also $d = |\mathfrak{z} \bullet \mathfrak{n} - p| = |(\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_0) \bullet \mathfrak{n}| = |(\mathfrak{z} - \mathfrak{x}_0) \bullet \mathfrak{n}|$. ■

Lösung zu Aufgabe 8.8: Man kann das Ergebnis der vorigen Aufgabe verwenden. Hier ist $E = \{\mathfrak{x} \,:\, \mathfrak{x} \bullet \mathfrak{n} = p\}$, mit $\mathfrak{n} := (1/3, -2/3, 2/3)$ und $p := 3$. Dann ist $d = |p - \mathfrak{z} \bullet \mathfrak{n}| = 6$. Außerdem ist $\mathfrak{z} - 6\mathfrak{n} = (3, 5, 8) \in E$. Also wird der Abstand in diesem Punkt angenommen. ■

Lösung zu Aufgabe 8.9: 1. Fall: $\mathfrak{v} \bullet \mathfrak{n} = 0$. Dann ist L parallel zu E. Ist außerdem $(\mathfrak{x}_0 - \mathfrak{a}) \bullet \mathfrak{n} = 0$, so ist $L \subset E$. Ist $(\mathfrak{x}_0 - \mathfrak{a}) \bullet \mathfrak{n} \ne 0$, so ist $L \cap E = \varnothing$.

2. Fall: Ist $\mathfrak{v} \bullet \mathfrak{n} \ne 0$, so sind L und E nicht parallel und es gibt ein $\mathfrak{s} \in L \cap E$. Dann ist $(\mathfrak{s} - \mathfrak{x}_0) \bullet \mathfrak{n} = 0$, und es gibt ein t_0 mit $\mathfrak{s} = \mathfrak{a} + t_0\mathfrak{v}$. Es folgt:

$$(\mathfrak{a} + t_0\mathfrak{v} - \mathfrak{x}_0) \bullet \mathfrak{n} = 0, \text{ also } t_0(\mathfrak{v} \bullet \mathfrak{n}) = (\mathfrak{x}_0 - \mathfrak{a}) \bullet \mathfrak{n}.$$

Damit ist

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{a} + \frac{(\mathfrak{x}_0 - \mathfrak{a}) \bullet \mathfrak{n}}{\mathfrak{v} \bullet \mathfrak{n}}\, \mathfrak{v},$$

und das ist der einzige Punkt in $L \cap E$. ■

Lösung zu Aufgabe 8.10: Es werden die Bezeichnungen der vorigen Aufgabe benutzt. Hier ist

$$\mathfrak{a} = (6, 2, 0), \ \mathfrak{v} = (1, 0, -1), \ \mathfrak{x}_0 = (0, -2, 0) \text{ und } \mathfrak{n} = (2/3, -1/3, -2/3),$$

also $\mathfrak{v} \bullet \mathfrak{n} = 4/3 \neq 0$. Es folgt, dass $L \cap E$ aus einem einzigen Punkt besteht, nämlich

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{a} + \frac{(\mathfrak{x}_0 - \mathfrak{a}) \bullet \mathfrak{n}}{\mathfrak{v} \bullet \mathfrak{n}} \, \mathfrak{v} = (6,2,0) + \frac{-8/3}{4/3}(1,0,-1) = (4,2,2).$$

■

Lösung zu Aufgabe 8.11: Es ist $E = \{\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + s\mathfrak{v} + t\mathfrak{w} \ : \ s,t \in \mathbb{R}\}$, mit $\mathfrak{v} := \mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1 = (2,-2,-3)$ und $\mathfrak{w} = \mathfrak{x}_3 - \mathfrak{x}_1 = (3,0,-9)$. Nun werden α und β gesucht, mit $\mathfrak{z} - \mathfrak{x}_1 = (-1,2,0) = \alpha\mathfrak{v} + \beta\mathfrak{w} = (2\alpha + 3\beta, -2\alpha, -3\alpha - 9\beta)$. Das geht mit $\alpha = -1$ und $\beta = 1/3$. Also liegt $\mathfrak{z}$ in E. ■

Lösung zu Aufgabe 8.12: Schreibe $\mathfrak{x}_0 = \mathfrak{a} + t_0\mathfrak{v}$. Dann ist $0 = (\mathfrak{z} - \mathfrak{x}_0) \bullet \mathfrak{v} = \mathfrak{z} \bullet \mathfrak{v} - \mathfrak{a} \bullet \mathfrak{v} - t_0 \cdot \mathfrak{v} \bullet \mathfrak{v}$, also

$$t_0 := \frac{\mathfrak{z} \bullet \mathfrak{v} - \mathfrak{a} \bullet \mathfrak{v}}{\mathfrak{v} \bullet \mathfrak{v}} \, .$$

