
Lösungen und Lösungshinweise zum Grundkurs Analysis 2

Vorbemerkung:

Bei einem Buchprojekt dauert meist alles etwas länger als geplant. So ging es mir mit dem Erscheinungsdatum des zweiten Bandes, der sich vom Januar auf den April verschob (und damit liege ich – glaube ich – noch gut im Rennen), aber vor allem beim Erstellen der Musterlösungen.

Aber jetzt liegen sie komplett vor und ich danke allen Lesern für ihre Geduld.

K. Fritzsche, Wuppertal, 22. Juli 2006.

Lösungen zu den Aufgaben in 1.1

- A. Die Vektoreigenschaften nachzuweisen, ist trivial. Nach Definition von E ist $N(\mathbf{a})$ stets endlich. Einen Augenblick nachdenken muss man höchstens bei der Dreiecksungleichung. Für jedes n ist

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |a_i + b_i| &\leq \sum_{i=1}^n |a_i| + \sum_{i=1}^n |b_i| \\ &\leq N(\mathbf{a}) + N(\mathbf{b}). \end{aligned}$$

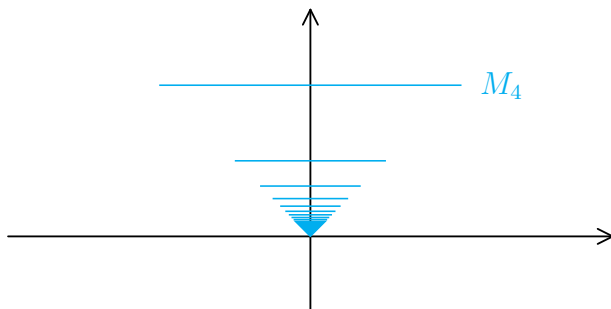
Dann lässt man n gegen Unendlich gehen.

- B. Sei $U_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \subset M$. Sei $\delta < \varepsilon/\sqrt{n}$. Ist $\max(\varepsilon', \varepsilon'') < \delta$ und $\mathbf{x} \in U_{\varepsilon'}(\mathbf{x}'_0) \times U_{\varepsilon''}(\mathbf{x}''_0)$, so ist $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \sqrt{n} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \sqrt{n} \delta < \varepsilon$.
- C. Bei d_1 ist die Aussage trivial. Bei d_2 ist es etwas schwieriger, die Dreiecksungleichung zu beweisen. Man zeigt aber recht leicht für reelle Zahlen $x, y > 0$: Ist $x < y$, so ist $1/(1+x) > 1/(1+y)$ und daher $x/(1+x) < y/(1+y)$. Ist nun $a \leq b+c$, so ist

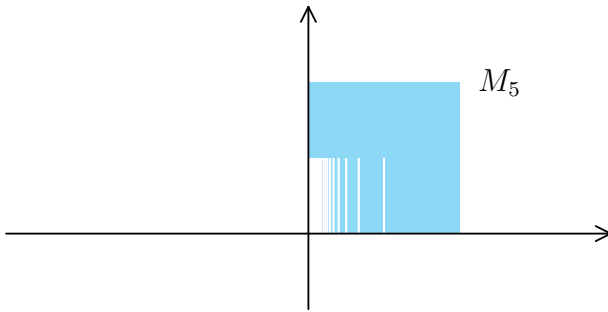
$$\frac{a}{1+a} \leq \frac{b+c}{1+b+c} = \frac{b}{1+b+c} + \frac{c}{1+b+c} \leq \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}.$$

Man setze $a = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, $b = \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|$ und $c = \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|$.

- D. a) $\{x \in \mathbb{R} : 0 < x^2 < 2\} = (-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2})$. M_1 hat keinen inneren Punkt, $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ ist die Menge der Häufungspunkte und auch der Berührungspunkte.
- b) $(2, 5) \times (3, 7)$ ist die Menge der inneren Punkte von M_2 , $[2, 5] \times [3, 7]$ die Menge der Häufungspunkte und Berührungspunkte.
- c) $M_3 = (-\infty, -2) \cup (0, \infty)$ ist offen, die Menge der Häufungspunkte (bzw. Berührungspunkte) ist $(-\infty, -2] \cup [0, \infty)$.
- d) M_4 ist die Vereinigung aller Mengen $S_n := [-1/n, 1/n] \times \{1/n\}$, besitzt also keine inneren Punkte. Die Menge der Häufungs- und Berührungspunkte ist $M_4 \cup \{(0, 0)\}$.



e) $M_5 =$ ist ein offenes Quadrat, aus dem eine Folge von Stacheln herausgenommen wird.



Bis auf die Spitzen der Stacheln, die zu M_5 gehören, sind alle Punkte von M_5 innere Punkte. Es ist $\overline{M_5} = [0, 1] \times [0, 1]$.

f) Bei M_6 werden aus \mathbb{R}^2 zwei abzählbare Scharen von achsenparallelen Geraden herausgenommen. Da \mathbb{Q} dicht in \mathbb{R} ist, besitzt M_6 keine inneren Punkte. Außerdem ist $\overline{M_6} = \mathbb{R}^2$.

E. Die Gleichungen und Inklusionen sind leicht zu zeigen, z.B.:

Ist $\mathbf{x} \in (M_1 \cap M_2)^\circ$, so $\exists \varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(\mathbf{x}) \subset M_1 \cap M_2$. Dann ist $U_\varepsilon(\mathbf{x}) \subset M_1$ und $U_\varepsilon(\mathbf{x}) \subset M_2$, also $\mathbf{x} \in \overset{\circ}{M}_1$ und $\mathbf{x} \in \overset{\circ}{M}_2$ und damit $\mathbf{x} \in \overset{\circ}{M}_1 \cap \overset{\circ}{M}_2$.

Oder: Sei $\mathbf{x} \in \overline{M_1} \cup \overline{M_2}$. Dann gehört \mathbf{x} zu $\overline{M_1}$ oder zu $\overline{M_2}$, etwa zu $\overline{M_1}$. Dann enthält jede Umgebung $U = U(\mathbf{x})$ einen Punkt $\mathbf{y} \in M_1$ und damit $\in M_1 \cup M_2$. Also gehört \mathbf{x} zu $\overline{M_1 \cup M_2}$.

Gegenbeispiele: Sei $M_1 := [0, 1]$, $M_2 := [1, 2]$. Dann ist $\overset{\circ}{M}_1 \cup \overset{\circ}{M}_2 = (0, 1) \cup (1, 2)$ und $(M_1 \cup M_2)^\circ = (0, 2)$. Ist umgekehrt $M_1 := (0, 1)$, $M_2 := (1, 2)$, so ist $\overline{M_1} \cap \overline{M_2} = \{1\}$ und $\overline{M_1 \cup M_2} = \emptyset$.

F. a) Sei $\mathbf{x}_0 \in \overset{\circ}{M}$. Dann $\exists \varepsilon > 0$, so dass $U_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \subset M$ ist. Dann gibt es zu jedem $\mathbf{x} \in U_\varepsilon$ ein $\delta > 0$, so dass $U_\delta(\mathbf{x}) \subset U_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \subset M$ ist. Also ist $\overset{\circ}{M}$ offen.

Ist M offen, so ist jeder Punkt innerer Punkt, also $\overset{\circ}{M} = M$.

b) Ist $V \subset M$ offen, so gehört V ganz zu $\overset{\circ}{M}$. Umgekehrt ist $\overset{\circ}{M}$ eine offene Menge, die in M liegt.

G. a) Es ist $\overline{M} = M \cup \partial M$. Daraus folgt, dass $\mathbb{R}^n \setminus \overline{M}$ offen ist, also \overline{M} abgeschlossen. Es ist $M \subset \overline{M}$, und wenn M abgeschlossen ist, dann gehören alle Häufungspunkte von M zu M .

b) Ist $N \subset M$, so ist $\overline{N} \subset \overline{M}$. Ist also A abgeschlossen und $M \subset A$, so ist $\overline{M} \subset \overline{A} = A$. Damit ist „ \subset “ klar. Weil aber \overline{M} selbst eine abgeschlossene Menge ist, die M umfasst, folgt auch die umgekehrte Richtung.

- H.** a) Sei $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \partial(N \times M)$. Dann gibt es eine Folge von Punkten aus $N \times M$, die gegen (\mathbf{x}, \mathbf{y}) konvergiert. Also liegt (\mathbf{x}, \mathbf{y}) in $\overline{N} \times \overline{M}$. Liegt \mathbf{x} nicht in ∂N , so liegt \mathbf{x} in $\overset{\circ}{N}$. Würde auch noch \mathbf{y} in $\overset{\circ}{M}$ liegen, so wäre (\mathbf{x}, \mathbf{y}) ein innerer Punkt von $N \times M$, und das kann nicht sein. In dem Fall gehört \mathbf{y} zu ∂M .

Sei umgekehrt $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (\partial N \times \overline{M}) \cup (\overline{N} \times \partial N)$. Wir untersuchen nur den Fall $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \partial N \times \overline{M}$. Dann ist $\mathbf{x} \in \partial N$ und $\mathbf{y} \in \overline{M}$. Ist $U = U' \times U''$ eine Umgebung von (\mathbf{x}, \mathbf{y}) in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, so gibt es Punkte $\mathbf{x}_1 \in U' \cap N$ und $\mathbf{x}_2 \in U' \cap (\mathbb{R}^n \setminus N)$. Außerdem gibt es einen Punkt $\mathbf{z} \in U'' \cap M$. Dann liegt $(\mathbf{x}_1, \mathbf{z})$ in $U \cap (N \times M)$ und $(\mathbf{x}_2, \mathbf{z})$ in $U \cap (\mathbb{R}^{n+m} \setminus (N \times M))$.

b) **Druckfehler:** Voraussetzung ist die Bedingung $\overline{N} \cap \overline{M} = \emptyset$.

Sei $\mathbf{x} \in \partial(N \cup M)$. Dann gibt es Folgen (\mathbf{x}_ν) in $N \cup M$ und (\mathbf{y}_ν) in $\mathbb{R}^n \setminus (N \cup M) = (\mathbb{R}^n \setminus N) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M)$, die beide gegen \mathbf{x} konvergieren. Wegen der Voraussetzung müssen entweder fast alle \mathbf{x}_ν in N oder fast alle in M liegen. Ist ersteres der Fall, so liegt \mathbf{x} in \overline{N} und damit in ∂N . Im anderen Fall ist $\mathbf{x} \in \partial M$.

Ist umgekehrt $\mathbf{x} \in \partial N \cup \partial M$, etwa $\mathbf{x} \in \partial N \subset \overline{N}$, so gibt es Folgen (\mathbf{x}_ν) in N und (\mathbf{y}_ν) in $\mathbb{R}^n \setminus N$, die beide gegen \mathbf{x} konvergieren. Aber dann liegt \mathbf{x}_ν auch in $N \cup M$. Nach Voraussetzung liegt \mathbf{x} nicht in \overline{M} und daher fast alle \mathbf{y}_ν in $\mathbb{R}^n \setminus M$, also in $\mathbb{R}^n \setminus (N \cup M)$. Das bedeutet, dass $\mathbf{x} \in \partial(N \cup M)$ ist.

Es ist $\overline{N} = \overset{\circ}{N} \cup \partial N$ und $\overset{\circ}{N} \cap \partial N = \emptyset$. Sei $\mathbf{x} \in \partial N$.

i) Ist N offen, so trifft jede Umgebung von \mathbf{x} auch $\overset{\circ}{N}$, kann also nicht in ∂N liegen.

ii) Ist N abgeschlossen, so trifft jede Umgebung von \mathbf{x} auch $\mathbb{R}^n \setminus \overline{N}$ und kann nicht in ∂N liegen.

