Korrekturen und Ergänzungen zu GK FnkTh

Zu Kapitel 4:

Abschnitt 4.1:

Seite 191, Zeile 1 (in der Definition):

Der Meromorphie-Begriff sollte etwas sorgfältiger eingeführt werden.

Sei $U \subset \overline{\mathbb{C}}$ offen. Eine meromorphe Funktion auf U ist eine holomorphe Funktion f auf $U \setminus D$, wobei $D \subset U$ eine diskrete Teilmenge ist, so dass f in den Punkten von D höchstens Polstellen besitzt. f besitzt in $z_0 = \infty$ eine Polstelle, falls $f \circ I$ im Nullpunkt eine Polstelle besitzt.

Indem man f in den Polstellen den Wert ∞ zuordnet, setzt man f zu einer stetigen Abbildung $\widehat{f} : U \to \overline{\mathbb{C}}$ fort. Außerhalb der Polstellen nimmt $\widehat{f}$ nur Werte in $\mathbb{C}$ an. Insbesondere ist die konstante Funktion $u(z) \equiv \infty$ zwar stetig, aber weder holomorph noch meromorph. Ist dagegen $c \in \mathbb{C}$, so ist die Funktion $k(z) \equiv c$ holomorph und meromorph.

Seite 197, Zeile 5:

...so hat h_A genau dann **genau** einen Fixpunkt, wenn $|\mathrm{Spur}(A)| < 2$ ist.

Zu den Aufgaben (4.1.18):

Afg. B: Die Abbildung $\Psi(z, h) := (\overline{z}, -h)$.

Afg. C: Man verwende Lemma 1.5.1. und den Beweis davon. Das Bild ist der Kreis mit Mittelpunkt $w_0 = 1 - \mathrm{i}$ und Radius $\varrho = \sqrt{2 - 1} = 1$.

Afg. E: Das fragliche Gebiet G ist der Durchschnitt zweier Kreisscheiben. Die Schnittpunkte sind $z_1 = -\mathrm{i}\,h$ und $z_2 = \mathrm{i}\,h$ mit $h = \sqrt{3}$. Der Schnittwinkel $\alpha = 2\pi/3$ kann elementargeometrisch ermittelt werden. Mit einer Möbiustransformation T und einer Drehung R erhält man einen 120°-Sektor, der ganz einfach auf $\mathbb{H}$ abgebildet werden kann.

Afg. F: Ist $f \in \mathrm{Aut}(G)$, so hat f in den z_i jeweils isolierte Singularitäten. Man zeige zunächst, dass f höchstens eine Polstelle besitzen kann. Um dann zu sehen, dass f eine Möbiustransformation ist, reicht es zu zeigen, dass f in allen Punkten z_i holomorph fortsetzbar ist.

Afg. G: Die Aufgabe ist etwas unklar formuliert. Gesucht wird eine hinreichende Bedingung dafür, dass es eine biholomorphe Abbildung F zwischen den Kreisringen gibt. Das ist nicht so schwer.

In Wirklichkeit gilt auch die Umkehrung, aber das ist mit den hier zur Verfügung stehenden Mitteln kaum zu zeigen.

Afg. I: Die Aufgabe ist vielleicht ein bisschen unfair, denn es ist nicht so einfach, auf die richtige Idee zu kommen. Es liegt nahe, dass das Schwarz'sche Lemma benutzt werden soll, und das muss sich im Einheitskreis $\mathbb{D}$ abspielen.

Man kann annehmen, dass $f(0) = 0$ ist. Zu zwei Punkten $z_0, z_1 \in G_r$ muss gezeigt werden, dass die Verbindungsstrecke ganz in G_r verläuft. Sei $t_0 \in [0, 1]$. Nun kommt der eigentliche Trick. Ist $a := f^{-1}(z_0)$, $b := f^{-1}(z_1)$ und $za/b \in \mathbb{D}$, so untersuche man die holomorphe Abbildung $g : \mathbb{D} \to G$ mit

$$g(z) := (1 - t_0)f(za/b) + t_0 f(z).$$

Abschnitt 4.2:

Seite 197, Zeile 9:

Im Buch wurden zwar (in Abschnitt 1.2) Reihen von komplexen Funktionen und ihr Konvergenzverhalten behandelt, nicht aber **Folgen von Funktionen**. Das ist keine große Lücke, aber die sollte – irgendwo in Kapitel 1 – doch noch geschlossen werden. Das geschieht in der zweiten Auflage.

Seite 197, Zeile 9 von unten:

Bei der Definition der kompakten Konvergenz (und analog bei der Definition der lokal gleichmäßigen Konvergenz, siehe Seite 90, im Zusammenhang mit dem Weierstraß'schen Konvergenzsatz) sollte man auch über die Grenzfunktion sprechen:

Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und (f_n) eine Folge von stetigen Funktionen $f_n : G \to \mathbb{C}$, die kompakt oder lokal gleichmäßig konvergiert, so konvergiert (f_n) automatisch punktweise gegen eine Grenzfunktion f. Sind alle f_n sogar holomorph, so folgt nach Weierstraß, dass die Grenzfunktion ebenfalls holomorph ist.