Der Abstand von $\mathfrak{z}$ und L ist die Zahl

$$d := \|\mathfrak{z} - \mathfrak{x}_0\| = \|\mathfrak{z} - \mathfrak{a} - \frac{(\mathfrak{z} - \mathfrak{a}) \bullet \mathfrak{v}}{\mathfrak{v} \bullet \mathfrak{v}} \, \mathfrak{v}\|.$$

■

Lösung zu Aufgabe 8.13: Sei $\mathfrak{a}_1 = \dfrac{1}{\|\mathfrak{v}_1\|}\,\mathfrak{v}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)$, $\widetilde{\mathfrak{a}}_2 := \mathfrak{v}_2 - (\mathfrak{v}_2 \bullet \mathfrak{a}_1)\mathfrak{a}_1 = (2,-2,2)$ und $\mathfrak{a}_2 := \dfrac{1}{\|\widetilde{\mathfrak{a}}_2\|}\,\widetilde{\mathfrak{a}}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$. Schließlich setzen wir $\widetilde{\mathfrak{a}}_3 := (1,2,1) \times (1,-1,1) = (3,0,-3)$ und $\mathfrak{a}_3 := \dfrac{1}{\|\widetilde{\mathfrak{a}}_3\|}\,\widetilde{\mathfrak{a}}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$. ■

Lösung zu Aufgabe 8.14: Wir haben die Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Vertauscht man die ersten beiden Zeilen und subtrahiert man dann das 3-Fache der ersten Zeile von der zweiten Zeile, so erhält man

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -8 & -7 \\ 0 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Jetzt kann man noch die zweite Zeile zur dritten Zeile addieren und erhält das reduzierte Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 3x_2 & = & -4x_3 \\ & & 8x_2 & = & -7x_3. \end{array}$$

Eine Variable kann bestimmt werden, wir setzen $x_3 := 1$. Dann ist $x_2 := -7/8$ und $x_1 := -11/8$. Die Lösungsmenge besteht aus allen Vielfachen von $\mathfrak{a} := (-11, -7, 8)$.

∎

Lösung zu Aufgabe 8.15: 1) $\mathfrak{x}$ liegt genau dann in E, wenn es Zahlen $s, t \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0 = s\mathfrak{u} + t\mathfrak{v}$ ist. Aus dieser Gleichung folgt die Beziehung

$$(\mathfrak{u} \times \mathfrak{v}) \bullet (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0) = s(\mathfrak{u} \times \mathfrak{v}) \bullet \mathfrak{u} + t(\mathfrak{u} \times \mathfrak{v}) \bullet \mathfrak{v} = 0.$$

Ist umgekehrt $(\mathfrak{u} \times \mathfrak{v}) \bullet (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0) = 0$, so steht $\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0$ auf $\mathfrak{u} \times \mathfrak{v}$ senkrecht, muss also eine Linearkombination von $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ sein.

2) $\mathfrak{x}$ liegt genau dann in L, wenn es ein $t \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0 = t\mathfrak{v}$ ist. Aber dann ist $\mathfrak{v} \times (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0) = \mathfrak{v} \times (t\mathfrak{v}) = \mathfrak{o}$.

Sei umgekehrt $\mathfrak{v} \times (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0) = \mathfrak{o}$ und $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{x}_0$. Dann ist $\|\mathfrak{v}\| \cdot \|\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0\| \cdot \sin(\mathfrak{v}, \mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0) = 0$, also $\angle(\mathfrak{v}, \mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0) = 0$. Das bedeutet, dass $\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0$ ein Vielfaches von $\mathfrak{v}$ ist, also $\mathfrak{x} \in L$.

∎

Kapitel 9

Lösung zu Aufgabe 9.1: 1) Sei $x_1 \in M$ und $x_2 \in \mathbb{R} \setminus M$. O.B.d.A. sei $x_1 < x_2$. Dann definiere man $x_0 := \sup\{x \in [x_1, x_2] \,:\, x \in M\}$. Es ist $x_1 \le x_0 \le x_2$.

1. Fall: Ist $x_0 \in M$, so ist $x_0 < x_2$, und in jeder ε-Umgebung von x_0 liegt ein $x \in \mathbb{R} \setminus M$. Also ist x_0 ein Randpunkt von M.

2. Fall: Ist $x_0 \notin M$, so ist $x_1 < x_0$, und in jeder ε-Umgebung von x_0 liegt ein $x \in M$. Auch dann ist x_0 ein Randpunkt.