- I.** Sei M nirgends dicht. Annahme, es gibt einen Punkt $\mathbf{x} \in (\overline{M})^\circ$. Dann gibt es eine Umgebung $U = U(\mathbf{x}) \subset \overline{M}$ und \mathbf{x} ist kein Häufungspunkt von $\mathbb{R}^n \setminus \overline{M}$. Also ist $\mathbb{R}^n \setminus \overline{M}$ nicht dicht im \mathbb{R}^n . Das ist ein Widerspruch. Die Umkehrung funktioniert ähnlich.
- J.** Es ist $\mathbb{R}^n \setminus A = (K \setminus A) \cup (\mathbb{R}^n \setminus K) = U \cup (\mathbb{R}^n \setminus K)$, also offen im \mathbb{R}^n . Damit ist A abgeschlossen (im \mathbb{R}^n), und eine abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge ist wieder kompakt. Natürlich gibt es auch andere Beweise.
- K.** Das Infimum sei mit d bezeichnet. Dann gibt es Folgen $\mathbf{x}_\nu \in A$ und $\mathbf{y}_\nu \in K$ mit $\text{dist}(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{y}_\nu) \rightarrow d$. Eine Teilfolge (\mathbf{y}_{ν_i}) konvergiert gegen ein $\mathbf{y}_0 \in K$. Dann

ist $\text{dist}(\mathbf{x}_{\nu_i}, \mathbf{y}_0) \leq \text{dist}(\mathbf{x}_{\nu_i}, \mathbf{y}_{\nu_i}) + \text{dist}(\mathbf{y}_{\nu_i}, \mathbf{y}_0)$, und die rechte Seite konvergiert gegen d . Also ist die Folge der \mathbf{x}_{ν_i} beschränkt und besitzt eine Teilfolge, die gegen ein $\mathbf{x}_0 \in A$ konvergiert. Offensichtlich ist $\text{dist}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = d$.

Die Mengen $A_1 := \{(x, 1/x) : x > 0\}$ und $A_2 := \{(x, -1/x) : x < 0\}$ sind abgeschlossen und disjunkt, nähern sich aber beliebig an.

- L.** Zunächst sei G ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die höchstens die Werte 0 oder 1 annimmt. Wir nehmen an, dass es Punkte $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in G$ mit $f(\mathbf{x}) = 0$ und $f(\mathbf{y}) = 1$ gibt. Dann gibt es einen stetigen Weg $\alpha : [0, 1] \rightarrow G$ mit $\alpha(0) = \mathbf{x}$ und $\alpha(1) = \mathbf{y}$. Auch $f \circ \alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig. Aber dann müsste $f \circ \alpha$ auf $[0, 1]$ auch Werte zwischen 0 und 1 annehmen. Das geht nicht, nach Voraussetzung über f . Also muss f konstant sein.

Sei umgekehrt das Kriterium erfüllt, $\mathbf{x}_0 \in G$ und

$U := \{\mathbf{x} \in G : \mathbf{x} \text{ kann in } G \text{ durch einen stetigen Weg mit } \mathbf{x}_0 \text{ verb. werden}\}.$

Die Funktion $c_U : G \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch $c_U(\mathbf{x}) := 1$ für $\mathbf{x} \in U$ und $c_U(\mathbf{x}) := 0$ für $\mathbf{x} \in G \setminus U$. Man überlegt sich leicht, dass c_U stetig ist (da jeder Punkt in G eine kleine Kreisumgebung in G besitzt). Also muss c_U konstant sein, und das $c_U(\mathbf{x}_0) = 1$ ist, ist $U = G$, also G ein Gebiet.

- M.** a) Die Menge $C = C_B(\mathbf{x}_0)$ aller Punkte $\mathbf{x} \in B$, die innerhalb von B durch einen stetigen Weg mit \mathbf{x}_0 verbunden werden können, ist offen und daher ein Gebiet. Es muss $G = C$ sein.

b) Ist $\mathbf{x} \in C_B(\mathbf{x}_1) \cap C_B(\mathbf{x}_2)$, so muss $C_B(\mathbf{x}_1) \subset C_B(\mathbf{x}_2)$ und $C_B(\mathbf{x}_2) \subset C_B(\mathbf{x}_1)$ sein, also $C_B(\mathbf{x}_1) = C_B(\mathbf{x}_2)$.

c) Das System aller Kugeln mit rationalem Mittelpunkt und rationalem Radius ist abzählbar. In jeder Zusammenhangskomponente können wir eine solche Kugel auswählen, und wegen (b) können wir annehmen, dass jede Kugel höchstens einmal vorkommt.

- N.** a) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, (\mathbf{x}_n) eine schnelle Cauchyfolge in K . Eine Teilfolge (\mathbf{x}_{ν_i}) konvergiert gegen einen Punkt $\mathbf{x}_0 \in K$. Weil $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n+1}\|$ gegen Null konvergiert, erhält man mit etwas Epsilontik, dass schon (\mathbf{x}_n) selbst gegen \mathbf{x}_0 konvergiert.

b) Jede schnelle Cauchyfolge in K konvergiert gegen einen Punkt von K . Es sei (\mathbf{x}_n) eine beliebige unendliche Folge in K . Es gibt endlich viele abgeschlossene Kugeln vom Radius 1, die K überdecken. Eine davon, die wir K_0 nennen, enthält unendlich viele \mathbf{x}_n . Die kompakte Menge K_0 wird von endlich vielen Kugeln vom Radius $1/2$ überdeckt. Eine davon, die wir K_1 nennen, enthält wieder unendlich viele \mathbf{x}_n . So fährt man fort.

So gewinnt man eine Folge $K_0 \supset K_1 \supset K_2 \supset \dots$ von Kugeln, wobei K_ν den Radius $2^{-\nu}$ hat. Und in jeder Menge $K \cap K_\nu$ kann man ein Element \mathbf{x}_{n_ν} finden. Dann ist die Teilfolge (\mathbf{x}_{n_ν}) eine schnelle Cauchyfolge und konvergiert gegen einen Punkt $\mathbf{x}_0 \in K$. Also ist K kompakt.

- O.** Sei $\alpha : [0, 1] \rightarrow G$ ein stetiger Weg, der \mathbf{x}_1 mit \mathbf{x}_2 verbindet. Dann ist $g := f \circ \alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $g(0) = a$ und $g(1) = b$. Also gibt es ein $t_0 \in [0, 1]$ mit $g(t_0) = c$. Sei $\mathbf{x}_0 := \alpha(t_0)$.
- P.** Ist $\mathbf{x}_0 \in \bigcap_l G_l$, so kann man jeden Punkt aus G von \mathbf{x}_0 aus erreichen.
- Q.** Wäre G ein Gebiet, so könnte man $\mathbf{0}$ und $\mathbf{x}_0 := (2, 0, \dots, 0)$ in G durch einen stetigen Weg miteinander verbinden. Dieser Weg müsste aber andererseits wegen des Zwischenwertsatzes das Komplement von G treffen. Das ist ein Widerspruch.
- R.** Es ist $|A| = 1$, $\|A\| = 2$ und $\|A\|_{\text{op}} = \sqrt{2}$.
- S.** Annahme, $f(x) = x$ und $f(y) = y$ für $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein c zwischen x und y mit $f'(c) = (f(y) - f(x))/(y - x) = 1$. Widerspruch!
- T.** Der Sinus ist auf $I := [0, \pi/3]$ monoton wachsend. Daraus folgt für $x, y \in I$:

$$\begin{aligned} |\cos x - \cos y| &= 2 \left| \sin \frac{x+y}{2} \right| \cdot \left| \sin \frac{x-y}{2} \right| \\ &\leq \left| \sin \frac{x+y}{2} \right| \cdot |x - y| \\ &\leq \frac{\sqrt{3}}{2} |x - y|. \end{aligned}$$

Dabei ist $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \sqrt{3} < 1$. Also ist $f(x) := \cos x$ auf I kontrahierend.

- U.** Es ist $f(x) = x \iff x^2 - \frac{3}{2}x - 7 = 0$, mit Lösungen $x = 7/2$ und $x = -2$. In $[3, 4]$ liegt nur die erste Lösung.

Ist $3 \leq x \leq 4$, so ist $1/4 \leq 1/x \leq 1/3$ und $3.25 = 13/4 \leq f(x) \leq 23/6 = 3.8333\dots$, also $f([3, 4]) \subset [3, 4]$. Außerdem ist

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{7(y-x)}{xy} \right| \leq \frac{7}{9} |x - y|,$$

also f kontrahierend. Das Fixpunktverfahren liefert die Lösung.

Es sei $x_0 := 3$ und $x_{n+1} := f(x_n)$, mit $f(x) := 7/x + 1.5$. Dann ist

$$\begin{aligned} x_1 &:= 3.8333\dots, x_2 := 3.326\dots, x_3 := 3.6\dots, x_4 := 3.442\dots, \\ x_5 &:= 3.5337\dots, x_6 := 3.48\dots, x_7 := 3.51\dots, x_8 := 3.49\dots, x_9 := 3.5\dots \end{aligned}$$

Lösungen zu den Aufgaben in 1.2

A. a) $D_f = D_3(\mathbf{0})$, Wertebereich = $[0, 3]$, $G_f =$ obere Halbsphäre.

b) Wertebereich = $[-10, 5]$, Minimum bei $(3, -3)$, Maximum bei $(0, 0)$.

B. a) Da B offen ist, gibt es ein $r > 0$, so dass $B_r(\mathbf{a}) \subset B$ ist. Weil α stetig und $\alpha(0) = \mathbf{a}$ ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $\alpha(U_\varepsilon(0)) \subset B_r(\mathbf{a}) \subset B$ ist.

b) Es sei $f_{\mathbf{a}, \mathbf{v}}$ in $t = 0$ differenzierbar. Dann existiert

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_{\mathbf{a}, \mathbf{v}}(t) - f_{\mathbf{a}, \mathbf{v}}(0)}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{t} = D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}).$$

C. Es ist

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a} + t\mathbf{v}\|^4 - \|\mathbf{a}\|^4 &= (\|a\|^2 + 2t(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}) + t^2\|\mathbf{v}\|^2)^2 - (\|a\|^2)^2 \\ &= 2\|a\|^2(2t(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}) + t^2\|\mathbf{v}\|^2) + (2t(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}) + t^2\|\mathbf{v}\|^2)^2 \\ &= 2t\|a\|^2(2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}) + t\|\mathbf{v}\|^2) + t^2(2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}) + t\|\mathbf{v}\|^2)^2, \end{aligned}$$

also $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) = 4(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{v})$.

D. a) Sei $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ beliebig und $f(\mathbf{x}) := \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}$. Dann ist

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}}{t} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} > 0.$$

b) Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ beliebig und $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Ist $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$, so verschwinden alle Richtungsableitungen von f in \mathbf{a} . Sei also $\mathbf{v} := \nabla f(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$. Dann ist $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} > 0$ und $D_{-\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} < 0$.

E. a) $g(t) := (\sin t)/t$ kann in $t = 0$ stetig durch den Wert 1 ergänzt werden. $\varphi(x, y) := x^2 + y^2$ ist stetig mit Wert $\varphi(0, 0) = 0$.

Also ist $f := g \circ \varphi$ stetig und $f(0, 0) = g(0) = 1$.

b) Sei $f(x, y) := (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$. Dann ist $f(x, 0) = 1$ für $x \neq 0$ und $f(0, y) = -1$ für $y \neq 0$. Der Grenzwert kann nicht existieren.

c) Es ist

$$\left| \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{3(x^2 + y^2)|y|}{x^2 + y^2} = 3|y|,$$

und das strebt für $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ gegen 0. Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben und $\delta := \varepsilon/3$, so gilt: Ist $0 < \|(x, y)\| < \delta$, so ist $3|y| \leq 3\sqrt{x^2 + y^2} < 3\delta = \varepsilon$.

d) Es ist

$$f(x, mx) = \frac{x(mx)^3}{x^2 + 4(mx)^6} = \frac{x^2 m^3}{1 + 4m^6 x^4},$$

und das konvergiert für $x \rightarrow 0$ gegen Null. Andererseits ist

$$f(y^3, y) = \frac{y^6}{y^6 + 4y^6} = \frac{1}{5} \text{ für } y \neq 0.$$

Also kann der Grenzwert von $f(x, y)$ für $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ nicht existieren.

