

Korrekturen und Ergänzungen zu GK FnkTh

Zu Kapitel 3:

Abschnitt 3.1:

Seite 125, ZEILE 23:

(Aufgabe B) Es sollte heißen: „Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, (z_ν) eine gegen z_0 konvergente Folge von Punkten $\neq z_0$, $r > 0$ und $D' := D_r(z_0) \setminus (\{z_0\} \cup \{z_\nu : \nu \in \mathbb{N}\})$. Ist f holomorph ...“

Seite 126, ZEILE 13:

(Aufgabe K) Was Konvergenz gegen ∞ in \mathbb{C} bedeutet, wird erst in Kapitel 4 klar werden. Hier sollte man „ $|z| \rightarrow \infty$ “ schreiben.

Zu den Aufgaben (3.1.13):

Afg. A: Die Aussage ist trivial, falls f ein Polynom ist. Diesen Fall kann man also ausschließen. Die Funktion $g(z) := f(1/z)$ besitzt dann in 0 eine isolierte Singularität, die weder hebbar, noch eine Polstelle sein kann. Da sie dann wesentlich sein muss, folgt die Behauptung.

Afg. B: Man beachte, dass z_0 keine isolierte Singularität ist. Es bietet sich ein Widerspruchsbeweis an. Man nehme also an, dass es ein $c \in \mathbb{C}$ und ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $|f(z) - c| > \varepsilon$ für alle $z \in D'$ gilt. Einen Widerspruch kann man erzeugen, indem man zeigt, dass $g(z) := 1/(f(z) - c)$ auf ganz $D_r(z_0)$ fortgesetzt werden kann.

Afg. C: a) $f(z)$ hat Polstellen in den Punkten $z_k = (2k + 1)i\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) $g(z)$ besitzt eine wesentliche Singularität in $z_0 := i$.

c) $h(z)$ hat Polstellen 2. Ordnung in allen Punkten $z_k := k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Afg. D: Ist $g := e^f$, so untersuche man g'/g .

Afg. F: Entwickelt werden soll f um den Punkt $z_0 = 2$ in den Ringgebieten $K_{0,4}$ und $K_{4,\infty}$.

Afg. G: Es ist

$$\frac{1}{(z-2)(z-3)} = -\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} \right] \text{ für } 2 < |z| < 3.$$

Afg. H: Es ist

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(x \sin t - nt)} dt.$$

Afg. J: Natürlich stimmt das nicht.

Afg. K: Die Funktion $f(z)$ muss im Ringgebiet $|a| < |z| < \infty$ entwickelt werden.

Afg. L: Es ist

$$\frac{e^z}{(z-1)^2} = e \cdot \left(\frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{(n+2)!} \right).$$

Abschnitt 3.2:

Seite 128, ZEILE 14:

Die Homotopie muss in G enthalten sein.

Seite 131, im Satz 3.2.7.:

Ist α ein geschlossener Weg in \mathbb{C}^* und ...

Seite 131, Satz und Beweis 3.2.8.:

Die Definition von α_z und der Beweis der Gleichung „ $n(\alpha_z, 0) = n(\alpha, z)$ “ sollten schon vor dem Satz eingefügt werden. Dann kann man im Satz schreiben: „... stetige Argumentfunktion längs α_z “. (Andernfalls wäre der vorliegende Text falsch).

Seite 132, im Satz 3.2.9. (2):

Hier liegt ein schwerwiegender Fehler vor: Natürlich ist B eine **höchstens abzählbare** Vereinigung von Zusammenhangskomponenten. Der „Beweis“ dafür, dass es

nur endlich viele Komponenten gibt, ist Unsinn. Die Abzählbarkeit ist dagegen trivial, gemäß 1.1.11. Der gleiche Fehler taucht in Kapitel 5 auf (Seite 284, Satz 5.1.7.). Es werden aber keine Folgerungen aus der falschen Aussage abgeleitet.