2) Ist $q \in \mathbb{Q}$, so muss jede ε-Umgebung Punkte von $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ enthalten, denn die Umgebung ist keine abzählbare Menge, im Gegensatz zu $\mathbb{Q}$. Ist $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig, so gibt es eine Folge (q_ν) von rationalen Zahlen, die gegen x_0 konvergiert. Jede ε-Umgebung von x_0 enthält deshalb rationale und irrationale Zahlen. Deshalb ist x_0 Randpunkt von $\mathbb{Q}$. ■

Lösung zu Aufgabe 9.2: Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und (x_ν) eine Folge von reellen Zahlen, die gegen x_0 konvergiert. Dann ist $x_\nu = x_0 + q_\nu$, mit einer gegen 0 konvergenten Folge (q_ν). Es folgt:

$$f(x_\nu) = f(x_0 + q_\nu) = f(x_0) + f(q_\nu) \to f(x_0) + f(0) = f(x_0 + 0) = f(x_0).$$

Also ist f stetig in x_0. ■

Lösung zu Aufgabe 9.3: Es ist $x^k - 1 = (x-1) \cdot \sum_{\nu=0}^{k-1} x^\nu$. Also kann man in $f(x)$ den Faktor $x - 1$ herauskürzen und erhält, dass $f(x)$ für $x \to 1$ gegen n/m konvergiert. Diesen Wert kann man einsetzen. ■

Lösung zu Aufgabe 9.4: 1) Eine simple Anwendung der Grenzwertsätze ergibt:

$$\lim_{x\to 6}(2x^3 - 24x + x^2) = 12 \cdot 36 - 4 \cdot 36 + 36 = (12 - 4 + 1) \cdot 36 = 9 \cdot 36 = 324.$$

2) Polynomdivision ergibt $x^2 + 7x + 10 = (x+2)(x+5)$. Also ist

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2 + 7x + 10}{(x-7)(x+2)} = \lim_{x\to -2} \frac{x+5}{x-7} = -1/3.$$

3) Es ist $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^3}{x^3 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{1 + x + x^2} = 0.$ ■

Lösung zu Aufgabe 9.5: Polynomdivision ergibt $f(x) = x^2 - x + 1$. Offensichtlich ist $f(-1) = 3$ und daher $f(x) - f(-1) = f(x) - 3 = x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$.

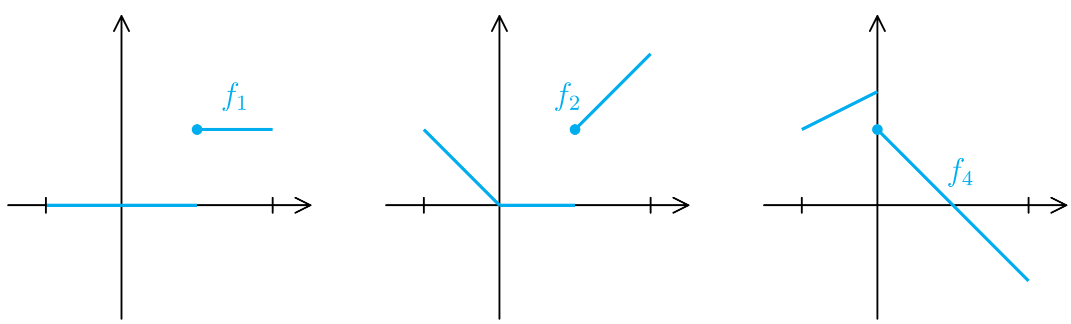
Ist $\delta > 0$ eine kleine Zahl und $|x+1| < \delta$, so ist $|(x+1)(x-2)| < \delta(\,|x|+2) \le 4\delta$. Das legt folgendes nahe:

Ist $\varepsilon = 0.1 = 1/10$ vorgegeben, so wähle man $\delta < \varepsilon/4$ und $|x+1| < \delta$. Dann ist $-1/40 < x+1 < 1/40$, also $-2 < -1 - 1/40 < x < -1 + 1/40 < 2$, d.h. $|x| < 2$. Dann ist $\delta(\,|x|+2) < 4\delta < \varepsilon$. Für $|x+1| < 1/40$ ist also $|f(x) - 3| < 1/10$. ∎

Lösung zu Aufgabe 9.6: Die Funktion $b(x) := |x|$ ist stetig. Im Nullpunkt ist das klar, und außerhalb des Nullpunktes stimmt sie mit $x \mapsto x$ oder mit $x \mapsto -x$ überein und ist deshalb stetig. Daraus folgt, dass $|f| = b \circ f$ stetig ist.

