Korrekturen und Ergänzungen zu GK FnkTh

Zu Kapitel 2:

Abschnitt 2.1:

Seite 71, Zeile 1:

Der Beweis von (4) lässt sich etwas eleganter formulieren, wenn man die Standardabschätzung benutzt.

Seite 72, Zeile 17:

Für $n \neq 1$ kann man die Tatsache benutzen, dass $F(z) := \frac{1}{n+1}(z - z_0)^{n+1}$ eine Stammfunktion von $(z - z_0)^n$ ist. Dann spart man sich die Integralberechnung.

Zu den Aufgaben (2.1.8):

Afg. A : Man könnte alle vier Randstrecken parametrisieren und damit die vier Teilintegrale berechnen. Einfacher geht es, wenn man Stammfunktionen benutzt. Um jeweils den richtigen Logarithmuszweig zu finden, sollte man die Ecken in Polarkoordinaten beschreiben. Das Integral ergibt dann – wie erwartet – $2\pi\,\mathrm{i}$.

Afg. B : Hier soll man natürlich die Standard-Abschätzung anwenden.

Afg. E : Das Ergebnis ist natürlich $4\pi\,\mathrm{i}$.

Afg. F : Man zeige zunächst mit Hilfe der Überdeckungseigenschaft, dass $M := |\alpha| \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$ kompakt ist. Die stetige Funktion f ist dann auf M sogar gleichmäßig stetig, und $f \circ \alpha_n$ konvergiert auf $I := [0,1]$ gleichmäßig gegen $f \circ \alpha$.

Benutzt man dies, alle anderen Voraussetzungen und die Standard-Abschätzung, so kann man zeigen: $\left| \int_{\alpha_n} f(z)\,dz - \int_\alpha f(z)\,dz \right| \to 0$ für $n \to \infty$.

Afg. G : Sei $\alpha_1(t) := t$ und $\alpha_2(t) := 1 + t\,\mathrm{i}$, jeweils für $0 \le t \le 1$. Dann ist

$$\int_\alpha |z|^2\,dz = \frac{1}{3}(1 + 4\,\mathrm{i}).$$

Setzt man $\alpha_3(t) := t\,\mathsf{i}$ und $\alpha_4(t) := t + \mathsf{i}$, so ist

$$\int_{\alpha_3} |z|^2\,dz + \int_{\alpha_4} |z|^2\,dz = \frac{1}{3}(4 + \mathsf{i}).$$

Das Integral hängt also vom gewählten Weg ab!

Abschnitt 2.2.:

Seite 85, 2. Zeile von unten:

Das Integral erstreckt sich über $\partial\Delta$.

Seite 86, 13. Zeile von oben (Aufgabe D):

Der Hinweis auf die Integralformel ist irreführend, sie wird nicht benutzt. Stattdessen sollte man eventuell einen Hinweis auf die Eulersche Formel geben,

Zu den Aufgaben (2.2.13):

Afg. A: Es ist $z^3 + 2z^2 - 3z - 10 = (z-2)(z^2 + 4z + 5)$. Setzt man also $f(z) := e^{-z}/(z^2 + 4z + 5)$, so liefert die Cauchy'sche Integralformel:

$$\int_{\partial\Delta} \frac{e^{-z}}{z^3 + 2z^2 - 3z - 10}\,dz = \int_{\partial\Delta} \frac{f(z)}{z-2}\,dz = \frac{2\pi\,\mathsf{i}}{17}e^{-2}.$$

Afg. B: a) Setzt man $f(z) := \dfrac{1}{z} \cdot F\left(\dfrac{1}{2\,\mathsf{i}}\Big(z - \dfrac{1}{z}\Big), \dfrac{1}{2}\Big(z + \dfrac{1}{z}\Big)\right)$, so erhält man:

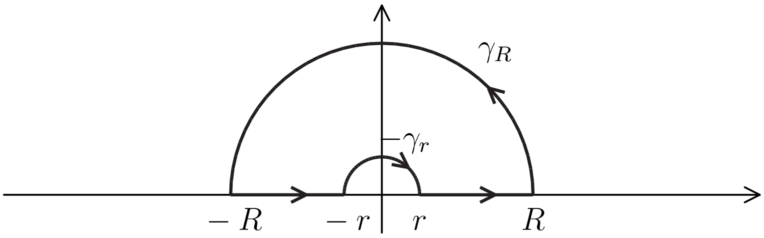
$$\frac{1}{\mathsf{i}} \int_{\partial D_1(0)} f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} F(\sin t, \cos t)\,dt.$$

b) Hier ist $f(z) = 1/(-\,\mathsf{i}\,z^2 + 3z + \mathsf{i})$, mit Polstellen in $a = -\dfrac{\mathsf{i}}{2}(3 + \sqrt{5})$ und $b = -\dfrac{\mathsf{i}}{2}(3 - \sqrt{5})$. Damit erhält man: $I = \dfrac{2\pi}{\sqrt{5}}$.