Zu den Aufgaben (3.2.14):

Afg. D: Man setze zunächst voraus, dass $z_0 = 0$ ist. $r(t) := |\alpha(t) - z_0|$ ist auf $[0, 1]$ stetig differenzierbar und in der Nähe von 0 streng monoton wachsend. Ist $t(s) := r^{-1}(s)$ die Umkehrfunktion, so ist

$$\varphi(s) := \arctan \left(\frac{y(t(s))}{x(t(s))} \right)$$

definiert und stetig für $0 < s < \varepsilon$ (für genügend kleines ε). Mit l'Hospital folgt außerdem, dass $\varphi : [0, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $\varphi(0) = 0 = \arg(\alpha'(0))$ ist. Schreibt man $\alpha(t) = r(t)e^{i\psi(t)}$, mit einer stetigen Argumentfunktion ψ mit $\psi(0) = 0$, so ist $\varphi(s) = \psi(t(s))$. Man setze $\tilde{\alpha}(s) := \alpha(t(s)) = s \cdot e^{i\varphi(s)}$.

Afg. E: Man nehme an, dass $t_0 = 0$ und $z_0 = 0$ ist. Gemäß Aufgabe (D) wähle man Parametrisierungen links und rechts von 0: $\tilde{\alpha}_l(t) := te^{i\varphi_l(t)}$ und $\tilde{\alpha}_r(t) := te^{i\varphi_r(t)}$. Dabei muss $\varphi_l(0) = \varphi_r(0) + \pi$ gelten, und man kann annehmen, dass $\varphi_r(t) < \varphi_l(t) < \varphi_r(t) + 2\pi$ für alle $t \in [0, \varepsilon]$ ist. Für $0 < \delta \leq \varepsilon$ definiere man dann:

$$\begin{aligned} C_+(\delta) &:= \{te^{is} \mid 0 < t < \delta, \varphi_r(t) < s < \varphi_l(t)\}, \\ C_-(\delta) &:= \{te^{is} \mid 0 < t < \delta, \varphi_l(t) < s < \varphi_r(t) + 2\pi\}. \end{aligned}$$

Afg. F: Man untersuche die Umlaufzahl von

$$\gamma(t) := z_0 + \frac{\alpha(t) - z_0}{\alpha_0(t) - z_0}$$

bezüglich z_0 .

Abschnitt 3.3:

Seite 139, ZEILE 20:

Dass $f - \sum_{\mu=1}^N h_\mu$ auf G holomorph ist, stimmt nicht, denn es gibt noch Singularitäten in $D'' := D \setminus D'$. Trotzdem stimmt die Aussage von Satz 3.3.2. Das Problem ist, dass der Cauchy'sche Integralsatz bis jetzt nur für geschlossene Wege in einfach zusammenhängenden Gebieten bewiesen wurde. Benutzt man den allgemeinen Cauchy'schen Integralsatz (Satz 5.1.8. auf Seite 284), so erhält man

folgende Aussage: Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein (beliebiges) Gebiet, γ ein geschlossener Integrationsweg in G , $n(\gamma, z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus G$ und f holomorph auf G , so ist $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$. Damit lässt sich der Residuensatz 3.3.2. wie formuliert beweisen, denn $f - \sum_{\mu=1}^N h_{\mu}$ ist auf dem Gebiet $G \setminus D''$ holomorph. Will man auf die Verwendung des allgemeinen Integralsatzes verzichten, so muss man im Satz 3.3.2. voraussetzen, dass D eine endliche Menge ist, und im Beweis von f die Hauptteile in sämtlichen Punkten aus D subtrahieren.

Seite 141, im Argument-Prinzip: Hier tritt das gleiche Problem wie beim Residuensatz auf. Man sollte voraussetzen, dass $N \cup P$ endlich ist.