Und dann ist auch $\max(f,g) = \dfrac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ stetig. ∎

Lösung zu Aufgabe 9.7: Hier sind einige Graphen:



Der Leser möge die Fragen für die gezeichneten Funktionen selbst beantworten. Die Funktion f_3 ist in $x = -1/2$ nicht definiert und es gibt dort auch keine einseitigen Grenzwerte. In allen anderen Punkten ist f_3 stetig. ∎

Lösung zu Aufgabe 9.8: Es ist $f(x) = |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & x \le -1, \\ 1 - x^2 & -1 < x < 1, \\ x^2 - 1 & x \ge 1. \end{cases}$

In den Punkten $x \ne \pm 1$ ist f differenzierbar. Weiter ist

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \begin{cases} x + 1 \to 2 & \text{für } x > 1, \\ -x - 1 \to -2 & \text{für } x < 1. \end{cases}$$

Bei $x = -1$ sieht es entsprechend aus. Also ist f in $x = 1$ und $x = -1$ nicht differenzierbar. ∎

Lösung zu Aufgabe 9.9: Ist $x_1 < x_2$, so gibt es ein $x \in (x_1, x_2)$ mit $\left|\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}\right| = |f'(x)|$ (Mittelwertsatz). Daraus folgt die Behauptung. ∎

Lösung zu Aufgabe 9.10: Zu jedem x in der Nähe von x_0 gibt es ein ξ zwischen

x_0 und x mit $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi)$. Daraus folgt, dass f in x_0 differenzierbar und $f'(x_0) = c$ ist. ■

Lösung zu Aufgabe 9.11: a) Es ist $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \dfrac{4 - 1}{2 - 1} = 3$ und $f'(x) = 2x$. Also kann man $x_0 = 3/2$ setzen.

b) Hier ist $(f(b) - f(a))/(b - a) = 2$ und $f'(x) = 3x^2 - 2x$. Es ist $f'(x_0) = 2 \iff x_0 = 1/3 \pm \sqrt{7}/3$. Der Punkt $x_0 := 1/3 + \sqrt{7}/3$ liegt zwischen 0 und 2. ■

Lösung zu Aufgabe 9.12: Für $x \neq 0$ ist $f'(x) = 1 + 4x \sin(1/x) - 2\cos(1/x)$, und das konvergiert nicht für $x \to 0$.

$\dfrac{f(x)}{x} = 1 + 2x \sin(1/x)$ strebt für $x \to 0$ gegen 1. Also ist f in $x = 0$ differenzierbar und $f'(0) = 1$.

Weil $f'\bigl(1/(2\pi n)\bigr)$ für $n \to \infty$ gegen -1 und $f'\bigl(2/((4n + 1)\pi)\bigr)$ für $n \to \infty$ gegen $+1$ konvergiert, gibt es kein $\varepsilon > 0$, so dass $f'(x) \geq 0$ für $|x| < \varepsilon$ ist. f wächst auf keiner Umgebung von 0 streng monoton. ■

Lösung zu Aufgabe 9.13: Es ist

$$f_1'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}, \quad f_2'(x) = 3x^2 - 2x - 5 \text{ und } f_3'(x) = \frac{8x - 8}{(8 - 2x^2)^{3/2}}.$$

■

Lösung zu Aufgabe 9.14: 1) Es ist $f'(x) = \dfrac{3}{8}(x^2 - 6x + 5)$ und $f''(x) = \frac{3}{4}(x - 3)$. Dann ist $f'(x) = 0 \iff x = 1$ oder $x = 5$. Weil $f''(1) < 0$ und $f''(5) > 0$ ist, liegt in $x = 1$ ein Maximum und in $x = 5$ ein Minimum vor.

2) Es ist $g'(x) = 1 + \cos x$ und $g''(x) = -\sin x$. Nun ist $g'(x) = 0 \iff x = \pi + 2\pi n$ und $g''(\pi + 2\pi n) = 0$. Weil $g'''(\pi) = 1$ ist, liegen nur Wendepunkte vor, keine Extremwerte.

3) Es ist

$$h'(x) = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} \quad \text{und} \quad h''(x) = \frac{2x(x - 3)}{(1 + x^2)^3}.$$

Also ist $h'(x) = 0 \iff x = \pm 1$, $h''(1) = -1/2 < 0$ und $h''(-1) = 1 > 0$. Das ergibt ein Maximum und ein Minimum.