Seite 202, Zeile 2 von unten:

Die in Beispiel **B** beschriebene Familie $\mathscr{F}$ ist **nicht normal**. Das sieht man folgendermaßen: Sei $f_n : G \to \mathbb{H}$ definiert durch $f_n(z) := \mathrm{i}n$. Dann ist (f_n) offensichtlich eine Folge von Funktionen aus $\mathscr{F}$, und es gilt:

$$g_n(z) := C^{-1} \circ f_n(z) = \frac{\mathrm{i}n - \mathrm{i}}{\mathrm{i}n + \mathrm{i}} = \frac{n-1}{n+1}\,.$$

Die Funktionenfolge (g_n) hat tatsächlich Werte in $\mathbb{D}$ und ist daher beschränkt. Sie konvergiert ja auch gleichmäßig gegen die konstante Funktion $g(z) \equiv 1$. Die zurückgeholte Folge $C \circ g_n(z) = f_n(z) = \mathrm{i}\, n$ konvergiert jedoch gegen Unendlich, und das ist ein Widerspruch zur Normalität.

Auf Seite 206 findet sich eine erweiterte Definition der normale Familien, die auch auf meromorphe Funktionen angewandt werden kann und deshalb die kompakte Konvergenz gegen ∞ zulässt. In der Literatur wird diese Definition häufig universell angewandt, auch für Familien von holomorphen Funktionen. Zur besseren Unterscheidung sollte man dann vielleicht von „m-normal" sprechen. In diesem Sinne ist die Familie der holomorphen Funktionen auf einem Gebiet G mit Werten in $\mathbb{H}$ m-normal. Der Beweis dafür muss allerdings noch geführt werden, und dazu braucht man das Lemma 4.2.10, das allerdings korrigiert und neu bewiesen werden muss. Man verwendet dabei noch folgende Definition (die sich im Buch auf Seite 205 hinter dem Satz 4.2.12 findet):

Eine Folge von holomorphen Funktionen $f_n : G \to \mathbb{C}$ heißt ***kompakt divergent*** (oder ***kompakt konvergent gegen*** ∞), falls gilt:

Für alle kompakten Mengen $K \subset G$ und $L \subset \mathbb{C}$ gibt es ein n_0, so dass gilt:

$$f_n(z) \notin L \text{ für } z \in K \text{ und } n \geq n_0.$$

Seite 203, ZEILE 2:

Es müsste heißen: „Konvergiert die Teilfolge (g_{n_ν}) kompakt gegen die Grenzfunktion g, so liefert das nachfolgende Lemma, dass die Folge $f_{n_\nu} = C \circ g_{n_\nu}$ kompakt gegen $C \circ g$ oder gegen ∞ konvergiert. Also ist $\mathscr{F}$ m-normal."

Seite 203, ZEILE 5:

Das Lemma 4.2.10 und der Beweis dafür können so nicht stehen bleiben. Hier folgt stattdessen eine bessere Formulierung des Lemmas und der zugehörige Beweis:

Korrigiertes Lemma 4.2.10 (Normalitätslemma): *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und (f_n) eine Folge von holomorphen Funktionen auf G mit Werten in einem Gebiet $H \subset \mathbb{C}$, Wenn es eine biholomorphe Abbildung ψ von H auf ein beschränktes Gebiet G_0 und eine meromorphe Funktion φ auf $\mathbb{C}$ mit $\varphi|_{G_0} = \psi^{-1}$ gibt, dann gibt es eine Teilfolge (f_{n_ν}) von (f_n), die entweder kompakt gegen eine holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ oder kompakt gegen ∞ konvergiert.*

BEWEIS: Vorbemerkung: Sind unendlich viele $f_n(z) \equiv c_n$ konstant, so hat die Folge der Zahlen c_n entweder einen Häufungspunkt oder sie ist unbeschränkt. Also findet man eine Teilfolge, die gegen eine Zahl c oder gegen ∞ konvergiert. Diese Zahlenfolge konvergiert natürlich als Funktionenfolge kompakt, so dass nichts mehr zu zeigen ist. Deshalb kann man o.B.d.A. annehmen, dass die Funktionen f_n nicht konstant und ihre Bilder Teilgebiete von H sind.

Die Folge $h_n := \psi \circ f_n : G \to G_0$ ist offensichtlich beschränkt und damit normal. Also gibt es eine Teilfolge (h_{n_ν}), die kompakt gegen eine holomorphe Funktion $h : G \to \mathbb{C}$ konvergiert. O.B.d.A. sei schon (h_n) die gegen h kompakt konvergente Folge.

