Korrekturen und Ergänzungen zu GK FnkTh

Zu Kapitel 1:

Abschnitt 1.1:

Seite 3, Zeile 6:

Es muss heißen $1 = z \cdot \dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}}, \ldots$

Seite 4, Zeile 12:

Die Klammer nach dem Gleichheitszeichen ist überflüssig.

Seite 4, in der Skizze muss es heißen:

$z \cdot w = -5 + \mathsf{i}\,5$.

Seite 5, Zeile 6:

Es heißt „von Moivre".

Seite 6, Beispiel 1.1.5.:

Hier kann man die Berechnung von $a := \cos(\pi/5)$ und $b := \sin(\pi/5)$ einfügen. Die Formel von Moivre liefert die Gleichung $(a + \mathsf{i}\,b)^5 = \cos(\pi) + \mathsf{i}\,\sin(\pi) = -1$. Vergleicht man die Realteile, so erhält man

$$5a^4b - 10a^2b^3 + b^5 = 0, \text{ also } 5a^4 - 10a^2b^2 + b^4 = 0.$$

Setzt man $a^2 + b^2 = 1$ ein, so führt das zu der Gleichung $16(a^2)^2 - 12a^2 + 1 = 0$. Die Auflösung nach a^2 ergibt

$$a^2 = \frac{1}{8}(3 + \sqrt{5}) \quad \text{und} \quad b^2 = 1 - a^2 = \frac{1}{8}(5 - \sqrt{5}).$$

Daraus erhält man die Werte für $\cos(2\pi/5)$ und $\sin(2\pi/5)$.

Seite 10, Zeile 21:

Es muss ein „z" ergänzt werden: $U = \{z \in G \,:\, z$ kann ...

Seite 11, Zeile 1:

Man sollte hier das Wort ***äquivalent*** hervorheben, da später auf den Begriff Bezug genommen wird.

Seite 11, in der Definition:

Man kann auch ***Wegkomponente*** sagen.

Seite 12, Definition der diskreten Menge: Man sollte besser gleich etwas allgemeiner definieren, wann eine Teilmenge M eines Gebietes $G \subset \mathbb{C}$ ***diskret in*** G ist. Sie muss in G relativ abgeschlossen sein und darf nur aus isolierten Punkten bestehen. Zum Beispiel ist die Menge der Zahlen $1/n$ diskret in $G := D_1(1)$, denn sie besitzt in G keinen Häufungspunkt.

Seite 17, In Aufgabe G: Das Symbol $\operatorname{dist}(z, w)$ steht für $d(z, w)$, wobei unter d die kanonische Metrik auf $\mathbb{C}$ (mit $d(z, w) := |w - z|$) zu verstehen ist. Das hätte erwähnt werden sollen.

Zu den Aufgaben (1.1.20):

Afg. C : Das erfordert ein wenig Ungleichungs-Yoga. Man zeige speziell $-|z - w| \leq |z| - |w|$ und $|z| - |w| \leq |z - w|$.

Afg. D : Man erhält:

$$\begin{aligned} \cos(5t) &= \cos^5 t - 10\cos^3 t \sin^2 t + 5\cos t \sin^4 t \\ \text{und} \quad \sin(5t) &= 5\cos^4 t \sin t - 10\cos^2 t \sin^3 t + \sin^5 t. \end{aligned}$$

Afg. E : Es ist $\zeta_6 = \dfrac{1}{2}\Big(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\Big)$.

Afg. F : G_1 und G_3 sind Gebiete, G_2 ist kein Gebiet.

Afg. G : Ist $z \in K$, so setze man $\operatorname{dist}(z, A) := \inf\{\operatorname{dist}(z, w) : w \in A\}$, und es sei $\operatorname{dist}(K, A) := \inf\{\operatorname{dist}(z, A) : z \in K\}$. Es gibt einen Punkt $z_0 \in K$ mit $\operatorname{dist}(z_0, A) = \operatorname{dist}(K, A)$.