Afg. C: Es ist $z^3 + 8 = (z+2)(z - z_1)(z - z_2)$. Die Punkte $z_1 := 1 + \mathsf{i}\sqrt{3}$ und $z_2 := 1 - \mathsf{i}\sqrt{3}$ liegen außerhalb der Kreise $D_{3/2}(1)$ und $D_1(-2)$. Ist $C_1 := \partial D_{3/2}(1)$ und $C_2 := \partial D_1(-2)$, so gilt:

$$\int_{C_1} \frac{z\sin z}{z^3 + 8}\,dz = 0 \quad \text{und} \quad \int_{C_2} \frac{z\sin z}{z^3 + 8}\,dz = \frac{\pi\sin(2)}{3}\,\mathsf{i}.$$

Afg. D : Es soll die folgende Skizze benutzt werden:



Ist $\sigma_\pm$ die Verbindungsstrecke von r nach R bzw. von $-R$ nach $-r$ und $\Gamma := \sigma_+ + \gamma_R + \sigma_- - \gamma_r$, so ist $\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$ für jede holomorphe Funktion f auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Der Trick, der dann weiterhilft, besteht darin, $(\sin x)/x$ als Imaginärteil von $e^{\mathsf{i}\,x}/x$ aufzufassen. Dann funktionieren alle nötigen Abschätzungen.

Man zeige, dass das Integral über $e^{\mathsf{i}\,z}/z$ und γ_r für $r \to 0$ gegen $\pi\,\mathsf{i}$ konvergiert, und das über γ_R für $R \to \infty$ gegen 0. Das liefert das zu erwartende Ergebnis $\int_0^\infty (\sin x)/x\,dx = \pi/2$.

Afg. E : Auf $\mathbb{C}' = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ gibt es (mit Hilfe von $\log_{(-\pi)}(z)$) zwei verschiedene holomorphe Wurzelfunktionen. Je nachdem erhält man als Wert für das gesuchte Integral $4\,\mathsf{i}$ oder $-4\,\mathsf{i}$.

Afg. F : Man benutze die Partialbruchzerlegung.

Afg. G : Das erste Integral ergibt $-\,\mathsf{i}\,(e + e^{-1})/4$, das zweite 0.

Afg. H : Man approximiere die Parametrisierung α von ∂Q durch Wege im Innern des Rechtecks und benutze Aufgabe F in 2.1.8.

Abschnitt 2.3.:

Seite 92, im Beweis des Identitätssatzes, (3) $\implies$ (1), folgt die Tatsache, dass $G \setminus N$ offen ist, auch daraus, dass N Durchschnitt von (relativ) abgeschlossenen Mengen ist.

Zu den Aufgaben (2.3.24):

Afg. B : Mit $\operatorname{Re} f$ ist auch $g := \exp \circ f$ beschränkt. Der Rest folgt leicht.

Afg. C : Man unterscheide, ob $|f|$ auf ∂D konstant ist oder nicht.

Afg. D: Man arbeite mit den Taylor-Entwicklungen in a.

Afg. F: Man benutze die höheren Integralformeln und die Standardabschätzung.

Afg. G: Man erinnere sich an den Hauptsatz 2.1.5.

Afg. H: Nein / Ja / Nein.

Afg. I: Man zeige zunächst: Sind $C, D > 0$ zwei Konstanten und ist $R \geq \max(1, D)$, so ist $C|z|^n + D \leq (C+1)|z|^n$ für $|z| \geq R$. Der Rest folgt durch Induktion nach n.

Abschnitt 2.4. (Anwendungen):

Seite 104, Hier sollte etwas zum Beweis von (3) von Satz 2.4.7. gesagt werden:

Ein lokales Extremum von f in $z_0 \in G$ ist ein globales Extremum von f auf einer geeigneten kleinen Kreisumgebung $U = U(z_0) \subset G$. Im Beweis von Satz 2.4.2 wurde gezeigt, dass f dann auf U konstant ist, etwa $\equiv c$. Da $g(z) := f(z) - c$ ebenfalls harmonisch auf G und $g(z) \equiv 0$ auf U ist, verschwindet g nach (2) auf G, und f ist konstant.