4) Es ist $q'(x) = \dfrac{3}{8}(4x - x^2)$ und $q''(x) = \dfrac{3}{4}(2 - x)$, also $q'(x) = 0 \iff x = 0$ oder $x = 4$, sowie $q''(0) > 0$ (Minimum) und $q''(4) < 0$ (Maximum). ■

Lösung zu Aufgabe 9.15: Es ist

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 2ax + b, \\ f''(x) &= 6x + 2a \\ \text{und} \quad f'''(x) &= 6. \end{aligned}$$

a) $f''(x) = 0 \iff x = -a/3$. In diesem Punkt liegt offensichtlich immer ein Wendepunkt vor.

b) $f'(x) = 0 \iff x = -\frac{a}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{a^2 - 3b}$. Ist $a^2 - 3b > 0$, also $|a| > \sqrt{3b}$, so hat f' zwei Nullstellen. In diesem Falle erhält man ein isoliertes Minimum und ein isoliertes Maximum. ∎

Lösung zu Aufgabe 9.16: Man stellt ein Gleichungssystem auf und erhält $b = 2$, $c = -4$ und $d = -3$. ∎

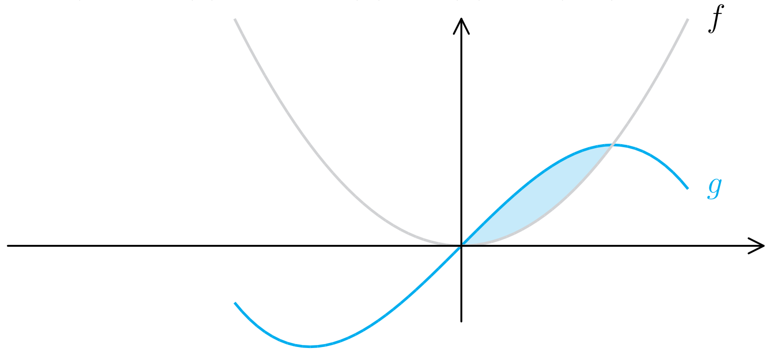
Kapitel 10

Lösung zu Aufgabe 10.1: Sei

$$F(x) := \begin{cases} 2x^2 - x & \text{für } -1 \le x < 0, \\ x^2 + 3x + c_1 & \text{für } 0 \le x < 1, \\ x - x^2/2 + c_2 & \text{für } 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

Dann ist F eine Stammfunktion von f, lediglich die Konstanten c_1 und c_2 müssen so angepasst werden, dass F stetig ist. Das funktioniert mit $c_1 = 0$ und $c_2 = 7/2$. ■

Lösung zu Aufgabe 10.2: Es ist $f(x) = g(x) \iff x = 0$ oder $x/3 = 1 - x^2/12$ (also $x = 2$ oder $x = -6$). Dabei ist $f(0) = g(0) = 0$ und $f(2) = g(2) = 4/3$. Weil $f(1) = 1/3 < 11/12 = g(1)$ ist, ist $f(x) < g(x)$ auf $(0, 2)$.

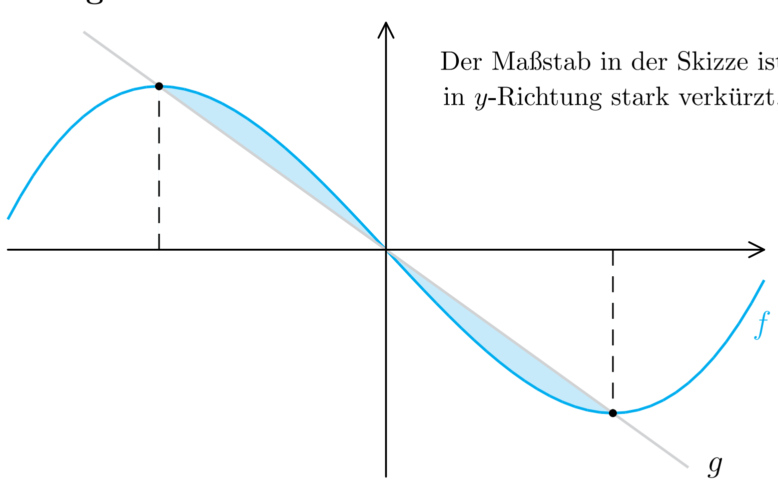


Die Fläche zwischen den Graphen ist gegeben durch

$$\int_0^2 \big(g(x) - f(x)\big)\,dx = \int_0^2 (x - \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{3}x^2)\,dx = \frac{7}{9}\,.$$

■

Lösung zu Aufgabe 10.3:



f hat bei $x = -3$ ein Maximum (mit $f(-3) = 54$) und bei $x = 3$ ein Minimum (mit $f(3) = -54$). Daher ist $g(x) = -18x$.

