Korrekturen und Ergänzungen zu GK FnkTh

Zu Kapitel 5:

Abschnitt 5.1:

Seite 284, Zeile 7:

Im Satz 5.1.7 muss es heißen: „Dann enthält $\mathbb{C} \setminus |\Gamma|$ höchstens abzählbar viele Zusammenhangskomponenten, ... “

Seite 286, Zeile 21:

Im Anschluss an den Beweis könnte man die entsprechend verallgemeinerte Version des Residuensatzes formulieren und beweisen:

Verallgemeinerter Residuensatz.
Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $D \subset G$ diskret, Γ ein nullhomologer Zyklus in G mit $|\Gamma| \cap D = \varnothing$ und $f : G \setminus D \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma f(\zeta)\, d\zeta = \sum_{z \in G} n(\Gamma, z)\, \mathrm{res}_z(f).$$

Zu den Aufgaben (5.1.15):

Afg. B: Eine Stammfunktion zu $f \in \mathscr{O}(G)$ ergibt das Integral $F(z) := \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta$ (mit einem festen Punkt $z_0 \in G$). In günstigen Fällen kann man über die Verbindungsstrecke integrieren und außerdem das Integral explizit berechnen.

Afg. C: Man verwende das Entwicklungs-Lemma. Den Konvergenzradius gewinnt man mit Hilfe der Formel von Cauchy-Hadamard.

Afg. E: Damit γ in G nullhomolog ist, muss $k = l = m$ sein.

Afg. F: Mit Hilfe der biholomorphen Abbildung $\Phi : \mathbb{D} \to D_r(0)$ mit $\Phi(z) := rz$ und der Formel für die Automorphismen von $\mathbb{D}$ kann man auch die Automorphismen von $D_r(0)$ berechnen.

Afg. G: $f(\mathbb{H}) = \mathbb{D} \setminus \{0\}$ ist **nicht** einfach zusammenhängend.

Afg. H : Man unterscheide die Fälle $G = \mathbb{C}$ und $G \neq \mathbb{C}$.

Afg. I : Zunächst zeige man: *Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $z_0 \in G$, so gibt es höchstens eine biholomorphe Abbildung $f : G \to \mathbb{D}$ mit $f(z_0) = 0$ und $f'(z_0) > 0$.*

Dann muss man nur noch eine einzige biholomorphe Abbildung $f : G \to \mathbb{D}$ mit $f(1) = 0$ und $f'(1) > 0$ finden und den Wert $f(2)$ berechnen.

Abschnitt 5.2:

`Keine Korrekturen!`

Zu den Aufgaben (5.2.5):

Afg. A : Man benutze Lemma 5.2.1.

Afg. B : Man benutze eine Kreiskette längs des Einheitskreises und setze die Wurzelfunktion mit Hilfe dieser Kreiskette fort. Dabei werde die Wurzel zunächst mit Hilfe von $\log_{(-\pi)}$ definiert. Beim Punkt $z = -1$ muss allerdings auf der unteren Halbebene die negative Wurzel benutzt werden.

Afg. C : Die Potenzreihe der 2. Ableitung einer etwaigen Fortsetzung würde bei $z = 1$ divergieren.

Afg. D : $R = 2$ ist der Konvergenzradius von $f(z)$, $R' := \sqrt{5}$ der Konvergenzradius von $g(z)$. Ein Vergleich der Werte auf der imaginären Achse zeigt, dass $f = g$ auf $D_2(0) \cap D_{\sqrt{5}}(\mathrm{i})$ gilt.

Abschnitt 5.3:

`Keine Korrekturen!`

Zu den Aufgaben (5.3.6):

Afg. A : Die Folge $z_n := \big(1/n + 1/(n+1)\big)/2 + \mathrm{i}/n$ konvergiert gegen $z_0 = 0$, erfüllt aber nicht das Erreichbarkeitskriterium.

Afg. B : Ein Beispiel ist durch das Gebiet $G := \mathbb{D} \setminus \{z = x + \mathrm{i}y \,:\, 0 \leq x < 1 \text{ und } y = 0\}$ und den Punkt $z_0 := 1/2$ gegeben.

Afg. C : Reflexivität und Symmetrie sind trivalerweise erfüllt, zum Nachweis der Transitivität muss man etwas „basteln“. Ist ein Randpunkt z_0 erreichbar, so sind je zwei in Frage kommende Folgen äquivalent.

Abschnitt 5.4:

Seite 308, Zeile 21:

Aufgabe A: ..., $S \subset G$ ein zusammenhängendes, offenes Geradenstück, f stetig auf G und holomorph auf $G \setminus S$. Dann ist f auf ganz G holomorph.

Seite 308, Zeile 24:

Aufgabe B: $C_3 := \{1 + t(\mathsf{i} - 1) \, : \, t \in \mathbb{R}\}$

Zu den Aufgaben (5.4.6):

Afg. A: Man leite das Ergebnis aus dem Spiegelungsprinzip ab.

Afg. B: Die Spiegelungen sind gegeben durch $s_1(z) = -2\,\mathsf{i} + (\overline{z} - 2\,\mathsf{i}\,)$, $s_2(z) = \mathsf{i}\,\overline{z}$ und $s_3(z) = 1 - \mathsf{i}\,(\overline{z} - 1)$.

Afg. C: Spiegelt man u an der reellen Achse, so erhält man eine stetige Fortsetzung $\widehat{u} : G \to \mathbb{R}$, die harmonisch auf G_+ ist. Über die Eigenschaften harmonischer Funktionen (z.B. Mittelwerteigenschaft) erhält man, dass $\widehat{u}$ überall harmonisch ist.

Afg. E: Man kann zeigen, dass es höchstens endlich viele Nullstellen von f in $\mathbb{D}$ gibt. Spiegelt man f am Einheitskreis, so erhält man die gewünschte meromorphe Funktion.

Afg. F: Man kann annehmen, dass der Nullpunkt der Mittelpunkt von K ist. Zwei Punkte z_1 und z_2, die bezüglich K spiegelbildlich liegen, liegen auf dem gleichen Strahl vom Nullpunkt aus, und der trifft K orthogonal. Mit dem Sehnen-Tangentensatz kommt man zum Ziel.

Abschnitt 5.5:

`Keine Korrekturen!`