Weil die Bildgebiete $G_n := h_n(G)$ alle in G_0 liegen, muss $h(G)$ in $\overline{G_0}$ enthalten sein. Es gibt nun zwei Möglichkeiten: Entweder ist die Grenzfunktion h nicht konstant (und $h(G)$ ein Teilgebiet von G_0, nach Aufgabe 4.2.15 (A)), oder es ist $h(z) \equiv c_0$ eine Konstante. Im letzteren Fall kann c_0 im Innern von G_0 oder in ∂G_0 liegen.

Nach Voraussetzung ist ψ^{-1} Einschränkung einer meromorphen Funktion φ, die als Abbildung von $\mathbb{C}$ nach $\overline{\mathbb{C}}$ aufgefasst werden kann. Nun sei $K \subset G$ eine beliebige kompakte Teilmenge. Für den weiteren Beweis muss man zwei Fälle unterscheiden.

1. Fall: Für $z \in G$ sei $h(z) \equiv c_0$, $c_0 \in \partial G_0$ und $\varphi(c_0) = \infty$.

$L \subset \mathbb{C}$ sei eine weitere beliebige, kompakte Menge. $Q := \varphi^{-1}(L) \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus \{c_0\}$ ist dann abgeschlossen, und es gibt eine offene Umgebung $V = V(c_0) \subset \mathbb{C}$ mit $V \cap Q = \varnothing$. Weil $h_n|_K$ gleichmäßig gegen c_0 konvergiert, gibt es ein n_0, so dass $h_n(K) \subset V$ für $n \geq n_0$ gilt. Für diese n ist auch $f_n(K) = \varphi \circ h_n(K) \subset \varphi(V)$. Weil $V \cap \varphi^{-1}(L) = \varnothing$ ist, ist auch $\varphi(V) \cap L = \varnothing$, und daraus folgt:

$$f_n(z) \notin L \text{ für } z \in K \text{ und } n \geq n_0.$$

Das bedeutet, dass (f_n) kompakt gegen ∞ konvergiert.

2. Fall: Für $z \in G$ sei $\varphi \circ h(z) \neq \infty$.

a) Ist h nicht konstant, so setzen wir $K_0 := h(K) \subset G_0$, $d := \operatorname{dist}(K_0, \mathbb{C} \setminus G_0)/2$ und $K_1 := \{w \in G_0 : \operatorname{dist}(w, K_0) \leq d\}$. Dann sind $K_0 \subset K_1 \subset G_0$ beide kompakt.

b) Ist $h(z) \equiv c_0$ (aber $\varphi(c_0) \neq \infty$), so kann man reelle Zahlen $0 < r < R$ finden, so dass $\varphi(w) \neq \infty$ für alle $w \in \overline{D_R(c_0)}$ ist. In diesem Fall sei $K_0 := \overline{D_r(c_0)}$ und $K_1 := \overline{D_R(c_0)}$.

Die stetige Abbildung φ ist auf jeden Fall auf K_1 gleichmäßig stetig. Jetzt sei ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass $|\varphi(w) - \varphi(w')| < \varepsilon$ für $w, w' \in K_1$ und $|w - w'| < \delta$ ist. Man kann $\delta < \min(d, R)$ wählen.

Zu dem gefundenen δ gibt es ein n_0, so dass

$$|h_n(z) - h(z)| < \delta \text{ für } z \in K \text{ und } n \geq n_0$$

ist. Für $z \in K$ liegt $h(z)$ in K_0 (und damit auch in K_1). Und wenn außerdem $n \geq n_0$ ist, so liegt auch $h_n(z)$ in K_1. Deshalb ist $|\varphi \circ h_n(z) - \varphi \circ h(z)| < \varepsilon$ für $z \in K$ und $n \geq n_0$. Das bedeutet, dass $f_n = \varphi \circ h_n$ auf K gleichmäßig gegen $\varphi \circ h$ konvergiert. ∎

Seite 204, ZEILE 22 (in der Definition):

„..., so setzt man $d_c(z, \infty) = \text{dist}(\varphi^{-1}(z), \mathbf{n})$."

Seite 204, In der Skizze:

Man ergänze $\mathbf{x} = \varphi^{-1}(z)$.

Seite 205, ZEILE 1 ff.:

Man sollte schreiben:

„Dann ist $1 : l = s : 2$, also $s \cdot l = 2$. Für zwei Punkte $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ sei $\mathbf{x}_1 := \varphi^{-1}(z_1)$ und $\mathbf{x}_2 := \varphi^{-1}(z_2)$. Zur Abkürzung schreiben wir $s_i := s(z_i)$ und $l_i := l(z_i)$. Damit ist $s_1/s_2 = l_2/l_1$. Es entstehen ..."

Seite 205, ZEILE 8:

Man schreibe $s(z)$ statt $s(\mathbf{z})$.