F. Für $t \neq 0$ und $(a, b) \neq (0, 0)$ ist

$$\frac{f(ta, tb)}{t} = \frac{b^3}{a^2 + b^2}.$$

Das ist auch schon die Richtungsableitung. Insbesondere ist $\nabla f(0, 0) = (0, 1)$, also $\nabla f(0, 0) \cdot (a, b) = b$. Das stimmt nur für $a = 0$ mit $D_{(a,b)}f(0, 0)$ überein.

G. a) Zur Kontrolle: $f_{xy} = e^y/z$, $f_{xz} = -e^y/z^2$, $f_{yz} = -xe^y/z^2$ und $f_{xyz} = -e^y/z^2$.

b) Es ist $f_{xx} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$ und $f_{yy} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$.

H. a) Es ist $f_x = -\sin(x/(1+y))/(1+y)$ und $f_y = \sin(x/(1+y)) \cdot x/(1+y)^2$, also $\nabla f(\pi, 1) = (-1/2, \pi/4)$.

b) $\nabla f(3, 2, 1) = (1/3, -1/3, -1/3)$.

I. Setze $\alpha(t) := t\mathbf{x}$. Dann ist $f \circ \alpha(t) = t^p \cdot f(\mathbf{x})$ und $(f \circ \alpha)'(t) = pt^{p-1} \cdot f(\mathbf{x})$. Setzt man $t = 1$ ein, so erhält man die Behauptung.

J. Sei $\mathbf{x}_0 \in B$, $\mathbf{z}_0 := \mathbf{x}_0$, $\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_{i-1} = (x_i - x_i^{(0)})\mathbf{e}_i, \dots, \mathbf{z}_n = \mathbf{x}$. Außerdem sei $|f_{x_i}| \leq M_i$ auf B . Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so setze man $\delta < \varepsilon/(M_1 + \dots + M_n)$. Ist $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$, so ist

$$\begin{aligned} |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| &= \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{c}_i)(x - x_i^{(0)}) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n M_i \delta < \varepsilon. \end{aligned}$$

K. Es ist

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(1, 1) &= x^3 + xy + y^2 - 1 - 1 - 1 \\ &= (x^3 - 1) + (y^2 - 1) + xy - 1 \\ &= (x - 1)(x^2 + x + 1) + (y - 1)(y + 1) + (x - 1)y + (y - 1) \\ &= 1 \cdot (x - 1) + 2 \cdot (y - 1) + (x^2 + x + y)(x - 1) + y(y - 1). \end{aligned}$$

Das wäre eine Antwort auf die Frage, aber das war eigentlich nicht gemeint, die Formulierung der Aufgabe ist leider etwas unvollständig. δ_1, δ_2 sollten so

gewählt werden, dass $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \delta_1(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \delta_2(1,1) = 0$ ist. Dazu muss man $\delta_1(x,y) := x^2 + x + y - 3$ und $\delta_2(x,y) := y - 1$ setzen und erhält:

$$f(x,y) - f(1,1) = 4 \cdot (x - 1) + 3 \cdot (y - 1) + \delta_1(x,y)(x - 1) + \delta_2(x,y)(y - 1),$$

also $A = 4$ und $B = 3$.

L. a) $z = 2 - 4(x - 1) - 2(y - 1)$.

b) $z \equiv -1$.

M. a) Für $(x,y) \neq (0,0)$ ist $f_x(x,y) = \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$ und $f_y(x,y) = \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$. Weil $f(x,0) \equiv 0$ und $f(0,y) \equiv 0$ ist, erhält man $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.

Weil $x^2 + y^2 \geq x^2$ ist, ist $|f_y(x,y)| \leq |x^3/(x^2)^{3/2}| = 1$. f_x wird genauso abgeschätzt.

b) Für $(x,y) \neq (0,0)$ ist

$$f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0) \cdot x - f_y(0,0) \cdot y = r(x,y) := \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Verwendet man das erste Differenzierbarkeitskriterium, so müsste – wenn f in $\mathbf{0}$ total differenzierbar wäre – $\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} r(\mathbf{h})/\|\mathbf{h}\| = 0$ sein. Es ist aber

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{r(t,t)}{\|(t,t)\|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{\sqrt{2t^2} \cdot \sqrt{2t^2}} = \frac{1}{2}.$$

Also kann f im Nullpunkt nicht total differenzierbar sein.

N. Die Funktion $g(t) := t^2 \cdot \sin(1/t)$ (mit $g(0) := 0$) ist überall differenzierbar. Also ist $f(x,y) := g(\sqrt{x^2 + y^2})$ für $(x,y) \neq (0,0)$ total differenzierbar. Weiter ist $f(x,y) - f(0,0) = x \cdot \Delta_1(x,y) + y \cdot \Delta_2(x,y)$ mit

$$\Delta_1(x,y) := x \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{und} \quad \Delta_2(x,y) := y \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Offensichtlich streben $\Delta_1(x,y)$ und $\Delta_2(x,y)$ für $(x,y) \rightarrow (0,0)$ gegen Null. Nach dem dritten Differenzierbarkeitskriterium ist f auch im Nullpunkt total differenzierbar und $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

Sei $h(x,y) := \sqrt{x^2 + y^2}$, also $f = g \circ h$. Dann ist

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= g' \circ h(x,y) \cdot h_x(x,y) \\ &= \left(2h(x,y) \cdot \sin \frac{1}{h(x,y)} - \cos \frac{1}{h(x,y)} \right) \cdot \frac{x}{h(x,y)} \\ &= 2x \cdot \sin \frac{1}{h(x,y)} - \frac{x}{h(x,y)} \cos \frac{1}{h(x,y)}. \end{aligned}$$

Der erste Summand strebt für $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ gegen Null. Der zweite konvergiert nicht, denn für $x = y$ ist $x/h(x, y) = \pm 1/\sqrt{2}$ und $\cos(1/h(x, y))$ oszilliert zwischen -1 und $+1$. Also ist f im Nullpunkt nicht stetig differenzierbar.

- O. Sei $\alpha(t) := \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (1 - t, 1, t)$ für $t \in [0, 1]$. Es ist $\nabla f = (yz, xz, xy)$, also $\nabla f(\alpha(t)) = (t, t - t^2, 1 - t)$. Weil $f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = 0$ ist, suchen wir ein t mit

$$0 = (t, t - t^2, 1 - t) \cdot (-1, 0, 1) = -t + 1 - t = 1 - 2t,$$

also $t = 1/2$. Dann ist der gesuchte Punkt $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \frac{1}{2}(1, 2, 1)$.

- P. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass $\|Df(\mathbf{x}) - \lambda\|_{\text{op}} < \varepsilon$ für alle \mathbf{x} mit $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$ gilt. Zu jedem solchen \mathbf{x} gibt es ein \mathbf{c} auf der Verbindungsstrecke zwischen \mathbf{a} und \mathbf{x} , so dass $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) = Df(\mathbf{c})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ ist (der Mittelwertsatz lässt sich auch für diesen Fall beweisen). Dann ist

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{a})| = |(Df(\mathbf{c}) - \lambda)(\mathbf{x} - \mathbf{a})| \leq \varepsilon \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|.$$

Das zeigt die Differenzierbarkeit von f in \mathbf{a} , sowie $Df(\mathbf{a}) = \lambda$.

Lösungen zu den Aufgaben in 1.3

- A. Wir berechnen die Taylorentwicklung nur bis zur 2. Ordnung. Es ist

$$\begin{aligned} (f_x, f_y) &= \left(\frac{e^x}{1-y}, \frac{e^x}{(1-y)^2} \right), \\ \text{und } (f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}) &= \left(\frac{e^x}{1-y}, \frac{e^x}{(1-y)^2}, \frac{2e^x}{(1-y)^3} \right). \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y + \\ &\quad \frac{1}{2}(f_{xx}(0, 0)x^2 + f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2) + R(x, y) \\ &= 1 + x + y + \frac{1}{2}(x^2 + 2xy + 2y^2) + R(x, y) \\ &= 1 + x + y + \frac{1}{2}x^2 + xy + y^2 + R(x, y). \end{aligned}$$

- B. a) $\nabla f = (4x - 3y^2, -6xy + 4y^3)$, einziger kritischer Punkt $(0, 0)$, $H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Damit ist $H_f(0, 0)$ positiv semidefinit und man kann keine Aussage treffen. Betrachtet man allerdings f entlang von Geraden durch Null, so erkennt man, dass im Nullpunkt ein Minimum vorliegt.

- b) $\nabla g = (8x^2 - 4x^3, 12y^2 - 4y^3)$, kritische Punkte $(0, 0)$, $(0, 3)$, $(2, 0)$, $(2, 3)$, $H_g = \begin{pmatrix} 16x - 12x^2 & 0 \\ 0 & 24y - 12y^2 \end{pmatrix}$, also

$$H_g(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, H_g(0,3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -36 \end{pmatrix}, H_g(2,0) = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{und } H_g(2,3) = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & -36 \end{pmatrix}.$$

Bei $(2,3)$ liegt ein lokales (und globales) Maximum vor, Sattelpunkte gibt es nicht.

c) $\nabla = (4x^3 - 4y, 4y^3 - 4x)$, kritische Punkte bei $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$, $H_h = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}$ und $\det H_h = 144x^2y^2 - 16$. Bei $(0,0)$ liegt ein Sattelpunkt vor, bei $(1,1)$ und $(-1,-1)$ jeweils ein Minimum.

d) $\nabla k = (3y^2 + 3x(x-2), 6y(x-1))$, kritische Punkte bei $(0,0)$, $(2,0)$, $(1,1)$, $(1,-1)$. Es ist $H_k = \begin{pmatrix} 6x-6 & 6y \\ 6y & 6x-6 \end{pmatrix}$. Bei $(0,0)$ liegt ein Maximum vor, bei $(2,0)$ ein Minimum, bei $(1,1)$ und $(1,-1)$ Sattelpunkte.

C. Es ist $f(\mathbf{x}) = \sum_{\nu=1}^N (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_\nu + \mathbf{a}_\nu \cdot \mathbf{a}_\nu)$, also

$$\nabla f = 2N \cdot \mathbf{x} - 2 \sum_{\nu=1}^N \mathbf{a}_\nu.$$

$$\mathbf{x} \text{ ist kritischer Punkt} \iff \mathbf{x} = \frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^N \mathbf{a}_\nu.$$

Es ist $f(\mathbf{x}) \geq 0$ überall und $f(\mathbf{x})$ strebt für $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ gegen $+\infty$. Das globale Minimum muss in einer offenen Kugel um den Nullpunkt liegen. Dort ist dann $\nabla f = 0$. Und dafür haben wir nur den obigen Kandidaten.

D. Es ist $\nabla f = (ye^{xy} + 2x, xe^{xy} + 2ay)$, kritische Punkte sind $(0,0)$ und $(\pm\sqrt{ay}, y)$ mit $y \neq 0$. Den Fall $x = \sqrt{ay}$ kann man ausschließen, also kommt nur $x = -\sqrt{ay}$ in Frage. Dann ist

$$y^2 = p := \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left(\frac{1}{2\sqrt{a}}\right).$$

Es ist $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2a \end{pmatrix}$, also $\det H_f(0,0) = 4a - 1$. Ist $a > 1/4$, so ist $H_f(0,0)$ positiv definit und in $(0,0)$ liegt ein Minimum vor. Ist $a < 1/4$, so liegt ein Sattelpunkt vor. Im Falle $a = 1/4$ liegt weder ein Extremwert noch ein Sattelpunkt vor.