Man kann dann einen Punkt $w_0 \in L$ finden, so dass gilt:

$$\operatorname{dist}(z_0, w_0) = \operatorname{dist}(z_0, A) = \operatorname{dist}(K, A),$$

Afg. H : Die Menge S ist nicht wegzusammenhängend. Den Beweis kann man durch Widerspruch führen. Ist $\alpha : [0, 1] \to S$ ein stetiger Weg mit $\alpha(0) = z_0 := 2/\pi + \mathrm{i}$ und $\alpha(1) = 0$ und $p : S \to \mathbb{R}$ definiert durch $p(x + \mathrm{i}\,y) := x$, so ist $f := p \circ \alpha : [0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig, $f(0) = 2/\pi$ und $f(1) = 0$. Man zeige damit, dass α bei $t = 1$ nicht stetig sein kann.

Afg. I : a) Man überdecke K durch offene Kreisscheiben, so dass die Vereinigung ihrer abgeschlossenen Hüllen eine kompakte Menge $L \subset G$ bildet.

b) Die Menge $K := \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ ist kompakt und besitzt unendlich viele Zusammenhangskomponenten.

Afg. K : Die Häufungspunkte von z_n wurden schon in Aufgabe (B) berechnet. Die Folgen w_n und u_n besitzen jeweils nur einen Häufungspunkt.

Abschnitt 1.2.:

Seite 21, ZEILE 10:

Die Summation sollte bei 0 beginnen: $F_N := \sum_{\nu=0}^{N} f_\nu$

Seite 21, ZEILE 17:

Ein Zeichen „$\leq$“ ist überflüssig.

Seite 21, vor der Definition:

Der Satz „Aus der normalen Konvergenz folgt die punktweise und gleichmäßige Konvergenz“ sollte explizit formuliert werden, und danach sollte der Satz „Der Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten Reihe von stetigen Funktionen ist wieder stetig“ eingefügt werden. Das Weierstraß-Kriterium (auf Seite 22) folgt dann trivial.

Seite 21, in der Definition:

$z_0 \in \mathbb{C} \setminus G$ sollte als „Häufungspunkt von G“ vorausgesetzt werden.

Seite 27, im Beweis von Hilfssatz 1.2.6.:

Der letzte Abschnitt kann abgekürzt werden: $G \setminus Z = \{z \in G : f(z) \neq c\}$ ist offen, weil f stetig ist. Also ist $Z = G$ und f konstant auf G.

Seite 27, im Beweis von Satz 1.2.7.:

Der Beweis wird klarer, wenn man g durch g_z und w durch w_t ersetzt.

Zu den Aufgaben (1.2.13):

Afg. A : Man muss nur quadratische Gleichungen lösen. Im ersten Fall ergeben sich die beiden Lösungen $z_1 = 3-2\,\mathrm{i}$ und $z_2 = -3+2\,\mathrm{i}$, im zweiten Fall $w_1 = 1+5\,\mathrm{i}$ und $w_2 = -1-5\,\mathrm{i}$.

Afg. C: (a) $R = 1$, (b) $R = 3$, (c) $R = 1/\sqrt{3}$ und (d) $R = \infty$.

Afg. D: Sei r der Konvergenzradius von $Q(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ mit $c_n := a_{n-1}/n$ für $n \geq 1$ und $c_0 = 0$. Dann ist $Q'(z) = P(z)$. Man verwende Satz 1.2.2.

Afg. G: Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\alpha_n(t) := w_n + t(z_n - w_n)$. Dann setze man $g_n := f \circ \alpha_n$. Für festes $t \in [0,1]$ kann man zeigen, dass g_n in t differenzierbar und $g_n'(t) = (z_n - w_n) \cdot f'(\alpha_n(t))$ ist. Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $\xi_n \in (0,1)$, so dass $g_n'(\xi) = g_n(1) - g_n(0)$ ist, also $f(z_n) - f(w_n) = (z_n - w_n) \cdot f'(w_n + \xi_n(z_n - w_n))$. Daraus folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(z_n) - f(w_n)}{z_n - w_n} = f'(z_0).$$

Afg. H: f ist eine Möbius-Transformation mit $f \circ f = \mathrm{id}$, also $f^{-1} = f$. Man zeige dann:

$$\left| \frac{z+1}{z-1} \right| < 1 \iff \mathrm{Re}(z) < 0.$$

Afg. I: Für $|z| \leq 1/2$ ist $|\exp(z) - 1| \leq 2|z|$. Nun sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt, und (f_n) eine Folge stetiger Funktionen auf K, die gleichmäßig gegen f konvergiert. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und ein $C > 0$, so dass $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon/(2C)$ für $n \geq n_0$ und alle $z \in K$ gilt. Dann ist (für diese z und diese n) $|(\exp \circ f_n)(z) - (\exp \circ f)(z)| < \varepsilon$.