Seite 206, ZEILE 19 (nach der Definition):

Hier müsste man einen speziellen Begriff für normale Familien meromorpher Funktionen einführen, z.B. „m-normal".

Seite 206, ZEILE 4 von unten:

Hier könnte die „sphärische Ableitung" und der Satz von Marty eingeführt werden. Damit lassen sich Beweise für die Normalität einer Familie manchmal leichter führen. Das geschieht in der zweiten Auflage.

Seite 207, ZEILE 6 bis 11:

In den Aufgaben (C) und (D) muss „normal" durch „m-normal" ersetzt werden.

Seite 207, ZEILE 17 (in Aufgabe (G)):

Es ist $N_{D,2}(f) := \left(\int_D |f(x + \mathrm{i}\, y)|^2 \, dx \, dy\right)^{1/2}$, und deshalb muss es in (a) heißen: $\left(N_{D,2}(f)\right)^2 = \ldots$.

Die Teile (b) und (c) sind richtig formuliert.

Zu den Aufgaben (4.2.15):

Afg. A: Hier hilft der Satz von Hurwitz.

Afg. B: Man verwende die zweite Cauchy'sche Ungleichung.

Die Familie $\{f_n(z) := n(z^2 - n) \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ ist **nicht normal** (Fehler in der Aufgabenstellung!), wohl aber m-normal, denn die Folge konvergiert kompakt gegen ∞. Die Familie der Ableitungen $\{f_n'(z) = 2nz \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ ist aber nicht einmal m-normal.

Afg. C: Offensichtlich ist $\{g \circ f \,:\, f \in \mathscr{F}\}$ eine normale Familie. Die Familie $\mathscr{F}$ selbst ist aber **nicht normal** (Fehler in der Aufgabenstellung!). Verwendet man das Normalitätslemma, so sieht man, dass $\mathscr{F}$ m-normal ist.

Afg. D: Hier wurde der gleiche Fehler gemacht. Die Folge $f_n(z) := 1 + n$ liegt in $\mathscr{F}$ und konvergiert kompakt gegen ∞. Man kann aber zeigen, dass $\mathscr{F}$ m-normal ist.

Dazu konstruiere man eine biholomorphe Abbildung $\Phi : \mathbb{C} \setminus [0,1] \to \mathbb{D}^*$ mit $\Phi^{-1}(w) = (1+w)^2/(4w)$. Dann lässt sich das Normalitätslemma anwenden.

Afg. E: Sei (f_n) eine Folge in $\mathscr{F}$, die nicht kompakt konvergiert. Wegen der Normalität gibt es eine Teilfolge (f_{n_ν}) von (f_n), die kompakt gegen eine holomorphe Funktion f konvergiert. Es gibt aber zu einer kompakten Menge $K \subset G$ eine weitere Teilfolge von (f_n), die sich f auf K nicht beliebig gut nähert, aber kompakt gegen eine holomorphe Funktion g konvergiert. Dann ist $f \neq g$.

Afg. F: Für $0 < r < 1$ und $|z| \le r$ schätze man $|f(z)|$ ab.

Afg. G: Nach Korrektur der Aufgabenstellung ist

$$\big(N_{D,2}(f)\big)^2 := \int_D |f(x + \mathrm{i}\, y)|^2 \, dx\, dy.$$

a) beweist man mit Hilfe von Polarkoordinaten.

b) folgt aus (a).

c) Man zeige, dass $\mathscr{F}$ lokal beschränkt ist.

Abschnitt 4.3:

Seite 208, Zeile 16:

Die Bemerkung kann hier entfallen, dafür sollte in den Lehrsätzen auf die Eindeutigkeit eingegangen werden.

Seite 209, Zeile 13 (im Satz 4.3.1):

Jede Hauptteilverteilung auf $\mathbb{C}$ ist lösbar. Die Lösung ist bis auf eine ganze Funktion eindeutig bestimmt.

Seite 209, ZEILE 9 von unten:

Die Kreisscheibe D_ν soll eine **offene** Scheibe sein: $D_\nu := \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| < |a_\nu|/2\}$.

Seite 209, ZEILE 5 von unten:

Es fehlt die Definition $f_\nu := h_\nu - P_\nu$.