Aus Symmetriegründen hat die gesuchte Fläche den Inhalt

$$I = 2\int_0^3 \big(g(x) - f(x)\big)\,dx = 2\int_0^3 (-x^3 + 9x)\,dx = \frac{81}{2}\,.$$

■

Lösung zu Aufgabe 10.4: Es ist

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} |x^2-1|\,dx &= \int_{-2}^{2}(x^2-1)\,dx + \int_{-2}^{2}(x^2-1)\,dx + \int_{-2}^{2}(x^2-1)\,dx \\ &= \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} \;=\; 4\,,\end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx = \int_0^{\pi} \sin x\,dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,dx = 2 + 2 = 4$$

und

$$\int_0^2 (2-5x)(2+5x)\,dx =_0^2 (4-25x^2)\,dx = \Big(4x - \frac{25}{3}\,x^3\Big)\,\Big|_0^2 = -\frac{176}{3}\,.$$

■

Lösung zu Aufgabe 10.5: Es ist

$$f'(x) = \frac{2\ln x}{x}, \quad g'(x) = \frac{x}{x^2-a^2}, \quad h'(x) = 2\cot x \quad \text{und} \quad q'(x) = \frac{1}{x\ln x}\,.$$

■

Lösung zu Aufgabe 10.6: Wir setzen $g(x) := f(x)e^{-kx}$. Dann ist $g'(x) = \big(f'(x) - kf(x)\big)e^{-kx} \equiv 0$, also $g(x) \equiv c_0$ konstant. Damit ist $f(x) \equiv c_0 e^{kx}$. Außerdem ist $c = f(0) = c_0$. ■

Lösung zu Aufgabe 10.7: 1) Es ist $f'(x) = (e^x - e^{-x})/2$ und $f''(x) = (e^x + e^{-x})/2$. Daher ist $f'(x) = 0 \iff e^{2x} = 1 \iff x = 0$, und $f''(0) = 1 > 0$, also $x = 0$ ein Minimum und der einzige Extremwert von f.

Weiter ist $f''(x) = 0 \iff e^{2x} = -1$. Letzteres ist unmöglich, es gibt also keinen Wendepunkt.

Da $f''(x) > 0$ überall gilt, ist f überall konvex. Ist $x < 0$, so ist $e^x < 1$ und $e^{-x} > 1$, also $f'(x) < 0$ und f streng monoton fallend. Ist $x > 0$, so ist $e^x > 1$ und $e^{-x} < 1$, also $f'(x) > 0$ und f streng monoton wachsend. Auch hieraus könnte man sehen, dass f in $x = 0$ ein globales Minimum besitzt.

2) Es ist $g'(x) = (x^2 + 2x + 1)e^x = (x+1)^2 e^x$ und $g''(x) = (x^2 + 4x + 3)e^x = \big[(x+2)^2 - 1\big]e^x$. Hier ist $g'(x) = (x+1)^2 e^x > 0$ für alle x, also g überall streng

monoton wachsend. Weiter ist $g'(x) = 0 \iff x = -1$. Weil $g''(-1) = 0$ und $g''(x) < 0$ für $-3 < x < -1$ und $g''(x) > 0$ für $x > 1$ ist, besitzt g keinen Extremwert und einen Wendepunkt bei $x = -1$. Schließlich ist auch $g''(-3) = 0$ und $g''(x) > 0$ für $x < -3$, also $x = -3$ ein weiterer Wendepunkt. Auf $(-\infty, -3)$ ist g konvex, auf $(-3, -1)$ konkav und auf $(-1, +\infty)$ wieder konvex. ∎

Lösung zu Aufgabe 10.8: Sei $f(x) := \ln(1 + x)$ (definiert auf $(-1, +\infty)$). Dann ist $f(0) = 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{und} \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}.$$

Weil $f''(x) < 0$ für alle $x \in (-1, \infty)$ ist, ist f überall konkav. Also liegt G_f unterhalb jeder Tangente an den Graphen.

Die Tangente an G_f in $(0, 0)$ ist gegeben durch

$$L(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) = x.$$

Also ist $f(x) \le x$ für alle $x \in (-1, \infty)$. ∎

Lösung zu Aufgabe 10.9: 1) Es ist $(x^3 + 8)' = 3x^2$. Also liegt es nahe, $\varphi(t) := t^3 + 8$ zu setzen. Dann ist

$$\int_a^b \frac{3x^2}{x^3+8}\, dx = \int_a^b \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \frac{1}{u}\, du = \ln u \,\Big|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \ln\Big(\frac{b^3+8}{a^3+8}\Big).$$

2) Setzt man $\varphi(t) := 2t + 3$, so ist $\varphi'(t) = 2$. Also ist

$$\begin{aligned}\int_a^b \sin(2x+3)\, dx &= \frac{1}{2}\int_a^b \sin(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \sin u\, du = \frac{1}{2}\big[\sin(2b+3) - \sin(2a+3)\big].\end{aligned}$$