Ist $a \geq 1/4$, $y \neq 0$ und $x = -\sqrt{ay}$, so ist $ye^{xy} + 2x = ye^{-\sqrt{ay}^2} - 2\sqrt{ay} = y(e^{-\sqrt{ay}^2} - 2\sqrt{a})$, und dieser Ausdruck kann nicht verschwinden (denn $\sqrt{ay}^2 >$

0, also $e^{-\sqrt{a}y^2} < 1$, aber andererseits $-2\sqrt{a} \leq -1$). Den kritischen Punkt $(-\sqrt{a}y, y)$ mit $y \neq 0$ gibt es also nur, wenn $0 < a < 1/4$ ist. Da f nur positive Werte annimmt und $f(x, y)$ für $\|(x, y)\| \rightarrow \infty$ gegen $+\infty$ strebt, muss f ein globales Minimum besitzen. Ist $a > 1/4$, liegt das im Nullpunkt vor. Ist $a < 1/4$, gibt es zwei Minima in $\mathbf{x}_{1/2} := \pm(-\sqrt{a}p, p)$ (f nimmt in beiden Punkten den gleichen Wert an).

E. a) Es ist $\nabla f = (5y(1 - 2x^2)e^{-x^2-2y^2}, 5x(1 - 4y^2)e^{-x^2-2y^2})$. Kritische Punkte sind $(0, 0)$, sowie $(\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/2)$. Es ist $H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ (Sattelpunkt) und $H_f(\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/2) = \begin{pmatrix} -20xyc & 0 \\ 0 & -40xyc \end{pmatrix}$. Letzteres ergibt ein Minimum, falls $xy < 0$ ist, und ein Maximum, falls $xy > 0$ ist.

b) Es ist $\nabla g = ((2x - x(x^2 - y^2))e^{(-x^2-y^2)/2}, (-2y - y(x^2 - y^2))e^{(-x^2-y^2)/2})$, was die kritischen Punkte $(0, 0)$, $(\pm\sqrt{2}, 0)$ und $(0, \pm\sqrt{2})$ ergibt. Weiter ist $H_g(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ (Sattelpunkt), $H_g(\pm\sqrt{2}, 0) = \begin{pmatrix} -4/e & 0 \\ 0 & -4/e \end{pmatrix}$ (Maximum) und $H_g(0, \pm\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 4/e & 0 \\ 0 & 4/e \end{pmatrix}$ (Minimum).

F. $\nabla f = (y(1 - 3x^2 - y^2), x(1 - x^2 - 3y^2))$. Man erhält Sattelpunkte $(0, 0)$, $(0, \pm 1)$ und $(\pm 1, 0)$, relative Minima bei $\pm(1/2, 1/2)$, relative Maxima bei $\pm(1/2, -1/2)$, absolute Minima bei $\pm(1, 1)$ und absolute Maxima bei $\pm(1, -1)$.

G. Es ist $\nabla f = (-2 \sin z/x^3, 0, \cos z/x^2)$, also $\nabla f = \mathbf{0} \iff \sin z = \cos z = 0$. Das zeigt, dass es keine kritischen Punkte gibt.

H. Es ist $\nabla f = (-\sin x \sin y, (2 + \cos x) \cos y)$. Kritische Punkte gibt es für $x = k\pi$ und $y = (m + 1/2)\pi$. Dann erhält man:

$$\begin{aligned} k \text{ gerade, } m \text{ gerade} &\implies H_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad (\text{Maximum}) \\ k \text{ ungerade, } m \text{ gerade} &\implies H_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{Sattelpunkt}) \\ k \text{ gerade, } m \text{ ungerade} &\implies H_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (\text{Minimum}) \\ k \text{ ungerade, } m \text{ ungerade} &\implies H_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{Sattelpunkt}). \end{aligned}$$

I. Setzt man $r^2 := x^2 + y^2$, so ist $\nabla f = (y \ln r^2 + 2x^2y/r^2, x \ln r^2 + 2xy^2/r^2)$. Kritische Punkte sind $(0, \pm 1)$, $(\pm 1, 0)$ und $(\pm u, \pm u)$ mit $u := 1/\sqrt{2e}$.

Die Funktion ist ungerade bezüglich x und y , deshalb sind $(0, \pm 1)$ und $(\pm 1, 0)$ keine Extrema. Bei (u, u) und $(-u, -u)$ liegt jeweils ein Minimum vor, bei $(u, -u)$ und $(-u, u)$ ein Maximum.

J. $f(x, y) := \|(x, y, 4x^2 + y^2) - (0, 0, 8)\|^2 = x^2 + y^2 + (4x^2 + y^2 - 8)^2$, also

$$\nabla f = (2x(32x^2 + 8y^2 - 63), 2y(8x^2 + 2y^2 - 15)).$$

Dann hat man die kritischen Punkte

$$\mathbf{x}_0 := (0, 0), \mathbf{x}_1^\pm := (0, \pm\sqrt{15/2}) \text{ und } \mathbf{x}_2^\pm := (\pm\sqrt{63/32}, 0).$$

In \mathbf{x}_0 liegt ein lokales Maximum vor, in \mathbf{x}_1^\pm Sattelpunkte und in \mathbf{x}_2^\pm Minima. Die gesuchten Punkte mit dem kleinsten Abstand zu $(0, 0, 8)$ sind also die

$$\text{Punkte } \left(\pm\frac{3}{4}\sqrt{\frac{7}{2}}, 0, \frac{63}{8} \right).$$

K. Auf ∂D verschwindet f , deshalb kann man sich auf das Innere beschränken. Es ist $\nabla f = (\cos x - \cos(x + y), \cos y - \cos(x + y))$. Als kritischen Punkt findet man dort den Punkt $(2\pi/3, 2\pi/3)$. Dort muss ein Maximum vorliegen, der Wert von f ist $(3/2)\sqrt{3}$.

L. Sei $g(x, y, z) := 2x + 3y + 4z - 15$. Es ist $\nabla f = (2x, 6y, 4z)$ und $\nabla g = (2, 3, 4)$. Die Gleichung $\nabla f = \lambda \nabla g$ ergibt $x = \lambda = 2$, $y = 1$ und $z = 2$. Da f auf der durch $g = 0$ gegebenen Ebene beliebig große Werte annimmt, liegt in dem Punkt ein Minimum vor.

M. Auf der kompakten Sphäre S muss f Maximum und Minimum annehmen. Die Gleichung $(1, 3, -2) = 2\lambda(x, y, z)$ liefert die Kandidaten $\mathbf{x}_1 = (1, 3, -2)$ und $\mathbf{x}_2 = (-1, -3, 2)$. Es ist $f(\mathbf{x}_1) = 14$ und $f(\mathbf{x}_2) = -14$. Ersteres ist der gesuchte größte Wert.

N. Die Gleichung $\nabla f = \lambda \nabla g$ hat hier die Gestalt $(2x, -2y) = \lambda(2x, 2y)$. Das liefert Kandidaten $(0, \pm 1)$ und $(\pm 1, 0)$. Im ersten Fall erhält man Minima, im zweiten Fall Maxima.

Lösungen zu den Aufgaben in 1.4

A. Einfache Rechenaufgabe. Zum Beispiel ist

$$(f \circ \mathbf{g})_x = \frac{4e^{-2x-2y} e^{2xy} (1+y)}{(e^{-2x-2y} - e^{2xy})^2}.$$

B. Es ist

$$\begin{aligned} (f \circ \mathbf{g})_u(u, v) &= 4(u + v^2) \cos 2u + 2(\sin 2u + v) - 2uv^2, \\ \text{und } (f \circ \mathbf{g})_v(u, v) &= 2(u + v^2) + 4v(\sin 2u + v) - 2u^2v. \end{aligned}$$

C. Es ist $\det J_{\mathbf{F}}(r, \varphi, \psi) = abcr^2 \sin \varphi$.

D. Es ist $\det(A) = \sum_j a_{ij} A_{ij}$, wobei die „Adjunkte“ A_{ij} nicht von a_{ij} abhängt. Also ist $\frac{\partial \det A}{\partial a_{ij}} = A_{ij}$. Dabei ist

$$A_{ij} = \det(A_1, \dots, A_{j-1}, \mathbf{e}_i^\top, A_{j+1}, \dots, A_n).$$

Nun folgt aus der Kettenregel:

$$\begin{aligned} f'(t) &= \sum_{i,j} A_{ij}(t) \cdot a'_{ij}(t) \\ &= \sum_{j=1}^n \det(A_1(t), \dots, A_{j-1}(t), A'_j(t), A_{j+1}(t), \dots, A_n(t)). \end{aligned}$$

E. Es ist

$$\begin{aligned} (f \circ \mathbf{F}_{\text{zyl}})_r &= (f_x \circ \mathbf{F}_{\text{zyl}}) \cdot \cos \varphi + (f_y \circ \mathbf{F}_{\text{zyl}}) \cdot \sin \varphi, \\ (f \circ \mathbf{F}_{\text{zyl}})_\varphi &= (f_x \circ \mathbf{F}_{\text{zyl}}) \cdot (-r \sin \varphi) + (f_y \circ \mathbf{F}_{\text{zyl}}) \cdot (r \cos \varphi) \\ \text{und } (f \circ \mathbf{F}_{\text{zyl}})_z &= (f_z \circ \mathbf{F}_{\text{zyl}}), \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} (f \circ \mathbf{F}_{\text{sph}})_r &= (f_x \circ \mathbf{F}_{\text{sph}}) \cdot \cos \varphi \cos \psi + (f_y \circ \mathbf{F}_{\text{sph}}) \cdot \sin \varphi \cos \psi \\ &\quad + (f_z \circ \mathbf{F}_{\text{sph}}) \cdot \sin \psi, \\ (f \circ \mathbf{F}_{\text{sph}})_\varphi &= (f_x \circ \mathbf{F}_{\text{sph}}) \cdot (-r \sin \varphi \cos \psi) + (f_y \circ \mathbf{F}_{\text{sph}}) \cdot (r \cos \varphi \cos \psi) \\ \text{und } (f \circ \mathbf{F}_{\text{sph}})_\psi &= (f_x \circ \mathbf{F}_{\text{sph}}) \cdot (-r \cos \varphi \sin \psi) + (f_y \circ \mathbf{F}_{\text{sph}}) \cdot (-r \sin \varphi \sin \psi) \\ &\quad + (f_z \circ \mathbf{F}_{\text{sph}}) \cdot (r \cos \psi). \end{aligned}$$

F. Es ist

$$J_{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} -\cosh y \sin x & \sinh y \cos x \\ \sinh y \cos x & \cosh y \sin x \end{pmatrix}$$

und $\det J_{\mathbf{F}} = \cos^2 x - \cosh^2 y$.

Da $\cosh y \geq 1$ und $|\cos x| \leq 1$ ist, verschwindet die Funktionaldeterminante nur, wenn $\cos x = 1$ und $\cosh y = 1$ ist, also $x = k\pi$ und $y = 0$. Außerhalb solcher Punkte ist \mathbf{F} lokal umkehrbar.

G. a) Es ist $J_{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$ und $\det J_{\mathbf{f}} = e^{2x} \neq 0$. Also ist \mathbf{f} überall lokal umkehrbar.

\mathbf{f} ist nicht global injektiv, denn es ist z.B. $\mathbf{f}(x, y + 2\pi) = \mathbf{f}(x, y)$.

b) Es muss nur die Bijektivität von $\mathbf{f} : \mathbb{R} \times (0, 2\pi) \rightarrow B := \mathbb{R}^2 \setminus \{(u, 0) : u \geq 0\}$ gezeigt werden.

Injektivität: Ist $u = e^{x_1} \cos(y_1) = e^{x_2} \cos(y_2)$ und $v = e^{x_1} \sin(y_1) = e^{x_2} \sin(y_2)$, so ist $e^{2x_2} = u^2 + v^2 = e^{2x_1}$, also $x_1 = x_2$. Daraus folgt: $\cos(y_1) = \cos(y_2)$ und $\sin(y_1) = \sin(y_2)$, also $y_1 = y_2$.

Surjektivität: Sei $(u, v) \in B$, also $v \neq 0$ oder $u < 0$. Dann ist $u^2 + v^2 = e^{2x}$, für $x := (1/2) \ln(u^2 + v^2)$. Ist $u = 0$ und $v > 0$, so setze man $y := \pi/2$. Ist $u = 0$ und $v < 0$, so setze man $y := 3\pi/2$. Ist schließlich $u \neq 0$, so setze man $y := \arctan(v/u)$. In jedem Fall erhält man so ein Urbild.