Seite 210, ZEILE 5:

Wir untersuchen jetzt den **Spezialfall einer Verteilung von Polen 1. Ordnung**:

Seite 210, ZEILE 13:

Das Folgende (ab „Mit $P_{\nu,\mu}(z)$ sei nun …“) sollte man etwas umformulieren:

$$P_{\nu,\mu}(z) = -\frac{c_\nu}{a_\nu}\sum_{\lambda=0}^{\mu}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^{\lambda} = -\frac{c_\nu}{a_\nu}\cdot\frac{1-(z/a_\nu)^{\mu+1}}{1-z/a_\nu} = \frac{c_\nu}{z-a_\nu}\left(1-\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^{\mu+1}\right).$$

ist das Taylor-Polynom von $h_\nu(z)$ vom Grade μ auf der Kreisscheibe vom Radius $|a_\nu|$ um den Nullpunkt. Um der Linie des Beweises von Mittag-Leffler zu folgen, müssten wir eine Folge natürlicher Zahlen (k_ν) finden, so dass gilt:

$$|h_\nu(z) - P_{\nu,k_\nu}(z)| < 2^{-\nu} \;\text{ auf }\; D_\nu = \{z \,:\, |z| \le \frac{1}{2}|a_\nu|\}.$$

Damit kann die Lösung f des Problems schon genauer angegeben werden:

$$f(z) = \frac{c_0}{z} + \sum_{\nu=1}^{\infty}(h_\nu(z) - P_{\nu,k_\nu}(z)) = \frac{c_0}{z} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{c_\nu}{z-a_\nu}\cdot\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^{k_\nu+1}.$$

Jede andere Lösung erhält man durch Addition einer ganzen Funktion.

Ab jetzt geht es weiter mit ZEILE 7 von unten. Der Abschnitt sollte allerdings etwas umformuliert werden: „Nun versuchen wir, die k_ν ganz konkret zu bestimmen. Dabei kommt es nur darauf an, die Abschätzungen für $|h_\nu(z) - P_{\nu,k_\nu}(z)|$ so zu erfüllen, dass die Reihe für f kompakt konvergiert. Dabei helfen die folgenden Überlegungen weiter:“

Seite 211, ZEILE 14 im Satz 4.3.2):

Man ergänze: f *ist bis auf eine ganze Funktion eindeutig bestimmt.*

Seite 214, ZEILE 8:

Der vierte Term in der Gleichungskette (mit der großen Klammer) ist nicht hilfreich, sondern eher irritierend. Er kann weggelassen werden.

Zu den Aufgaben (4.3.6):

Afg. A : g'/g besitzt in den z_k lauter einfache Polstellen. Man bestimme nach Mittag-Leffler eine Lösung dieser Polstellenverteilung.

Afg. B : Zu jedem Kompaktum $K \subset G$ gibt es ein ν_0, so dass f_ν für $\nu \geq \nu_0$ keine Polstelle in K besitzt und die Restreihe $\sum_{\nu \geq \nu_0} f_\nu$ auf K gleichmäßig gegen eine holomorphe Funktion g konvergiert.

Afg. C : Man nutze die Hauptteilverteilungen $H_{1/f}$ und $H_{1/g}$, sowie $H_{1/(fg)}$.

Afg. D : Hier geht es um Pole zweiter Ordnung. Deshalb kann der spezielle Satz von Mittag-Leffler nicht angewandt werden, und man muss die Abschätzungen selbst durchführen. Man stellt fest, dass man jeweils nur den ersten Term der Taylorreihe berücksichtigen muss.

Afg. F : Es gibt eine holomorphe Funktion h mit $h(0) \neq 0$ und

$$\frac{1}{\exp(z) - 1} - \frac{1}{z} = \frac{-1/2 - zh(z)}{1 + z/2 + z^2 h(z)} .$$

Es geht also um die Hauptteile $h_n(z) = 1/(z - z_n)$ in den Punkten $z_n := 2\pi \mathrm{i}\, n$, sowie die Näherungspolynome $p_n(z) = -1/(2\pi \mathrm{i}\, n)$.

Afg. G : Die gesuchte meromorphe Funktion ist

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{z - z_n} \Big(\frac{z}{z_n}\Big)^n \text{ (bis auf eine ganze Funktion).}$$

Abschnitt 4.4:

Seite 216, ZEILE 14:

Der zweite Teil der Definition ist etwas missverständlich: Weil $\prod_{\nu=\nu_0}^{\infty} a_\nu$ existieren muss, muss $\lim_{n\to\infty} \prod_{\nu=\nu_0}^{n} a_\nu$ nicht nur existieren, sondern auch $\neq 0$ sein.

Zu den Aufgaben (4.4.10):

Afg. B : Zum Beweis benutzt man am besten jeweils Induktion nach N.

Afg. C : **Achtung!** Die Aufgabenstellung ist etwas irreführend, denn es zeigt sich, dass gar keine Grenzwerte zu berechnen sind. Alle Produkte divergieren.

Afg. E : Die Funktion $\cos(\pi z)$ hat die Nullstellen $a_n := (2n+1)/2$, $n \in \mathbb{Z}$, jeweils von erster Ordnung. Nach dem Weierstraß'schen Produktsatz ist

$$f(z) := \prod_{n \in \mathbb{Z}} \big(1 - \frac{2z}{2n+1}\big) \exp\big(\frac{2z}{2n+1}\big)$$

eine ganze Funktion, die genau die angegebenen Nullstellen besitzt. Dann gibt es eine ganze Funktion h, so dass $\cos(\pi z) = g(z) := f(z) \cdot \exp(h(z))$ ist. Nun berechne man $(\log g)' = g'/g$ auf beiden Seiten.