Seite 144, ZEILE 4:

Man ergänze: „ $(a - 1)^2 = a^2 - 2a + 1 < a^2 + 2a + 1 = (a + 1)^2$, also ...“

Seite 144, ZEILE 20:

Der Beweis von Satz 3.3.10 kann einfacher geführt werden:

BEWEIS: Es reicht, ein normiertes Polynom $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$ zu betrachten. Man schreibe dann $p(z) = z^n(1 + g(z))$ mit $g(z) := a_{n-1}/z + \dots + a_0/z^n$. Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, $R > 0$ hinreichend groß und $|z| \geq R$, so ist

$$|g(z)| \leq \frac{|a_{n-1}|}{R} + \dots + \frac{|a_0|}{R^n} < \varepsilon,$$

also $|p(z)| = |z|^n \cdot |1 + g(z)| \leq C \cdot |z|^n$, für $C := 1 + \varepsilon$. Außerdem gilt: Wählt man $\varepsilon < 1$, so ist $c := 1 - \varepsilon > 0$ und $|p(z)| \geq |z|^n \cdot (1 - |g(z)|) \geq c \cdot |z|^n$. ■

Seite 146, ZEILE 3:

Im Sinne der Übersichtlichkeit sollte man hier einen Satz formulieren:

Satz:

Sei $f(z) = p(z)/q(z)$ rational und ohne reelle Polstellen, $\deg(q) \geq \deg(p) + 2$. Dann existiert das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \cdot \sum_{\operatorname{Im}(z) > 0} \operatorname{res}_z(f).$$

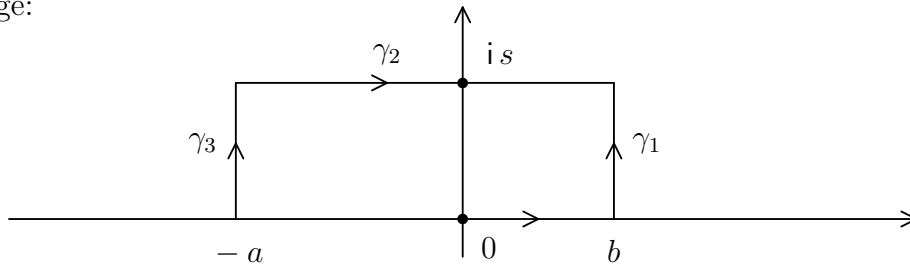
Seite 147, vor „3.3.13. Aufgaben“:

Man sollte hier noch einen Typ (3) einführen, Integrale der Gestalt $R(x)e^{ix}$ mit einer rationalen Funktion R . Man spart dann an anderer Stelle die entsprechenden Abschätzungen ein.

Satz: Sei $f(z) = p(z)/q(z)$ rational und ohne reelle Polstellen, $\alpha > 0$ und $\deg(q) \geq \deg(p) + 1$. Dann ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x} dx = 2\pi i \cdot \sum_{\text{Im}(z)>0} \text{res}_z(f(z)e^{i\alpha z}).$$

BEWEIS: Aus den Voraussetzungen folgt, dass Konstanten $C, R > 0$ existieren, so dass $|f(z)| \leq C/|z|$ für $|z| \geq R$ ist. Insbesondere ist dann $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$. Die Existenz des uneigentlichen Integrals darf man hier nicht voraussetzen. Man muss also einen neuen Beweis finden. Dazu benutze man die folgenden Integrationswege:



Es sei stets $s = a + b$, und die Zahlen seien außerdem so gewählt, dass alle Polstellen von f in \mathbb{H} im Innern des Rechtecks liegen. Es reicht zu zeigen, dass die Integrale $I_\nu := \int_{\gamma_\nu} f(z)e^{i\alpha z} dz$ für $\nu = 1, 2, 3$ und $a, b \rightarrow \infty$ gegen null streben. Dabei sei $\gamma_1(t) := b + it$ und $\gamma_3(t) := -a + it$ für $0 \leq t \leq s$, sowie $\gamma_2(t) := t + is$ für $-a \leq t \leq b$. Insbesondere folgt dann auch die Existenz des uneigentlichen Integrals.