H. Es ist $J_{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{pmatrix}$ und $\det J_{\mathbf{F}} = -8xy$, also $\neq 0$, falls $x \neq 0$ und $y \neq 0$ ist. Dann ist \mathbf{F} lokal invertierbar und

$$J_{\mathbf{F}^{-1}}(\mathbf{F}(x, y)) = J_{\mathbf{F}}^{-1}(x, y) = -\frac{1}{8xy} \begin{pmatrix} -2y & -2y \\ -2x & 2x \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1/x & 1/x \\ 1/y & -1/y \end{pmatrix}.$$

I. Sei $f(x) := \begin{cases} x + 2x^2 \sin(1/x) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$

In Band 1, 3.2.28, Aufgabe C, wird gezeigt, dass f in $x = 0$ differenzierbar und $f'(0) > 0$ ist. Allerdings ist f bei 0 nicht stetig differenzierbar. Also ist die Abbildung $\mathbf{F}(x, y) := (f(x), y)$ im Nullpunkt differenzierbar, aber nicht stetig differenzierbar, und $\det J_{\mathbf{F}}(0, 0) = f'(0)$ verschwindet nicht. \mathbf{F} ist nicht lokal umkehrbar: Da f stetig und auf keiner Umgebung von $x = 0$ monoton ist, kann f auch auf keiner Umgebung von Null injektiv sein.

J. Annahme, $\mathbf{F}(\mathbf{a}) = \mathbf{F}(\mathbf{a} + \mathbf{h})$. Setzt man $\mathbf{g} := \mathbf{F} - \text{id}$, so ist $\mathbf{h} = \mathbf{g}(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - \mathbf{g}(\mathbf{a})$, nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz also

$$\|\mathbf{h}\| \leq \|J_{\mathbf{g}}\|_{\text{op}} \cdot \|\mathbf{h}\| = \|J_{\mathbf{F}} - E_n\|_{\text{op}} \cdot \|\mathbf{h}\| < \|\mathbf{h}\|.$$

Das kann nicht sein.

K. Sei $k := \text{rg } J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a})$. Dann gibt es eine k -reihige Untermatrix $A(\mathbf{x})$ von $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$, so dass $\det A(\mathbf{a}) \neq 0$ ist. Da \mathbf{f} stetig differenzierbar ist, hängt A stetig von \mathbf{x} ab. Also gibt es eine Umgebung $U = U(\mathbf{a})$, so dass $\det A(\mathbf{x}) \neq 0$ für $\mathbf{x} \in U$ ist. Also ist $\text{rg } J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \geq k$ für $\mathbf{x} \in U$.

Lösungen zu den Aufgaben in 1.5

- A.** Sei $f(x, y) := y + 1 - \cos y - xy$. Dann ist $f(0, 0) = 0$ und $f_y = 1 + \sin y - x$, also $f_y(0, 0) = 1 \neq 0$. Nach dem Satz über implizite Funktionen ist $f(x, y) = 0$ in der Nähe des Nullpunktes nach y auflösbar. Sei $y = g(x)$ die Auflösung. Dann ist $g(0) = 0$ und $g'(x) = -f_x(x, g(x))/f_y(x, g(x)) = g(x)/(1 + \sin g(x) - x)$, also $g'(0) = 0$.
- B.** Sei $f(p, q, x) := x^2 + px + q$. Dann ist $f_x(p, q, x) = 2x + p$. Für $x \neq -p/2$ ist die Gleichung nach x auflösbar:

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

- C.** Sei $f(x, y) := x^3 e^y + 2x \cos(xy) - 3$. Dann ist $f_y = x^3 e^y - 2x^2 \sin(xy)$, also $f_y(1, 0) = 1 \neq 0$. Das bedeutet, dass man die Gleichung in der Nähe von $(1, 0)$ nach y auflösen kann. Es ist $f_x = 3x^2 e^y + 2 \cos(xy) - 2xy \sin(xy)$. Ist $y = g(x)$ die Auflösung, so ist $g'(1) = -f_x(1, 0)/f_y(1, 0) = -5$. Die Tangente ist gegeben durch $y = g(1) + g'(1)(x - 1) = -5(x - 1)$, also $5x + y = 5$.
- D.** $\mathbf{F} : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sei definiert durch $\mathbf{F}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) :=$

$$(2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 - 1, x_1 x_2^3 + x_1 x_3 + x_2^2 x_4^2 - x_4 x_5, x_2 x_3 x_5 + x_1 x_3^2 + x_4 x_5^2).$$

Es ist $\mathbf{F}(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ und

$$J_{\mathbf{F}}(\mathbf{a}) = (J', J'') = \left(\begin{array}{cc|ccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Weil $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$ ist, ist die Gleichung $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ in der Form $(x_3, x_4, x_5) = \mathbf{g}(x_1, x_2)$ auflösbar. Außerdem ist

$$J_{\mathbf{g}}(0, 1) = -(J'')^{-1} \cdot J' = - \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

- E.** Sei $\mathbf{F}(x, y, t) := (x^2 y + xy^2 + t^2 - 1, x^2 + y^2 - 2yt)$, also

$$J_{\mathbf{F}} = \left(\begin{array}{cc|c} 2xy + y^2 & x^2 + 2xy & 2t \\ 2x & 2y - 2t & -2y \end{array} \right).$$

Dann ist $J_{\mathbf{F}}(-1, 1, 1) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Die Determinante der linken Teilmatrix ist $= 6 \neq 0$. Also gibt es in der Nähe von $(-1, 1, 1)$ eine Auflösung der Gestalt $(x, y) = \mathbf{g}(t)$. Dann ist

$$\mathbf{g}'(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/3 & 1/6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

F. Nach dem Satz über implizite Funktionen ist $x = x(y, z)$, $y = y(x, z)$ und $z = z(x, y)$, sowie

$$\begin{aligned}\nabla x &= -\frac{\partial f^{-1}}{\partial x} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right), \\ \nabla y &= -\frac{\partial f^{-1}}{\partial y} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial z} \right), \\ \nabla z &= -\frac{\partial f^{-1}}{\partial z} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right).\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} &= \left[-\frac{\partial f^{-1}}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \right] \cdot \left[-\frac{\partial f^{-1}}{\partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial z} \right] \cdot \left[-\frac{\partial f^{-1}}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \right] \\ &= -\frac{f_y \cdot f_z \cdot f_x}{f_x \cdot f_y \cdot f_z} = -1.\end{aligned}$$

G. Offensichtlich ist φ stetig differenzierbar. Außerdem ist

$$J_\varphi = \begin{pmatrix} -(b - a \cos v) \sin u & a \sin v \cos u \\ (b - a \cos v) \cos u & a \sin v \sin u \\ 0 & a \cos v \end{pmatrix}.$$

Ist $\sin v = 0$, so ist $\cos v = \pm 1$. Dann sind die erste und die dritte oder die zweite und die dritte Zeile linear unabhängig. Ist $\sin v \neq 0$, so ist die Determinante der aus den ersten beiden Zeilen gebildeten Untermatrix $\neq 0$. In jedem Fall ist $\text{rg } J_\varphi(u, v) = 2$.

Injektivität: Sei $(x, y, z) = \varphi(u_1, v_1) = \varphi(u_2, v_2)$. Dann ist $z = a \sin v_1 = a \sin v_2$, also $\sin v_1 = \sin v_2$. Weiter ist $x^2 + y^2 = (b - a \cos v_1)^2 = (b - a \cos v_2)^2$, also $\cos v_1 = \cos v_2$. Zusammen mit dem ersten Ergebnis zeigt das, dass $v_1 = v_2$ ist. Aus den Gleichungen $x = (b - a \cos v_1) \cos u_1 = (b - a \cos v_1) \cos u_2$ und $y = (b - a \cos v_1) \sin u_1 = (b - a \cos v_1) \sin u_2$ folgt, dass auch $u_1 = u_2$ ist.

Sei schließlich (u_ν, v_ν) eine Folge, so dass $\varphi(u_\nu, v_\nu)$ gegen $\varphi(u_0, v_0)$ konvergiert. Wie oben zeigt man durch Übergang von (x, y, z) zu z und $x^2 + y^2$, dass $(\cos u_\nu, \sin u_\nu)$ gegen $(\cos u_0, \sin u_0)$ konvergiert und $(\cos v_\nu, \sin v_\nu)$ gegen $(\cos v_0, \sin v_0)$. Ist etwa $\cos u_0 \neq 0$, so muss auch $\cos u_\nu \neq 0$ für großes ν gelten. Durch Anwendung des Arcustangens erhält man dann, dass u_ν gegen u_0 konvergiert. Die anderen möglichen Fälle und auch die Konvergenz von v_ν gegen v_0 erhält man analog.

Das Bild der Parametrisierung ist ein „Torus“ (ein Rettungsring).

H. a) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine p -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Nach Definition gibt es zu jedem Punkt $\mathbf{x}_0 \in M$ eine offene Umgebung $U = U(\mathbf{x}_0) \subset \mathbb{R}^n$,

ein Parametergebiet $P \subset \mathbb{R}^p$ und eine Parametrisierung $\varphi : P \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(P) = M \cap U$. Die Menge $M \cap U$ ist offen in der Relativtopologie auf M . Sind $\mathbf{x}_1 = \varphi(\mathbf{u}_1)$ und $\mathbf{x}_2 = \varphi(\mathbf{u}_2)$ zwei Punkte aus $M \cap U$, so gibt es einen stetigen Weg $\alpha : [0, 1] \rightarrow P$ mit $\alpha(0) = \mathbf{u}_1$ und $\alpha(1) = \mathbf{u}_2$. Dann verbindet $\varphi \circ \alpha : [0, 1] \rightarrow M \cap U$ die Punkte \mathbf{x}_1 und \mathbf{x}_2 .

b) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, $U_\varepsilon := \{(x, y) : \max(|x|, |y|) < \varepsilon, y \text{ rational}\}$. Dann liegt $(0, 0)$ in $U_\varepsilon \cap X$, und für genügend großes $n \in \mathbb{N}$ liegt $(0, 1/n)$ ebenfalls in $U_\varepsilon \cap X$. Jeder Verbindungsweg von $(0, 0)$ nach $(0, 1/n)$ trifft Punkte, deren 2. Komponente irrational ist und die daher nicht in X liegen. Wegen (a) folgt daraus, dass X keine Untermannigfaltigkeit ist.

- I. a) Es ist $\alpha'(t) = (-\sin t, 3 \cos t) \neq (0, 0)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Ist $\alpha(s) = \alpha(t)$, so ist $(\cos s, \sin s) = (\cos t, \sin t)$ und daher $s = t + 2k\pi$. Also ist die Parametrisierung injektiv, wenn man sich auf Intervalle der Länge $< 2\pi$ beschränkt.

Konvergiert $\alpha(t_\nu)$ gegen $\alpha(t^*)$, so konvergiert auch $(\cos t_\nu, \sin t_\nu)$ gegen $(\cos t^*, \sin t^*)$, und daraus folgt, dass t_ν gegen t^* konvergiert.

b) Sei $f(x, y) := 9x^2 + y^2 - 9$. Dann ist $f(\alpha(t)) \equiv 0$ und $\nabla f(x, y) = (18x, 2y)$, also $\nabla f(\alpha(t)) = (18 \cos t, 6 \sin t) \neq (0, 0)$ für alle t .

Ist $f(x, y) = 0$, so ist $x^2 + (y/3)^2 = 1$. Dann gibt es ein t mit $x = \cos t$ und $y/3 = \sin t$.