Afg. F : Das Produkt konvergiert absolut für $\mathrm{Re}(z) > 1$, weil die entsprechende Reihe absolut konvergiert. Und das gilt auch noch gleichmäßig auf Kompakta.

Afg. G : Auch hier arbeitet man mit der zugehörigen Reihe.

Afg. H : Beweis durch Widerspruch.

Abschnitt 4.5:

Seite 227, Zeile 12 (in der Definition):

Man sollte etwas ergänzen: „Die (auf $\mathbb{C}$) meromorphe Funktion“

Seite 228, Zeile 16:

„5) Die Multiplikationsformel ergibt sich klar aus der Definition von Γ.“

Seite 231, Zeile 1:

Auf der linken Seite der Gleichung sollte statt des Integrals besser $\Gamma_n(x)$ stehen.

Seite 232, Zeile 5:

„Weil $\varphi(t) := e^{-t} \cdot \max(t^{\alpha-1}, t^{\beta-1})$“ ...

Man sollte noch etwas zur Integrierbarkeit von φ sagen. Näheres dazu in dem folgenden Text, den man hier einfügen sollte:

Es soll noch ein zweiter Beweis für die Holomorphie des Integrals $\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt$ angegeben werden, der deutlicher zeigt, wo das Problem liegt, nämlich bei der Singularität des Integranden bei 0, die im Falle $\text{Re}(z) < 0$ Ärger macht. Ist nämlich $x = \text{Re}(z) < 0$ und $0 < \delta < 1$, so gilt:

$$\begin{aligned}\int_\delta^1 e^{-t}t^{x-1}\,dt &\leq \int_\delta^1 t^{x-1}\,dt = \Big(\frac{1}{x}t^x\Big)\Big|_\delta^1 \\ &= \frac{1}{x}\big(1-\delta^x\big) = \frac{1}{x}\big(1-\frac{1}{\delta^{|x|}}\big) \to -\infty \text{ (für } \delta \to 0).\end{aligned}$$

Jetzt kommen wir zum Beweis. Sei $f(z,t) := e^{-t}t^{z-1}$. Das Integral $F(z) := \int_0^\infty f(z,t)\,dt$ kann in der Form $F(z) = F_1(z) + F_2(z)$ zerlegt werden, mit

$$F_1(z) := \int_0^1 f(z,t)\,dt \text{ und } F_2(z) := \int_1^\infty f(z,t)\,dt.$$

a) Wegen der Singularität bei 0 muss im Falle $0 < t \leq 1$ gefordert werden, dass $x = \text{Re}(z) > 0$ ist. Sei $R_+ := \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) > 0\}$, $K \subset R_+$ kompakt und $x_0 := \min_K \text{Re}(z)$. Dann ist $x_0 > 0$, und für $z \in K$ und $t \in I := (0,1]$ ist $\ln(t) < 0$ und daher

$$\begin{aligned}|e^{-t}t^{z-1}| &= e^{-t}\cdot e^{(x-1)\ln(t)} \leq e^{-t}\cdot e^{(x_0-1)\ln t} \\ &= e^{-t}\cdot t^{x_0-1} =: \psi(t).\end{aligned}$$

Offensichtlich existiert das Integral über die stetige Funktion $\psi(t)$ und $(0,1]$. Also ist F_1 nach dem Lemma 4.5.6 auf R_+ holomorph.

b) Im Falle $1 \leq t < \infty$ betrachte man eine beliebige kompakte Menge $K \subset \mathbb{C}$. Dann sei $x_0 := \sup_K \text{Re}(z)$. Für $z \in K$ (also $x = \text{Re}(z) \leq x_0$) und $t \geq 1$ ist

$$|e^{-t}t^{z-1}| = e^{-t}\cdot t^{x-1} \leq e^{-t}\cdot t^{x_0-1} =: \varphi(t).$$

Weil die Exponentialfunktion stärker wächst als jedes Polynom, ist

$$\lim_{t\to\infty} t^{x_0-1}/e^{t/2} = 0.$$

Es gibt daher ein $t_0 > 1$ und eine Konstante $k > 0$, so dass $t^{x_0-1} \leq k\cdot e^{t/2}$ für $t \geq t_0$ ist. Aber dann ist $\varphi(t) \leq k\cdot e^{-t}e^{t/2} = k\cdot e^{-t/2}$, und die rechte Seite ist über $[1,\infty)$ integrierbar, denn es existiert der Grenzwert

$$\lim_{R\to\infty}\int_1^R e^{-t/2}\,dt = \lim_{R\to\infty}(-2)(e^{-t/2})\Big|_1^R = \lim_{R\to\infty} 2\Big(\frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{e^{R/2}}\Big) = \frac{2}{\sqrt{e}}.$$

Bemüht man erneut das Lemma 4.5.6, so erhält man, dass F_2 auf $\mathbb{C}$ holomorph ist

Zu den Aufgaben (4.5.7):

Afg. B : Die Lösung ist einfach. Allerdings kann es vorteilhaft sein, erst (c) und dann (b) zu bearbeiten.