Abschnitt 1.3.:

Seite 40, ZEILE 6:

Vorher sollte definiert werden, was ein glatter Weg ist: α heißt ***glatt***, falls α stetig differenzierbar und $\alpha'(t) \neq 0$ ist.

Seite 43, ZEILE 9:

In Aufgabe G: $\alpha(t) := (2 + t) + \mathrm{i}\,(4 + 2t)$ und $\beta(t) := (2 + t) + \mathrm{i}\,(4 - t)$.

Zu den Aufgaben (1.3.14):

Afg. B: f ist nirgends holomorph, g ist holomorph und h ist nicht holomorph.

Afg. C: f ist im Nullpunkt partiell differenzierbar, es ist $f_x(0) = f_y(0) = 0$.

Der Differenzenquotient von f in $z = 0$ hat die Gestalt $\Delta(z) = xy/(x^2 + y^2)$. Für verschiedene Folgen $z_n \to 0$ strebt $\Delta(z_n)$ gegen verschiedene Grenzwerte. Also ist

f im Nullpunkt nicht komplex differenzierbar.

Afg. E: Die Aufgabe erfordert sehr sorgfältiges Rechnen mit der Kettenregel.

Afg. F: Man beweise zunächst zwei Formeln. Sind f und g reell differenzierbar, so gilt: $(f \circ g)_z = (f_w \circ g)g_z + (f_{\overline{w}} \circ g)\overline{g}_z$ und $(f \circ g)_{\overline{z}} = (f_w \circ g)g_{\overline{z}} + (f_{\overline{w}} \circ g)\overline{g}_{\overline{z}}$. Man leitet die Formeln aus der gewöhnlichen Kettenregel und der Definition der Ableitungen nach z und $\overline{z}$ ab.

Nun sei $q(z) := \overline{z}$. Dann ist $f^*(z) = q \circ f \circ q(z)$, und es gilt: $(f^*)_{\overline{z}} = 0$.

Afg. G: Es ist

$$\angle(\alpha, \beta) = \arg\left(\frac{1 - \mathsf{i}}{1 + 2\,\mathsf{i}}\right) = \arg\left(-\frac{1}{5} - \frac{3}{5}\,\mathsf{i}\right) = \pi + \arctan(3) \approx 4.39\ldots,$$

das entspricht ungefähr 252°.

Abschnitt 1.4.:

Seite 43, in Satz 1.4.1.:

Der Zusatz „(und damit biholomorph)“ sollte gestrichen werden (weil der Streifen S_a nicht offen ist).

Seite 45, im Beweis von Satz 1.4.4.:

In der letzten Zeile könnte man hinter „Exponentialfunktion“ den Zusatz „, deren Ableitung nirgends verschwindet,“ einfügen. Außerdem fehlt der Beweis der Aussage „$\log'(z) = 1/z$“. Das geht ganz einfach:

$$\text{Für } z \in \mathbb{C}' \text{ ist } 1 = (\exp \circ \log)'(z) = \exp(\log(z)) \cdot \log'(z) = z \cdot \log'(z).$$

Seite 45, letzte Zeile:

Man ersetze z durch w, es muss heißen: $\widetilde{L}'(w) = \ldots$

Seite 48,

Die Konstruktion des Arcustangens sollte etwas klarer formuliert werden. Das geschieht in der 2. Auflage.

Zu den Aufgaben (1.4.5):

Afg. A: Es ist

a) $\log(-2-2\,\mathsf{i}\,) = \frac{3}{2}\ln 2 + \mathsf{i}\,\big(\frac{5\pi}{4} + 2\pi\,\mathsf{i}\,k\big)$.

b) $\log(\,\mathsf{i}\,) = \mathsf{i}\,\big(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\big)$.

c) $(-\,\mathsf{i}\,)^{\mathsf{i}} = e^{-3\pi/2}\,e^{-2\pi k}$.

d) $2^{\mathsf{i}} = \exp(\,\mathsf{i}\cdot\log(2)) = (\cos(\ln 2) + \mathsf{i}\,\sin(\ln 2))e^{-2\pi k}$.