1) Die Standardabschätzung ergibt:

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq (a + b) \cdot \sup_{|\gamma_2|} |f(z)e^{i\alpha z}| \leq s \cdot e^{-\alpha s} \cdot \sup_{|\gamma_2|} |f(z)| \\ &\leq \sup_{|\gamma_2|} |f(z)| \rightarrow 0 \text{ für } s \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

wobei man annehmen konnte, dass $e^{\alpha s} > s$ ist.

b) Es ist

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \int_0^s |f(b + it)| \cdot e^{-\alpha t} dt \leq \sup_{|\gamma_1|} |f| \cdot \int_0^s e^{-\alpha t} dt \\ &= \sup_{|\gamma_1|} |f| \cdot \frac{1 - e^{-\alpha s}}{\alpha} \leq \frac{1}{\alpha} \sup_{|\gamma_1|} |f| \rightarrow 0 \text{ für } a, b \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

$I_3(t)$ wird analog abgeschätzt.

Damit folgt die Existenz des uneigentlichen Integrals und die Formel. ■

Bemerkung: Der Beweis der „Komplexen Umkehrformel“ (Seite 167/168) entfällt dadurch.

Man könnte dann als Beispiel die folgenden Integrale berechnen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 2x + 4} dx \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 + 2x + 4} dx.$$

Seite 147, in Aufgabe B: Die Definition von α sollte lauten:

$$\alpha(t) := \begin{cases} 1 + e^{i(2t-\pi)} & \text{für } 0 \leq t \leq 2\pi, \\ -1 + e^{i(4\pi-2t)} & \text{für } 2\pi < t \leq 4\pi. \end{cases}$$

Seite 148, in Aufgabe C: Es fehlt ein (c) vor dem dritten Teil der Aufgabe.

Zu den Aufgaben (3.3.13):

Afg. A: In z_0 liegt eine Polstelle der Ordnung 3 vor. Man erhält:

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) = -\frac{3\sqrt{2}}{128} i.$$

Afg. B: Der Integrand hat einfache Polstellen bei $z_{1/2} = \pm i$ und bei $z_{3/4} = \pm 1/2$. Nach der Korrektur der Aufgabenstellung erhält man: $\int_{\alpha} f(z) dz = 0$.

Wäre die Umlaufszahl im linken Kreis $= -3$, so wäre $\int_{\alpha} f(z) dz = -2\pi i$.

Afg. C: a) $\int_{\alpha} f(z) dz = 10\pi i$.

b) $\operatorname{res}_0(f) = a_{-1} = 1/2$.

c) Man muss den Satz von Rouché zweimal benutzen und erhält dann: f besitzt in $D_1(0)$ keine Nullstelle, aber 7 Nullstellen in $D_2(0)$.

Afg. D:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx = \pi\sqrt{2}.$$

Afg. E: Es ist $J = \pi/(4a^3)$.

Afg. F: Sei $z_0 := i$ und $z_1 := -1 + i$. Dann ist

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) = \frac{9i - 12}{100} \quad \text{und} \quad \operatorname{res}_{z_1}(f) = \frac{3 - 4i}{25}.$$

Afg. G: a) Pol 1. Ordnung, $\text{res}_0(f) = 1$.

b) Pol 1. Ordnung, $\text{res}_0(f) = -1/5$.

c) Pol 1. Ordnung, $\text{res}_0(f) = 1$.

d) Pol 3. Ordnung, $\text{res}_0(f) = -1/6$.

Afg. H: $z_0 := e^{i\pi/n}$ ist die einzige Singularität von $f(z) := 1/(1+z^n)$ im Innern des Weges $\alpha + \beta - \gamma$. Dabei ist $\text{res}_{z_0}(f) = -z_0/n$. Das Integral über β strebt für $R \rightarrow \infty$ gegen 0, und deshalb ist

$$\frac{-2\pi i z_0}{n} = (1 - z_0^2) \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^n}.$$

Afg. I: Die Kurve ist eine Ellipse mit den Brennpunkten -2 und 2 , also den Halbachsen $a = 3$ und $b = \sqrt{5}$. Der Integrand $f(z)$ hat bei $z_1 := i$ einen einfachen und bei $z_2 := -i$ einen dreifachen Pol. Es ist $\text{res}_{z_1}(f) = -1/8$ und $\text{res}_{z_2}(f) = -5 + 9/8$. Damit ist $\int_\alpha f(z) dz = -8\pi i$.