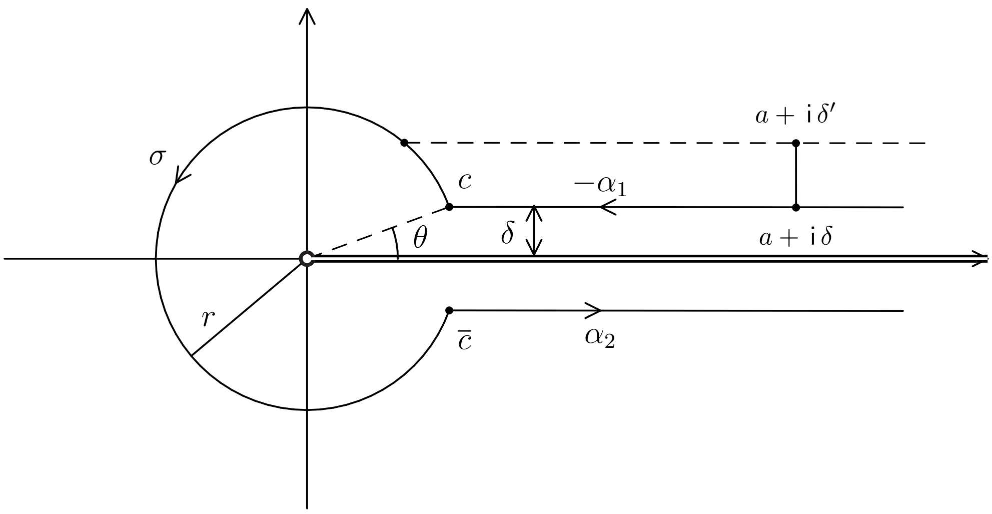
Afg. C : Wenn einer der beiden Grenzwerte existiert, dann existiert auch der andere, und sie müssen gleich sein.

Mit der Substitution $x = s^2$ und $y = t^2$, sowie der Einführung von Polarkoordinaten $s = r\cos\theta$ und $t = r\sin\theta$ erhält man:

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = 2\Gamma(m+n) \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^{2m-1}(\theta)\sin^{2n-1}(\theta)\,d\theta.$$

Daraus folgt die gewünschte Formel.

Afg. E : Man setze $G(z) := \displaystyle\int_{\eta_+} e^{-\zeta}\zeta^{z-1}\,d\zeta$, wobei $\eta_+ := -\alpha_1 + \sigma + \alpha_2$ der Weg in $\mathbb{C}_+ := \mathbb{C} \setminus \{z = x + \mathrm{i}\,y \,:\, x \geq 0,\ y = 0\}$ ist, der sich wie folgt zusammensetzt:



$G(z)$ hängt nicht von δ ab. Man kann also δ gegen null gehen lassen, ohne dass sich $G(z)$ ändert. Man zeige, dass $G(z)$ eine ganze Funktion ist.

Als nächstes zeige man für $z = x + \mathrm{i}\,y$ die Abschätzung

$$\Big| \int_\sigma e^{-\zeta}\zeta^{z-1}\,d\zeta \Big| \leq M \cdot r^x,$$

mit einer geeigneten Konstanten $M > 0$. Es folgt: Ist $\mathrm{Re}(z) > 0$, so ist

$$G(z) = (e^{2\pi\mathrm{i}\,z} - 1)\Gamma(z).$$

Die Gleichung

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \int_{\eta_-} e^{\zeta}\zeta^{-z}\,d\zeta$$

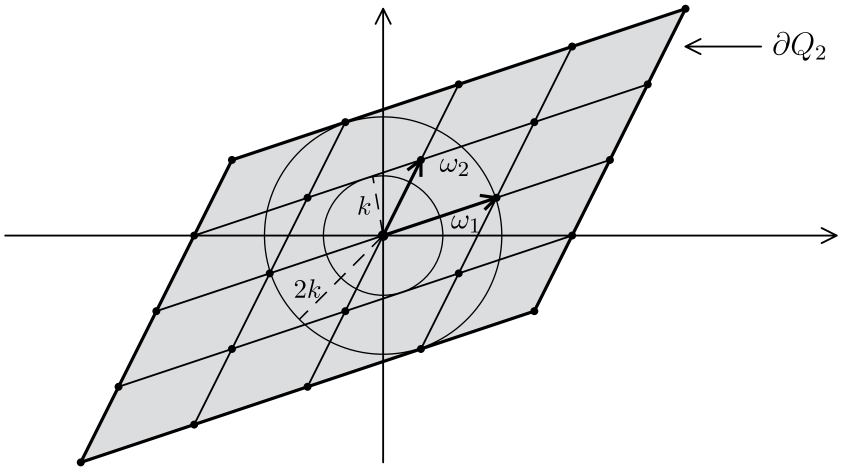
kann man ähnlich beweisen, oder aus der obigen Gleichung herleiten.