- J. a) Schreibt man $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$, so sind die Zeilen von $J_{\mathbf{f}}$ die Gradienten ∇f_1 und ∇f_2 . Nun ist

$$J_{\mathbf{f}}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 2x - 2 & 2y & 2z \end{pmatrix}.$$

Auf M ist $(x, y) \neq (0, 0)$. Ist $x = 0$, so ist $y = \pm 1$ und auch $z \neq 0$. Dann sind die beiden hinteren Spalten von $J_{\mathbf{f}}$ linear unabhängig. Ist $y = 0$, so ist $x = \pm 1$ und $z \neq 0$. Dann sind die erste und die dritte Spalte linear unabhängig. Sind $x \neq 0$ und $y \neq 0$, so sind die erste und die zweite Spalte linear unabhängig. Also ist $\text{rg } J_{\mathbf{f}}(x, y, z) = 2$ auf M . Damit sind ∇f_1 und ∇f_2 linear unabhängig. Das zeigt, dass M eine glatte Kurve ist.

b) Sei $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in M$. Für Punkte auf M ist $y^2 = 1 - x^2$ und $z^2 = 2x - x^2 - y^2 = 2x - 1$.

1. Fall: $x_0 \neq 0$ und $y_0 \neq 0$. Dann ist $0 < |x_0| < 1$, und für $0 < |t| < 1$ ist $\alpha_1(t) := (t, \pm\sqrt{1-t^2}, \pm\sqrt{2t-1})$ eine Parametrisierung einer Umgebung von \mathbf{x}_0 .

2. Fall: $x_0 = 0$, also $y_0 = \pm 1$. Dann liefert $\alpha_1(t)$ für $|t| < 1$ eine Parametrisierung einer Umgebung von \mathbf{x}_0 .

3. Fall: $y_0 = 0$ und $x_0 = \pm 1$. Dann liefert $\alpha_2(t) := (\sqrt{1-t^2}, t, 2\sqrt{1-t^2} - 1)$ für $|t| < 1$ die gesuchte Parametrisierung.

In alle 3 Fällen wird M lokal als Graph dargestellt. Daraus folgt, dass man es wirklich mit glatten Parametrisierungen zu tun hat.

K. a) Sei $f(x, y, z) := x^2 + y^2 - z^2 - 1$, $M := f^{-1}(0)$. Dann ist

$$\begin{aligned} T_{(x,y,0)}(M) &= \text{Ker } Df(x, y, 0) \\ &= \{\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) : (2x, 2y, 0) \cdot (v_1, v_2, v_3) = 0\} \\ &= \{(sy, -sx, t) : s, t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Das ist eine Ebene, die auf der x - y -Ebene senkrecht steht (und die z -Achse enthält).

b) Es ist $f(1, 2) = 3 - 8 + \cos(\pi(-1)) = -6$ und $\nabla f(x, y) = (6x - \pi \sin(\pi(x - y)), -4y + \pi \sin(\pi(x - y)))$, also $\nabla f(1, 2) = (6, -8)$. Die affine Tangentialebene an den Graphen ist gegeben durch

$$z = -6 + 6(x - 1) - 8(y - 2).$$

Der Tangentialraum an die Untermannigfaltigkeit $M = \{(x, y, z) : z = f(x, y)\}$ in $(1, 2, -6)$ ist der Raum $\{(u, v, w) : w = 6u - 8v\} = \{u(1, 0, 6) + v(0, 1, -8) : u, v \in \mathbb{R}\}$.

c) Sei $g(x, y, z) := xyz - 1$, also $\nabla g(x, y, z) = (yz, xz, xy)$. Es ist $g(1, 2, 1/2) = 0$ und $\nabla g(1, 2, 1/2) = (1, 1/2, 2)$. Also ist

$$T_{(1,2,1/2)}M = \{(v_1, v_2, v_3) : 2v_1 + v_2 + 4v_3 = 0\} = \{s(1, -2, 0) + t(0, -4, 1) : s, t \in \mathbb{R}\}.$$

L. Es ist $\nabla f = (10x - 12y, -12x)$. Ein Extremwert im Innern von D muss ein kritischer Punkt sein. Dafür kommt nur der Nullpunkt in Frage. Es ist $H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 10 & -12 \\ -12 & 0 \end{pmatrix}$, also $\det H_f(0, 0) = -144 < 0$, also $(0, 0)$ kein Extremwert.

Auf dem Rand von D sucht man Extremwerte unter der Nebenbedingung $g(x, y) := x^2 + y^2 - 1 = 0$. Es ist $\nabla g = (2x, 2y)$. Damit ein Extremwert vorliegt, muss gelten:

$$\nabla f = \lambda \nabla g, \text{ also } 5x - 6y = \lambda x \text{ und } -6x = \lambda y.$$

Ist $y = 0$, so ist auch $x = 0$ und das kann nicht sein. Also muss $y \neq 0$ sein. Setzt man $x = -\lambda y/6$ in die Gleichung $(5 - \lambda)x = 6y$ ein und kürzt anschließend y heraus, so erhält man die Beziehung $\lambda^2 - 5\lambda - 36 = 0$, mit den Lösungen $\lambda_1 = 9$ und $\lambda_2 = -4$.

Das führt zu den Kandidaten $(x, y) = (-(3/2)y, y)$ und $(x, y) = ((2/3)y, y)$. Da außerdem die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ erfüllt sein soll, ergibt sich im 1. Fall $y = \pm 2/\sqrt{13}$ und im 2. Fall $y = \pm 3/\sqrt{13}$. Es ist

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right) &= 9, \\ f\left(\frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{\sqrt{13}}\right) &= 9, \\ f\left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right) &= -4, \\ \text{und } f\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}\right) &= -4. \end{aligned}$$

Die ersten beiden Punkte sind Maxima, die anderen beiden Minima.

- M.** Hat der gesuchte Quader eine Ecke (u, v, w) mit $u > 0$, $v > 0$ und $w > 0$, so besitzt er das Volumen $V = 8uvw$. Wir suchen also das globale Maximum der Funktion $f(x, y, z) := 8xyz$ unter der Nebenbedingung $g(x, y, z) := x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 - 1 = 0$. Es ist

$$\nabla f = (8yz, 8xz, 8xy) \quad \text{und} \quad \nabla g = (2x/a^2, 2y/b^2, 2z/c^2).$$

Das führt zu dem Gleichungssystem

$$8yz = 2\lambda x/a^2, \quad 8xz = 2\lambda y/b^2 \quad \text{und} \quad 8xy = 2\lambda z/c^2.$$

Daraus kann man λ eliminieren und erhält $\lambda = \frac{4a^2yz}{x} = \frac{4b^2xz}{y} = \frac{4c^2xy}{z}$, also

$$a^2y^2 = b^2x^2, \quad a^2z^2 = c^2x^2 \quad \text{und} \quad b^2z^2 = c^2y^2.$$

Soll $(x, y, z) \in E$ gelten, so ist $3x^2/a^2 = 1$, also $x = \pm a/\sqrt{3}$, und analog $y = \pm b/\sqrt{3}$ und $z = \pm c/\sqrt{3}$. Damit ist

$$(u, v, w) = \left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right) \quad \text{und} \quad V = \frac{8abc}{3\sqrt{3}}.$$

- N.** Hier gibt es die zwei Nebenbedingungen $g_1(x, y, z) := x + y + z = 0$ und $g_2(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$. Es ist

$$\nabla f = (1, 2, 3), \quad \nabla g_1 = (1, 1, 1) \quad \text{und} \quad \nabla g_2 = (2x, 2y, 2z).$$

Mit den Lagrange'schen Multiplikatoren λ und μ ergibt sich das Gleichungssystem

$$1 = \lambda + 2\mu x, \quad 2 = \lambda + 2\mu y \quad \text{und} \quad 3 = \lambda + 2\mu z.$$

Außerdem müssen die Nebenbedingungen erfüllt sein.

Addition der Gleichungen ergibt $\lambda = 2$ und daher die Gleichungen

$$\mu x = -1/2, \quad \mu y = 0 \quad \text{und} \quad \mu z = 1/2.$$

Also muss $y = 0$ sein, $\mu \neq 0$, $x = -1/2\mu$ und $z = 1/2\mu$. Wegen $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ist $1/2\mu^2 = 1$, also $\mu = \pm 1/\sqrt{2}$. Es ist $f(1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$ (Minimum) und $f(-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ (Maximum).

- O.** $f(x, y, z) = xy + 2z$ wird unter den Nebenbedingungen $g_1(x, y, z) := x + y + z = 0$ und $g_2(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 24 = 0$ untersucht. Es ist

$$\nabla f = (y, x, 2), \quad \nabla g_1 = (1, 1, 1) \quad \text{und} \quad \nabla g_2 = (2x, 2y, 2z).$$

Das ergibt das Gleichungssystem

$$y = \lambda + 2\mu x, \quad x = \lambda + 2\mu y \quad \text{und} \quad 2 = \lambda + 2\mu z,$$

und daraus $y - x = 2\mu(x - y)$, also $(y - x)(1 + 2\mu) = 0$. Das liefert die Bedingung $x = y$ oder $\mu = -1/2$.

1. Fall: Ist $x = y$, so ist $2x + z = 0$ und $2x^2 + z^2 = 24$. Das ergibt die Lösungen $(x, y, z) = (2, 2, -4)$ (mit $f(2, 2, -4) = -4$) und $(x, y, z) = (-2, -2, 4)$ (mit $f(-2, -2, 4) = 12$).

2. Fall: Ist $\mu = -1/2$, so ist $x = \lambda - y$ und $2 = \lambda - z$, also $x + y = \lambda = 2 + z$. Weil auch noch $x + y = -z$ ist, ist $z = -1$, $\lambda = 1$ und $x + y = 1$. Dann folgt:

$$x^2 + (1 - x)^2 + 1 - 24 = 0, \quad \text{also} \quad x^2 - x - 11 = 0, \quad \text{d.h.} \quad x = \frac{1 \pm 3\sqrt{5}}{2}.$$

Das liefert die Lösungen $(x, y, z) = \left(\frac{1+3\sqrt{5}}{2}, \frac{1-3\sqrt{5}}{2}, -1\right)$ und $(x, y, z) = \left(\frac{1-3\sqrt{5}}{2}, \frac{1+3\sqrt{5}}{2}, -1\right)$. In beiden Punkten nimmt f den Wert -13 an. Also ist der minimale Wert von $f = -13$ und der maximale Wert $= 12$.