Afg. J: Die Aufgabe wäre mit Kenntnis des Abschnittes 3.4. leichter zu lösen, es geht aber auch direkt. Hier sind zunächst ein paar Schritte zur Vereinfachung:

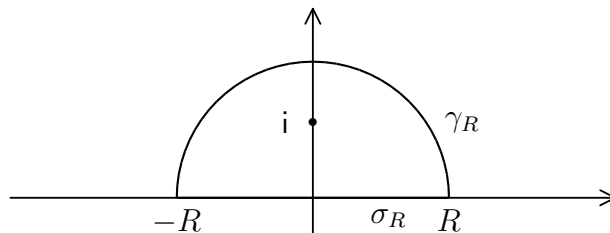
1. Da der Grad des Nenners von $R(x) := x/(x^2 + 1)^2$ deutlich höher als der Grad des Zählers ist, existiert das uneigentliche Integral. Da der Integrand $R(x) \sin x$ gerade ist, ist

$$\int_0^\infty R(x) \sin x dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty R(x) \sin x dx.$$

2. Wegen der in (1) festgestellten Symmetrie ist

$$\int_{-\infty}^\infty R(x) \sin x dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R R(x) \sin x dx.$$

Man braucht die Grenzen $-R$ und R also nicht unabhängig voneinander gegen ∞ gehen zu lassen. Deshalb bietet sich folgender Weg an:



Sei $\sigma_R : [-R, R] \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $\sigma_R(t) := t$ und $\gamma_R : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $\gamma_R(t) = Re^{it}$. Außerdem sei $\alpha_R := \sigma_R + \gamma_R$. Dann ist α_R ein geschlossener Weg, der den singulären Punkt i enthält.

3. Man beachte noch, dass $\sin x = \operatorname{Im}(e^{ix})$ ist. Da sich $\sin(it)$ für $t \rightarrow \infty$ schlecht abschätzen lässt, arbeitet man besser mit der Exponentialfunktion und dem Integranden

$$f(z) := \frac{z}{(z^2 + 1)^2} e^{iz}.$$

Dann ist $\int_{-R}^R R(x) \sin x \, dx = \operatorname{Im} \int_{-R}^R f(x) \, dx$ und

$$\int_{-R}^R f(x) \, dx + \int_0^\pi f(\gamma_R(t)) \gamma_R'(t) \, dt = \int_{\alpha_R} f(z) \, dz = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_i(f).$$

4. Kann man also zeigen, dass $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi f(\gamma_R(t)) \gamma_R'(t) \, dt = 0$ ist, so ist

$$\int_0^\infty R(x) \sin x \, dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im}(2\pi i \operatorname{res}_i(f)).$$

Die Abschätzung des Integral über den Halbkreis γ_R funktioniert nun folgendermaßen:

Da sich der Grad des Zählers und der Grad des Nenners um 3 unterscheiden, gibt es eine Konstante $C > 0$ und ein R_0 , so dass $|R(z)| \leq C/|z|^3$ für $|z| \geq R_0$ gilt. Berücksichtigt man, dass $\sin t$ symmetrisch zu $t = \pi/2$ und $\sin t \geq (2t)/\pi$ auf $[0, \pi/2]$ ist, so erhält man für großes $|z|$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\pi f(\gamma_R(t)) \gamma_R'(t) \, dt \right| &\leq \frac{C}{R^3} \int_0^\pi |e^{i\gamma_R(t)} \gamma_R'(t)| \, dt \\ &= \frac{C}{R^2} \int_0^\pi e^{-R \sin t} \, dt = \frac{2C}{R^2} \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin t} \, dt \\ &\leq \frac{2C}{R^2} \int_0^{\pi/2} e^{-2Rt/\pi} \, dt = \frac{C\pi}{R^3} (1 - e^{-R}), \end{aligned}$$

und das strebt für $R \rightarrow \infty$ gegen 0.