∎

Lösung zu Aufgabe 10.10: 1) Sei $f(x) := x^2$ und $g(x) := \cos(2x)$. Dann ist

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} x^2 \sin(2x)\, dx &= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} f(x)g'(x)\, dx \\ &= -\frac{1}{2}\Big[x^2\cos(2x)\,\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2x\cos(2x)\, dx\Big]\end{aligned}$$

und nach dem gleichen Schema erhält man

$$\int_0^{\pi/2} x\cos(2x)\, dx = \frac{1}{2}\Big[x\sin(2x)\,\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin(2x)\, dx\Big].$$

Schließlich liefert die Substitutionsregel die Formel

$$\int_0^{\pi/2} \sin(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin t\,dt = -\frac{1}{2}\cos t\,\Big|_0^{\pi} = 1.$$

Setzt man alles zusammen, so erhält man:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} x^2\sin(2x)\,dx &= -\frac{1}{2}\Big[-\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^2 - 2\int_0^{\pi/2} x\cos(2x)\,dx\Big] \\
&= -\frac{1}{2}\Big[-\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^2 + \int_0^{\pi/2} \sin(2x)\,dx\Big] \\
&= \frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^2 - 1\Big] = \frac{\pi^2-4}{8}.
\end{aligned}$$

2) Es ist

$$\begin{aligned}
\int_1^2 (x^2+1)e^x\,dx &= (x^2+1)e^x\,\Big|_1^2 - 2\int_1^2 xe^x\,dx \\
&= (x^2+1)e^x\,\Big|_1^2 - 2\Big[xe^x\,\Big|_1^2 - \int_1^2 e^x\,dx\Big] \\
&= (x^2-2x+3)e^x\,\Big|_1^2 = 3e^2+2e.
\end{aligned}$$

■

Kapitel 11

Lösung zu Aufgabe 11.1: Mit $x = u + v$ ergibt sich die Gleichung

$$u^3 + v^3 + 3uv(u + v) = p(u + v) + q.$$

Das wird gelöst, wenn man u und v so wählen kann, dass $u^3 + v^3 = q$ und $3uv = p$ ist, wenn also u^3 und v^3 Lösungen der quadratischen Gleichung

$$z^2 - qz + \frac{p^3}{27} = 0$$

sind. Die Lösungsformel für quadratische Gleichungen liefert

$$z = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}$$

und damit

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Ist nun $p = 12$ und $q = 16$, so ist $q/2 = 8$, $p/3 = 4$, $(q/2)^2 = 64$ und $(p/3)^3 = 64$. Daraus ergibt sich $x = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{8} = 4$. Die Probe zeigt, dass 4 tatsächlich eine Lösung ist. ■

Lösung zu Aufgabe 11.2: Es ist $z + w = 11 - 4\,\mathrm{i}$, $z \cdot w = 51 - 17\,\mathrm{i}$ und $z/w = (9/85) + (53/85)\,\mathrm{i}$. ■

Lösung zu Aufgabe 11.3: Es ist $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}e^{(\pi/4)\,\mathrm{i}}$, also $\sqrt[3]{1+\mathrm{i}} = \sqrt[6]{2}e^{(\pi/12)\,\mathrm{i}}$. Natürlich gibt es noch zwei weitere Lösungen, die sich durch Multiplikation mit dritten Einheitswurzeln ergeben.

Weiter ist $\sqrt[6]{-1} = \pm\sqrt[3]{\mathrm{i}} = e^{(\pi/6)\,\mathrm{i}} \cdot \zeta_k$, mit sechsten Einheitswurzeln ζ_k.

Es ist $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$ und $\sin(\pi/6) = 1/2$. Um auch die Werte für $\pi/12$ zu erhalten, benutzt man die Gleichungen

$$\sin(\pi/6) = 2xy \text{ und } \cos(\pi/6) = y^2 - x^2, \text{ mit } x := \sin(\pi/12) \text{ und } y := \cos(\pi/12).$$

Dazu setze man $u := 2x^2$ und $v := 2y^2$ und löse die Gleichungen $4uv = 1$ und $v - u = \sqrt{3}$. Das liefert

$$x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}} \quad \text{und} \quad y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

Somit ist

$$\sqrt[3]{1+\mathrm{i}} = \frac{\sqrt[6]{2}}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}} + \mathrm{i}\sqrt{2-\sqrt{3}}\right) \text{ und } \sqrt[6]{-1} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + \mathrm{i}).$$

Die Lösung ist nicht eindeutig. ■

Lösung zu Aufgabe 11.4: Ist $z = \sqrt{3} + \mathsf{i}$, so ist $|z|^2 = (\sqrt{3} + \mathsf{i})(\sqrt{3} - \mathsf{i}) = 4$. Für den Winkel α gilt die Gleichung $1/\sqrt{3} = \tan\alpha$, also $\alpha = \pi/6$. Damit ist $\sqrt{3} + \mathsf{i} = 2e^{(\pi/6)\,\mathsf{i}}$. ■