Lösungen zu den Aufgaben in 1.6

- A.** Es ist $\sigma(t) := (t, 1 - 2t, 2 + t)$ und $\sigma'(t) = (1, -2, 1)$. Also ist

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} (z, x, y) \cdot d\mathbf{x} &= \int_0^1 (2 + t, t, 1 - 2t) \cdot (1, -2, 1) dt \\ &= \int_0^1 (3 - 3t) dt = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

- B.** Es ist $\alpha_1'(t) = (2 \cos(2t), 2 \sin(2t))$ und $\alpha_2'(t) = (1, 2t)$, also

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha_1} (y, x) \cdot d\mathbf{x} &= \int_0^{\pi/4} (1 - \cos 2t, \sin 2t) \cdot (2 \cos(2t), 2 \sin(2t)) dt \\
&= \int_0^{\pi/4} (2 \cos 2t - 2 \cos^2 2t + 2 \sin^2 2t) dt \\
&= (\sin 2t - \cos 2t \sin 2t) \Big|_0^{\pi/4} = 1,
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha_1} (y, x) \cdot d\mathbf{x} &= \int_0^1 (t^2, t) \cdot (1, 2t) dt \\
&= \int_0^1 3t^2 dt = 1.
\end{aligned}$$

C. Sei $\alpha : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch $\alpha(t) := \begin{cases} (0, t) & \text{für } 0 \leq t \leq 1, \\ (t-1, 1) & \text{für } 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$
und $\beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch $\beta(t) := (t, t)$.

$$\begin{aligned}
\text{Dann ist } \int_{\alpha} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} &= \int_0^1 (t, t) \cdot (0, 1) dt + \int_1^2 (1, 2-t) \cdot (1, 1) dt = \int_0^1 t dt + \\
&\int_1^2 (3-t) dt = 2 \text{ und} \\
\int_{\beta} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} &= \int_0^1 (t, 0) \cdot (1, 1) dt = \int_0^1 t dt = 1/2.
\end{aligned}$$

D. a) Es ist

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} (-\cos t, \sin t, -t/\pi) \cdot (-\sin t, \cos t, 1/\pi) dt \\
&= \int_0^{2\pi} (2 \sin t \cos t - t/\pi^2) dt = -2,
\end{aligned}$$

und (b)

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} &= \int_0^1 (t^3, t^5, t^4) \cdot (1, 2t, 3t^2) dt \\
&= \int_0^1 (t^3 + 2t^6 + 3t^6) dt = \frac{27}{28}.
\end{aligned}$$

E. 1. Weg: Integration über die Strecke $\alpha(t) := (tx, ty)$, $0 \leq t \leq 1$. Dann ist

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &:= \int_{\alpha} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} \\
 &= \int_0^1 (e^{tx} + 2t^2xy, t^2x^2 + \cos(ty)) \cdot (x, y) dt \\
 &= \int_0^1 (xe^{tx} + 3t^2x^2y + y \cos(ty)) dt \\
 &= \left(e^{tx} + t^3x^2y + \sin(ty) \right) \Big|_0^1 = e^x + x^2y + \sin y - 1.
 \end{aligned}$$

2. Weg: Schrittweises Integrieren: Wenn es eine Stammfunktion f gibt, so ist $f_x = e^x + 2xy$ und $f_y = x^2 + \cos y$. Also ist $f(x, y) = e^x + x^2y + \varphi(y)$ (Integration nach x) und dann $f_y = x^2 + \varphi'(y)$, also $\varphi'(y) = \cos y$ und $\varphi(y) = \sin y + c$. Das ergibt die Stammfunktion $f(x, y) := e^x + x^2y + \sin y + c$. Soll etwa $f(0, 0) = 0$ sein, muss $c = -1$ sein.

F. Das Vektorfeld \mathbf{F} besitzt ein Potential f . Schrittweise Integration liefert

$$f(x, y, z) = z \ln x + xy + \varphi(y, z), \text{ mit } \varphi_y = z, \text{ also } \varphi(y, z) = zy + \psi(z).$$

Weiter ist $\psi'(z) = 2z$, also $\psi(z) = z^2 + c$. Die Integrationskonstante c braucht man im Weiteren nicht. Verwenden wir $f(x, y, z) := z \ln x + xy + zy + z^2$ als Stammfunktion, so ist

$$\int_{\alpha} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = f(\alpha(1)) - f(\alpha(0)) = f(1, 4, 1) - f(1, -1, 0) = (4+4+1) - (-1) = 10.$$

G. a) $\mathbf{F}_1(x, y) := (y^2, x^2)$ hat kein Potential, denn $(y^2)_y = 2y \neq 2x = (x^2)_x$.

b) $\mathbf{F}_2(x, y) := (e^x + 2xy, x^2 + y^2)$ hat eine Potentialfunktion. Konstruktion wie in Aufgabe Eb), $f(x, y) = e^x + x^2y + \frac{1}{3}y^3 + c$.

c) $\mathbf{F}_3(x, y) := (x + y, x + y)$ hat ebenfalls ein Potential, zu ermitteln durch sukzessive Integration: $f(x, y) = \frac{1}{2}(x + y)^2 + c$. Man kann das natürlich auch direkt sehen.

H. a) Setze $f(x, y, z) := \int_1^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} t\varphi(t) dt$. dann ist f außerhalb des Nullpunktes differenzierbar und $(f_x, f_y, f_z) = \mathbf{F}$.

b) Sei $p \neq -2$. Dann ist $\varphi(t) = t^p$, also $f(x, y, z) = \int_1^r t^{p+1} dt = r^{p+2}/(p+2) + c$. Ist $p = -2$, so ist $f(x, y, z) = \int_1^r (1/t) dt = \ln r + c$.

Lösungen zu den Aufgaben in 2.1

- A. a) Sei $Q_\mu = I_{\mu,1} \times \dots \times I_{\mu,n}$, für $\mu = 1, \dots, m$, und für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ sei $\mathcal{J}_i := \{I_{\mu,i} : \mu = 1, \dots, m\}$ und $E_i = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{N_i}\}$ die Menge der Anfangs- und Endpunkte der Intervalle $I_{1,i}, \dots, I_{m,i}$, aufsteigend sortiert.

Wir halten ein i fest. Es gibt ein Intervall $I \in \mathcal{J}_i$ mit Anfangspunkt α_1 und einem Endpunkt α_q . Ist $q = 2$, so wählt man das Intervall I aus. Ist $q > 2$, so wählt man alle Intervalle $(\alpha_\nu, \alpha_{\nu+1})$ mit $\nu = 1, \dots, q-1$ und diejenigen Punkte aus $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ aus, die zu I gehören. Dann geht es rechts von α_q weiter. Entweder ist α_q oder α_{q+1} Anfangspunkt eines Intervalls aus \mathcal{J}_i , und damit fährt man fort, wie oben.

Zu jedem i gibt es also eine endliche Menge \mathcal{K}_i von paarweise disjunkten Intervallen, so dass jedes Intervall aus \mathcal{J}_i eine Vereinigung von Intervallen aus \mathcal{K}_i ist. Dann ist die Menge der Quader $L := J_1 \times \dots \times J_n$, $J_i \in \mathcal{K}_i$, paarweise disjunkt, und S ist Vereinigung dieser Quader.

Ist nämlich $L' = J'_1 \times \dots \times J'_n$ und gibt es einen Punkt $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in L \cap L'$, so liegt für jedes i die Komponente x_i in $J_i \cap J'_i$. Also muss $J_i = J'_i$ sein, für $i = 1, \dots, n$. Und ein beliebiger Punkt $\mathbf{x} \in S$ liegt in einem Q_μ und nach Konstruktion dann im kartesischen Produkt von Intervallen aus den Mengen \mathcal{K}_i , also in einem Quader vom Typ L .

b) Im Buch wird gezeigt, dass die charakteristische Funktion eines Quaders eine Treppenfunktion ist (Satz 2.1.3, Seite 157), und auch, dass Linearkombinationen von Treppenfunktionen wieder Treppenfunktionen sind (Satz 2.1.1, Seite 156).

- B. a) **Druckfehler:** Q muss als abgeschlossener Quader mit positivem Volumen vorausgesetzt werden. Sei Q ein Quader mit Ecken in Γ_δ , $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$. Dann gibt es ganze Zahlen $k_i \leq l_i$, so dass $a_i = k_i\delta$ und $b_i = l_i\delta$ ist. Offensichtlich ist Q Vereinigung der Würfel $W_{\nu_1, \dots, \nu_n} := [\nu_1\delta, \nu_1\delta + \delta] \times \dots \times [\nu_n\delta, \nu_n\delta + \delta]$, mit $k_i \leq \nu_i < l_i$. Es ist $\text{vol}_n(W_{\nu_1, \dots, \nu_n}) = \delta^n$, und die Anzahl dieser Würfel beträgt $\frac{b_1 - a_1}{\delta} \dots \frac{b_n - a_n}{\delta} = \text{vol}_n(Q)/\delta^n$.

b) Sei $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ ein beliebiger abgeschlossener Quader. Wir benutzen die Gauß-Klammer: Sei $m_i := [a_i/\delta]$ und $c_i := m_i\delta \in \Gamma_\delta$, sowie $r_i := [-b_i/\delta]$ und $d_i := -r_i\delta \in \Gamma_\delta$. Dann ist $c_i \leq a_i \leq b_i \leq d_i$, $a_i < c_i + \delta$ und $d_i - \delta < b_i$.

Der Quader $Q_\delta := [c_1, d_1] \times \dots \times [c_n, d_n]$ umfasst Q , hat Ecken in Γ_δ und jeder Teilwürfel mit Seitenlänge δ trifft Q . Außerdem ist

$$\text{vol}_n(Q_\delta) = \prod_{i=1}^n (d_i - c_i) < \prod_{i=1}^n (b_i - a_i + 2\delta) = \text{vol}_n(Q) + \delta \cdot C,$$

mit einer geeigneten Konstanten C . Wählt man δ klein genug, ist $\delta \cdot C < \varepsilon$.

c) Das ist ganz einfach nachzurechnen.

C. Ist $h(x)$ konstant (bzw. 0) auf $\overset{\circ}{I}$, so auch $\sin(h(x))$. Also ist $\sin(h(x))$ eine Treppenfunktion. Damit $h(\sin x)$ eine Treppenfunktion sein kann, muss $h(\sin x) = 0$ für $|x| \geq R$, also $h(y) = 0$ für $y \in [-1, 1]$ sein. Dann ist schon $h(\sin x) \equiv 0$.

D. a) Ist h auf dem offenen Quader Q konstant, so ist $h_{\mathbf{a}}$ auf $-\mathbf{a} + Q$ konstant. Ist $Q = (c_1, d_1) \times \dots \times (c_n, d_n)$ und $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$, so ist

$$\begin{aligned} \text{vol}_n(-\mathbf{a} + Q) &= \text{vol}_n((c_1 - a_1, d_1 - a_1) \times \dots \times (c_n - a_n, d_n - a_n)) \\ &= (d_1 - c_1) \cdots (d_n - c_n) = \text{vol}_n(Q). \end{aligned}$$

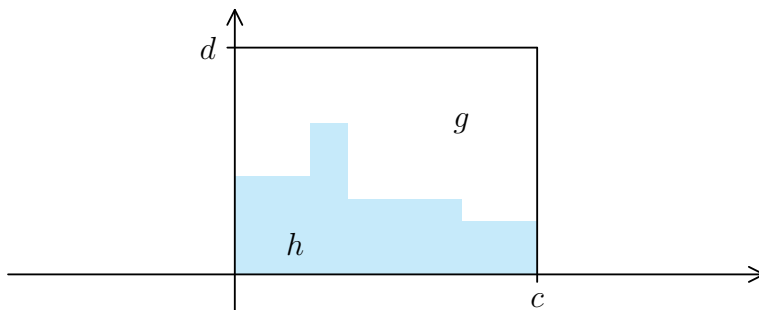
b) Ist h konstant auf $Q = (c_1, d_1) \times \dots \times (c_n, d_n)$ und $c > 0$, so ist h^c konstant auf

$$Q_c := \left(\frac{c_1}{c}, \frac{d_1}{c}\right) \times \dots \times \left(\frac{c_n}{c}, \frac{d_n}{c}\right).$$

Außerdem ist $\text{vol}_n(Q_c) = (1/c) \cdot \text{vol}_n(Q)$.

Ist $c < 0$, so ist $\text{vol}_n(Q_c) = (1/|c|) \cdot \text{vol}_n(Q)$.

E. Man werfe einen genauen Blick auf die folgende Skizze:



F. Sei

$$x_{ij} := a + j(b - a)/2^i, \text{ für } i \in \mathbb{N} \text{ und } j = 0, 1, \dots, 2^i,$$

und $I_{ij} := (x_{ij}, x_{i,j+1}]$ für $j = 0, 1, \dots, 2^i - 1$. Dann definiere man h_i durch $f_{ij} := \inf\{f(x) : x \in \bar{I}_{ij}\}$ und

$$h_i(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x < a, \\ f(a) & \text{für } x = a, \\ f_{ij} & \text{auf } I_{ij}, \\ 0 & \text{für } x > b. \end{cases}$$

Dann ist $h_i(x) \leq f(x)$ auf $[a, b]$.

Weil $f_{ij} \leq \min(f_{i+1,2j}, f_{i+1,2j+1})$ ist, ist $h_i \leq h_{i+1}$. Also konvergiert (h_i) monoton wachsend gegen f .

Weil f auf $[a, b]$ gleichmäßig stetig ist, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass gilt: $|x - x'| < \delta \implies |f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Sei i so groß gewählt, dass $(b - a)/2^i < \delta$ ist. Ist $x \in [a, b]$, so liegt x in einem Intervall I_{ij} und es gibt ein $\xi \in I_{ij}$ mit $f(\xi) = f_{ij}$. Dann ist $|f(x) - h_i(x)| = |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$.