Nun bleibt nur noch das Residuum zu berechnen:

$$\operatorname{res}_i \frac{ze^{iz}}{(z^2 + 1)^2} = \lim_{z \rightarrow i} \left[\frac{ze^{iz}}{(z + i)^2} \right]' = \frac{1}{4e}.$$

Damit ist

$$\int_0^\infty R(x) \sin x \, dx = \operatorname{Im}(\pi i \operatorname{res}_i(f)) = \frac{\pi}{4e}.$$

Afg. K: a) Das Residuum in $z = 1$ ist der Koeffizient bei $(z - 1)^{-1}$, also $= 2e^2$.

b) Es ist $f(z) := \frac{1}{z^2(z-3)^2} = \sum_{m=-2}^{\infty} \frac{m+3}{(-3)^{m+4}}(z-3)^m$ und $\text{res}_3(f) = -\frac{2}{27}$.

Afg. L: Es handelt sich um ein Integral vom Typ 1. Es ist

$$f(z) = \frac{-4z}{9(z-3i)^2(z-i/3)^2} \quad \text{und} \quad \text{res}_{i/3}(f) = \frac{5}{64},$$

also $\int_0^{2\pi} 1/(5-3\sin t)^2 dt = (5\pi)/32$.

Afg. M: Bei der Berechnung geht man genauso wie bei Aufgabe (L) vor. Das Ergebnis ist π .

Afg. N: Es ist $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(3\cos t + 5)^2} = \frac{5\pi}{8}$.

Afg. O: Es ist $\int_C \frac{z^5}{(z^2-1)(z+i)^2} dz = -\frac{\pi}{2} - 4\pi i$.

Abschnitt 3.4:

Seite 151, ZEILE 15:

Auch hier sollte ein Satz formuliert werden, um das Ganze übersichtlicher zu gestalten:

Satz: Ist $\text{Re}(a) > 0$, $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)z^a = 0$ und $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z)z^a = 0$, so existiert das Integral

$$\int_0^{\infty} f(x)x^{a-1} dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i a}} \cdot \sum_{w \in \tilde{\mathbb{C}}} \text{res}_w (f(z)z^{a-1}).$$

Seite 153, vor Typ 4:

Hier sollte noch ein weiteres Beispiel eingefügt werden, zum Beispiel die Berechnung des Integrals $I := \int_0^{\infty} \frac{(\ln x)^2}{x^2 + 1} dx$. Das wird in der zweiten Auflage geschehen.

Seite 154, ZEILE 5:

Auch hier sollte ein Satz formuliert werden, der präzisiert, was danach bewiesen wird.

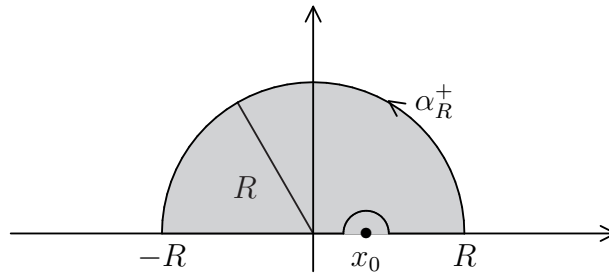
Seite 156, ZEILE 5 von unten:

Es muss heißen

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \dots$$

Seite 158, ZEILE 1 von unten:

In der Skizze sollten Bezeichnungen ergänzt werden:



Seite 159, ZEILE 1:

Verbesserter Text: „Es sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $-R < x_0 < R$. Außerdem gebe es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $R_0 > 0$, so dass ...“

Seite 159, ZEILE 4:

$$\left| \int_{\alpha_R^+} \frac{f(z)}{z - x_0} dz \right| \leq R\pi \cdot \frac{1}{R - R_0} \cdot \sup_{|\alpha_R^+|} |f| = \frac{\pi}{1 - R_0/R} \cdot \sup_{|\alpha_R^+|} |f|$$

Seite 170, ZEILE 16:

Es ist völlig unklar, was dort definiert wird. Die **Definition** kann man weglassen, nur der Text soll bleiben (inklusive der Einführung der Begriffe „Originalfunktion“ und „Bildfunktion“).

Seite 175, ZEILE 4 von unten:

„wenn wir mit $F(z)$ die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}[f(t)]$ bezeichnen.“