Lösung zu Aufgabe 11.5: Das Prinzip der quadratischen Ergänzung funktioniert auch in $\mathbb{C}$. Deshalb bleibt auch die Lösungsformel für quadratische Gleichungen gültig. Ist $z^2 + 15z + 57 = 0$, so ist

$$z = \frac{1}{2}(-15 \pm \sqrt{3}\,\mathsf{i}).$$

■

Lösung zu Aufgabe 11.6: Ist $\zeta = e^{2\pi\,\mathsf{i}\,k/n}$, $k = 1, \ldots, n-1$, so ist $1 + \zeta + \zeta^2 + \cdots + \zeta^{n-1} = 0$ (Kreisteilungsgleichung). Das bedeutet:

$$1 + e^{2\pi\,\mathsf{i}/n} + e^{4\pi\,\mathsf{i}/n} + \cdots + e^{2(n-1)\pi\,\mathsf{i}/n} = 0.$$

Der Imaginärteil liefert die gewünschte Gleichung. ■

Lösung zu Aufgabe 11.7: 1) Es ist $\sqrt{2\,\mathsf{i}} = \pm\sqrt{2}e^{\mathsf{i}\,\pi/4} = \pm\sqrt{2}\big(\sqrt{2}/2 + \mathsf{i}\,\sqrt{2}/2\big) = \pm(1 + \mathsf{i})$ und $\sqrt{-2\,\mathsf{i}} = \pm\,\mathsf{i}\,(1 + \mathsf{i}) = \pm(\mathsf{i} - 1)$, also

$$\begin{aligned} p(z) &= (z^2 - 2\,\mathsf{i})(z^2 + 2\,\mathsf{i}) \\ &= \big(z - (1 + \mathsf{i})\big)\big(z + (1 + \mathsf{i})\big)\big(z - (\mathsf{i} - 1)\big)\big(z + (\mathsf{i} - 1)\big). \end{aligned}$$

2) Die Nullstellen von $q(z)$ sind $z_1 = -2$ und $z_2 = 3$. Daher ist $q(z) = (z+2)(z-3)$. ■

Lösung zu Aufgabe 11.8: Ist $c = a + t(b - a)$ für ein $t \in (0, 1)$, so ist $\dfrac{c-a}{b-a} = t \in \mathbb{R}$.

Ist umgekehrt $t := \dfrac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$, so ist $c = a + t(b - a)$. ■

Lösung zu Aufgabe 11.9: Es ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathfrak{w} - \mathfrak{v}\mathfrak{w}\mathfrak{u} &= (\mathfrak{u}\mathfrak{v} + \mathfrak{v}\mathfrak{u})\mathfrak{w} - \mathfrak{v}(\mathfrak{u}\mathfrak{w} + \mathfrak{w}\mathfrak{u}) \\ &= (-2\mathfrak{u} \bullet \mathfrak{v})\mathfrak{w} + (2\mathfrak{u} \bullet \mathfrak{w})\mathfrak{v} \\ &= -2(\mathfrak{u} \bullet \mathfrak{v})\mathfrak{w} + 2(\mathfrak{u} \bullet \mathfrak{w})\mathfrak{v}, \end{aligned}$$

also

$$\frac{1}{2}(\mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathfrak{w} - \mathfrak{v}\mathfrak{w}\mathfrak{u}) = (\mathfrak{u} \bullet \mathfrak{w})\mathfrak{v} - (\mathfrak{u} \bullet \mathfrak{v})\mathfrak{w}.$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathfrak{w} &= \mathfrak{u}(-\mathfrak{v} \bullet \mathfrak{w} + \mathfrak{v} \times \mathfrak{w}) \\ &= -(\mathfrak{v} \bullet \mathfrak{w})\mathfrak{u} + \mathfrak{u}(\mathfrak{v} \times \mathfrak{w}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathfrak{v}\mathfrak{w}\mathfrak{u} &= (-\mathfrak{v} \bullet \mathfrak{w} + \mathfrak{v} \times \mathfrak{w})\mathfrak{u} \\ &= -(\mathfrak{v} \bullet \mathfrak{w})\mathfrak{u} + (\mathfrak{v} \times \mathfrak{w})\mathfrak{u}. \end{aligned}$$

also

$$\frac{1}{2}(\mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathfrak{w} - \mathfrak{v}\mathfrak{w}\mathfrak{u}) = \frac{1}{2}\Big(\mathfrak{u}(\mathfrak{v} \times \mathfrak{w}) - (\mathfrak{v} \times \mathfrak{w})\mathfrak{u}\Big) = \mathfrak{u} \times (\mathfrak{v} \times \mathfrak{w}).$$

Daraus folgt die zweite Behauptung. ■