Man spricht bei den beiden gewonnenen Formeln auch von den „Hankel'schen Integraldarstellungen der Gamma-Funktion“. Die Integrale heißen „Hankel'sche Schleifenintegrale“.

Abschnitt 4.6:

Seite 240, Zeile 8:

Hier sollte man zum besseren Verständnis eine Skizze einfügen:



Für $\omega \in \Gamma \cap \partial Q_n$ ist $|\omega| = \operatorname{dist}(0,\omega) \geq \operatorname{dist}(0,\partial Q_n)$. Daraus ergibt sich die folgende Abschätzung.

Seite 241, Zeile 7 von unten:

Weil mit ω stets auch $-\omega$ zum Gitter gehört, verschwindet die innere Reihe bei geradem ν. Deshalb sieht die Laurent-Entwicklung ...

Seite 242, Zeile 1:

Definiert man g_2 und g_3 durch die Formeln aus dem Satz, so ist $g_2 = 20C_2$ und $g_3 = 28C_4$.

Zu den Aufgaben (4.6.8):

Afg. A : Man kann eine Basis $\{\omega_1, \omega_2\}$ des Periodengitters wählen, so dass gilt: $|\omega_1|$ ist minimal in $\Gamma \setminus \{0\}$, $|\omega_2|$ ist minimal in $\Gamma \setminus \mathbb{Z}\omega_1$ und $\{\omega_1, \omega_2\}$ ist eine positiv orientierte Basis des $\mathbb{R}^2$.

Nun verbessere man diese Basis schrittweise so lange, bis die gewünschten Eigenschaften erfüllt sind.

Afg. B : Man benutze die Mengen

$$\partial Q_n := \{z = x\omega_1 + y\omega_2 \,:\, \max(|x|, |y|) = n\}$$

und summiere nacheinander über alle ω aus ∂Q_1, ∂Q_2, ∂Q_3 usw.

Afg. C : Man verwende die Differentialgleichung der $\wp$-Funktion und setze die Laurententwicklung ein. Ein Koeffizientenvergleich liefert die Lösung.

Afg. D : Eventuell sollte man bei der Definition e_2 und e_3 vertauschen.

$\wp'$ muss im Periodenparallelogramm drei Nullstellen besitzen. Dies sind $\omega_1/2$, $\omega_2/2$ und $(\omega_1 + \omega_2)/2$. Sei nun

$$e_1 := \wp\Big(\frac{\omega_1}{2}\Big), \quad e_2 := \wp\Big(\frac{\omega_2}{2}\Big) \quad \text{und} \quad e_3 := \wp\Big(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\Big).$$

Ist $F(X) := 4X^3 - g_2 X - g_3$, so kann man die Gleichung $F(\wp(z)) = (\wp'(z))^2$ auswerten.

Abschnitt 4.7:

Seite 250, ZEILE 8:

Man schreibe: „Zunächst wird die linke Seite geeignet umgeformt. Man erhält:“

Seite 250, ZEILE 11:

Nach Multiplikation mit z taucht dann die Funktion $b(z) = z/(\exp z - 1)$ auf:

Seite 253, ZEILE 11:

Wir betrachten speziell den Fall, dass $g = a_0 = \lim_{z\to\infty} f(z)$ eine Konstante ist.

Seite 253, ZEILE 16:

Bitte einfügen: Häufig werden Winkelbereiche $\{z \,:\, \alpha < \arg(z) < \beta\}$ betrachtet.

Seite 253, ZEILE 11 von unten:

Man sollte hier eine klare Definition formulieren:

Die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu / z^\nu$ ist asymptotische Entwicklung von $f(z)$ auf G, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $R > 0$ existiert, so dass gilt:

$$\Big|\, z^n \Big(f(z) - \sum_{\nu=0}^{n} \frac{a_\nu}{z^\nu} \Big) \,\Big| < \varepsilon \text{ für } z \in G \text{ und } |z| \geq R.$$

Seite 254, Zeile 3:

Man füge ein: Es folgt sukzessive:

$$\begin{aligned} a_0 &= \lim_{z\to\infty} f(z), \\ a_1 &= \lim_{z\to\infty} z\big(f(z) - a_0\big), \\ a_2 &= \lim_{z\to\infty} z^2\big(f(z) - a_0 - \frac{a_1}{z}\big) \text{ usw.} \end{aligned}$$