Afg. C: Es ist $|\log(1+z) - z| = |z|^2\big(1/2 + z\cdot g(z)\big)$ mit $|g(z)| < 1$.

Afg. D: Sei $K \subset D_R(0)$. Ist $|z| < R$, so liegt $1 + z/n$ in $D_{1/2}(1)$, und $f_n(z) = n\cdot\log(1+z/n)$ ist definiert. Für $z \in K$ und $n \ge 2R$ ist dann $|f_n(z) - z| \le R^2/n$. Daraus folgt, dass $f_n(z)$ auf K gleichmäßig gegen $f(z) := z$ konvergiert. Dann konvergiert $\big(1 + z/n\big)^n = \exp f_n(z)$ gegen $\exp f(z) = e^z$. Warum?

Afg. E: G besteht aus allen Punkten $z = re^{\,\mathsf{i}\,t}$ mit $r > 0$ und $0 < t < \pi$, mit Ausnahme derjenigen Punkte $re^{\,\mathsf{i}\,\pi/2}$, bei denen $0 < r \le 1$ ist. $f_1(z) := z^2$ bildet G bijektiv auf $G_1 := \mathbb{C}\setminus\{x \in \mathbb{R} \,:\, x \ge -1\}$ ab, und $f_2(u) := u + 1$ bildet G_1 bijektiv auf $G_2 := \mathbb{C}\setminus\{x \in \mathbb{R} \,:\, x \ge 0\}$ ab.

Weil $\log_{(0)}(v)$ holomorph auf G_2 ist, ist $f(z) = \exp(\dfrac{1}{2}\log_{(0)}(z^2+1))$ holomorph auf G. Außerdem ist $f(G) \subset H_+$, und man kann zeigen, dass f lokal biholomorph und bijektiv ist.

Afg. F: Man versuche, den komplexen Sinus auf

$$G_0 := \{z \in \mathbb{C} \,:\, -\frac{\pi}{2} < \mathrm{Re}(z) < \frac{\pi}{2}\}$$

einzuschränken und dann umzukehren. Dazu benutze man die Darstellung

$$u = \sin z = \frac{1}{2\,\mathsf{i}}\big(e^{\,\mathsf{i}\,z} - e^{-\,\mathsf{i}\,z}\big) = g\circ h(z),\ \text{ mit } h(z) := e^{\,\mathsf{i}\,z} \text{ und } g(w) := \frac{1}{2\,\mathsf{i}}\big(w - \frac{1}{w}\big).$$

Die rechte Halbebene $R := \{z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Re}(z) > 0\}$ wird durch g bijektiv auf $G^* := \mathbb{C}\setminus\{t \in \mathbb{R} \,:\, |t| \ge 1\}$ abgebildet.

Also (Hauptzweig des) Arcussinus erhält man die Funktion $\arcsin : G^* \to G_0$ mit

$$\arcsin(u) := \frac{1}{\mathsf{i}}\log(\,\mathsf{i}\,u + \sqrt{1-u^2}).$$

Afg. G: Es ist

$$e^z = \exp(z\cdot\log_{(-\pi)}(e)) = \exp(z\cdot(\ln(e) + 2\pi\,\mathsf{i}\,k)) = \exp(z)\cdot\exp(z\cdot 2\pi\,\mathsf{i}\,k)$$

Im Falle $k = 0$ ist dies $= \exp(z)$, sonst können die Werte auch $\neq \exp(z)$ sein.

Abschnitt 1.5. (Anwendungen):

Seite 55, Zeile 4:

Es müssen zwei Gleichheitszeichen durch Teilmengen-Zeichen ersetzt werden: $f(G \cap U) \subset f(G) \cap V$ und $f\big((G_1 \setminus G) \cap U\big) \subset \big(G_2 \setminus f(G)\big) \cap V$.

Seite 55, Zeile 7 von unten:

Hinter $\zeta^{-1} = \ldots = \zeta^{n-1}$ könnte man „und allgemein $\zeta^{-k} = \zeta^{n-k}$." einfügen.