- G.** Sei $h_\nu := \nu^2 \cdot \chi_{(0,1/\nu)}$. Dann konvergiert (h_ν) offensichtlich punktweise gegen Null und $I(h_\nu) := \nu^2 \cdot (1/\nu) = \nu \rightarrow +\infty$.

Lösungen zu den Aufgaben in 2.2

- A.** Die Aufgabe ist trivial. Man setze $K := \overset{\circ}{Q}$ und $L := \overline{Q}$. Dann ist $L \setminus K = \partial Q$ in einer endlichen Vereinigung von Hyperebenen enthalten und daher eine Nullmenge.
- B.** Es ist nur eine Richtung zu zeigen. Ist N Nullmenge, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Überdeckung von N durch offene Quader P_i , so dass $\sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}_n(P_i) < \varepsilon$ ist (Lemma 2.2.5). Jeder Quader P_i ist disjunkte Vereinigung von abzählbar vielen Würfeln (vgl. 2.5.40). Vergrößert man jeden Würfel ein klein wenig, so kann man offene Würfel W_k benutzen, deren Gesamtvolumen z.B. $< 2\varepsilon$ ist.
- C.** Sei $\varepsilon_{\nu,k} := 1/(\nu 2^{k+2})$ für $\nu \in \mathbb{N}$ und $k = -\nu, \dots, \nu$, sowie $I_{\nu,k} := (k - \varepsilon_{\nu,k}, k + \varepsilon_{\nu,k})$. Dann ist $\ell(I_{\nu,k}) = 1/(\nu 2^{k+1})$. Nun sei

$$h_\nu(x) := \begin{cases} \nu & \text{auf } I_{\nu,k}, k = -\nu, \dots, \nu, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist h_ν in jedem $k \in \mathbb{Z}$ stetig, $\lim_{\nu \rightarrow \infty} h_\nu(k) = +\infty$ und

$$I(h_\nu) = \sum_{k=-\nu}^{\nu} \nu \cdot \frac{1}{\nu 2^{k+1}} = \sum_{k=-\nu}^{\nu} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{2^k} < \frac{3}{2}.$$

- D.** Annahme, Q ist eine Nullmenge. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Überdeckung von Q durch offene Quader P_ν mit $\sum_\nu \text{vol}_n(P_i) < \varepsilon$. Der Rand von Q ist eine Nullmenge, kann also durch weitere offene Quader Q_μ überdeckt werden, deren Gesamtvolumen ebenfalls $< \varepsilon$ ist. Zusammen ergibt das eine offene Überdeckung des kompakten Quaders \overline{Q} . Dann reichen aber endlich viele Quader (etwa P_1, \dots, P_r und Q_1, \dots, Q_s), die schon \overline{Q} überdecken. Sei S die Vereinigung dieser Quader. Dann ist $\chi_Q \leq \chi_S$ und

$$\text{vol}_n(Q) = I(\chi_Q) \leq I(\chi_S) \leq \sum_{\rho} \text{vol}_n(P_\rho) + \sum_{\sigma} \text{vol}_n(Q_\sigma) < 2\varepsilon.$$

Da ε beliebig klein gewählt werden kann und $\text{vol}_n(Q) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) > 0$ ist, ergibt sich ein Widerspruch.

E. Sei N eine Nullmenge, so dass $f = 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus N$ gilt.

Annahme, es gibt ein \mathbf{x}_0 mit $f(\mathbf{x}_0) \neq 0$, etwa > 0 . Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $f(\mathbf{x}) > 0$ auf $U_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ ist, also $U_\varepsilon \subset N$. Damit enthält N einen Quader mit positivem Volumen, und der kann keine Nullmenge sein. Widerspruch!

F. a) Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Es gibt Würfel Q_ν mit $M \subset \bigcup_{\nu=1}^\infty Q_\nu$ und $\sum_{\nu=1}^\infty \text{vol}_n(Q_\nu) < \varepsilon$. Ist r_ν die Seitenlänge von Q_ν , so ist $\text{vol}_n(Q_\nu) = r_\nu^n$.

Dann liegt $\mathbf{f}(M \cap Q_\nu)$ in einem Würfel P_ν mit Seitenlänge $\leq 2Cr_\nu$ und $\mathbf{f}(M)$ in der Vereinigung aller P_ν mit $\sum_\nu \text{vol}_n(P_\nu) \leq \sum_\nu (2Cr_\nu)^n = 2^n C^n \sum_\nu \text{vol}_n(Q_\nu) < 2^n C^n \varepsilon$. Da ε beliebig ist, folgt die Behauptung.

b) Zu jedem Punkt $\mathbf{x} \in U$ mit rationalen Koordinaten gibt es einen Quader mit rationaler Seitenlänge um \mathbf{x} , der in U enthalten ist. Das ergibt insbesondere eine abzählbare Quaderüberdeckung von M . Da eine abzählbare Vereinigung von Nullmengen wieder eine Nullmenge ergibt, folgt die Behauptung aus (a).

G. Man betrachte die Ergänzungen in 2.5. Die Cantormenge mit $l_k = 3^{-k}$ ist die Menge, um die es in dieser Aufgabe geht.

H. a) ist trivial: Die Quader, die N überdecken, überdecken erst recht M .

b) Wenn $\sum_{i=1}^\infty \mu^*(M_i)$ divergiert, ist nichts zu zeigen. Sei also $\sum_{i=1}^\infty \mu^*(M_i) < \infty$.

Es sei dann weiter ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben und Zahlen $\varepsilon_i > 0$ so gewählt, dass $\sum_{i=1}^\infty \varepsilon_i = \varepsilon$ ist. Für jedes i gibt es Quader Q_{ij} , so dass gilt:

$$M_i \subset \bigcup_{j=1}^\infty Q_{ij} \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^\infty \text{vol}_n(Q_{ij}) \leq \mu^*(M_i) + \varepsilon_i.$$

Dann ist $\bigcup_{i=1}^\infty M_i \subset \bigcup_{i,j} Q_{ij}$, und es gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \text{vol}_n(Q_{ij}) &= \sum_{i=1}^\infty \left(\sum_{j=1}^\infty \text{vol}_n(Q_{ij}) \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^\infty (\mu^*(M_i) + \varepsilon_i) = \sum_{i=1}^\infty \mu^*(M_i) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Weil ε beliebig ist, folgt die Behauptung.

c) Offensichtlich ist $\text{vol}_n(\mathbf{x} + Q) = \text{vol}_n(Q)$ für jeden Vektor \mathbf{x} und jeden Quader Q . Daraus folgt sofort die entsprechende Aussage für das äußere Maß.

Lösungen zu den Aufgaben in 2.3

A. a) Da die approximierende Folge nur fast überall konvergieren muss, ist die Aussage trivial.

b) Ist h Treppenfunktion, so nimmt man als approximierende Folge $h_\nu := h$.

c) Man konstruiere eine geeignete Folge von Treppenfunktionen. Sei

$$x_{ij} := a + j(b-a)/2^i, \text{ für } i \in \mathbb{N} \text{ und } j = 0, 1, \dots, 2^i,$$

und $I_{ij} := (x_{ij}, x_{i,j+1})$ für $j = 0, 1, \dots, 2^i - 1$. Dann definiere man h_i durch

$$h_i(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x < a, \\ \inf\{f(x) : x \in \bar{I}_{ij}\} & \text{auf } I_{ij}, \\ 0 & \text{für } x > b. \end{cases}$$

In den Intervall-Endpunkten kann h_i beliebig definiert werden.

Die Vereinigung aller Intervall-Endpunkte für alle i bildet eine Nullmenge Z . Außerhalb von Z strebt (h_i) punktweise gegen \hat{f} (dazu braucht man die Stetigkeit). Die Folge der h_i ist monoton wachsend, die Integrale sind Darboux'sche Untersummen und beschränkt durch das Riemann-Integral. Weil f stetig ist, streben die Darboux'schen Untersummen gegen das Integral.

d) Man konstruiere h_i wie in (c). Die Konvergenz von (h_i) gegen f kann dann (außer in den Unstetigkeitsstellen der h_i) nur in den stetigen Punkten von f bewiesen werden. Weil f durch eine Konstante M beschränkt wird, ist $I(h_i) \leq M(b-a)$. Damit gehört f zu \mathcal{L}^+ .

B. a) f stimmt fast überall mit der charakteristischen Funktion von $[0, 1]$ überein.

b) g ist beschränkt und fast überall stetig, nach Aufgabe (A) also Element von \mathcal{L}^+ .

C. a) Sei K die Cantor-Menge aus Aufgabe 2.2.G. Dann ist $K \subset [0, 1]$ eine Nullmenge und $U := [0, 1] \setminus K$ offen. χ_K stimmt außerhalb der Cantor-Menge mit der Nullfunktion überein und ist dort überall stetig, weil $\mathbb{R} \setminus K$ offen ist.

b) Die charakteristische Funktion $\chi_{\mathbb{Q}}$ stimmt fast überall mit der stetigen Nullfunktion überein, ist aber selbst nirgends stetig.

D. $h_N := f \cdot \chi_{(1/(N+1)!, 1]} = \sum_{n=1}^N n \cdot \chi_{(1/(n+1)!, 1/n]}$ ist eine Treppenfunktion, und es ist

$$I(h_N) = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right) = \sum_{n=1}^N \frac{n^2}{(n+1)!} \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{(n-1)!} \leq e.$$

Da (h_n) monoton wächst und gegen f konvergiert, liegt f in \mathcal{L}^+ .

Wäre auch $-f$ ein Element von \mathcal{L}^+ , so müsste es eine Treppenfunktion $h \leq -f$ geben, also ein $M > 0$ und eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}$, so dass $-f \geq -M$ auf $\mathbb{R} \setminus N$ ist. Sei nun $n \in \mathbb{N}$, $n > M$. Dann ist $f(x) > M$ auf $(0, 1/n!]$, also $-f < -M$ auf $(0, 1/n!]$. Das bedeutet, dass $(0, 1/n!] \subset N$ ist. Aber das kann nicht sein.

E. Die Aussagen gelten für Treppenfunktionen (Aufgabe 2.1.4.D). Der Übergang zu Grenzwerten von monotonen Folgen von Treppenfunktionen funktioniert routinemäßig. Man muss ja die Konvergenz nur in jedem Punkt einzeln betrachten und kann dabei die üblichen Grenzwertsätze benutzen.

F. a) Sind f_ν und g_ν Treppenfunktionen, die monoton wachsend fast überall gegen f bzw. g konvergieren, so sind auch $f_\nu g_\nu$ Treppenfunktionen, die monoton wachsend fast überall gegen fg konvergieren. Weiter konvergiere $I(f_\nu)$ gegen $I(f)$. Ist $g \leq C$, so ist auch $g_\nu \leq C$ für alle ν und $f_\nu g_\nu \leq C \cdot f_\nu$, also $I(f_\nu g_\nu) \leq C \cdot I(f_\nu) \leq C \cdot I(f)$.

b) Sei $f_N := \sum_{\nu=1}^N \sqrt{\nu} \cdot \chi_{(1/(\nu+1), 1/\nu]}$, für $N \in \mathbb{N}$. Die Folge der f_N konvergiert monoton wachsend gegen eine Funktion $f \in \mathcal{L}^+$, denn es gilt:

$$I(f_N) = \sum_{\nu=1}^N \sqrt{\nu} \frac{1}{\nu(\nu+1)} \leq \sum_{\nu=1}^N \frac{1}{\nu^{3/2}},$$

und die rechte Seite konvergiert für $N \rightarrow \infty$.

Aber $I(f_N^2) = \sum_{\nu=1}^N \frac{\nu}{\nu(\nu+1)} = \sum_{\nu=1}^N \frac{1}{\nu+1}$ konvergiert gegen $+\infty$. Die Funktion f^2 liegt nicht in \mathcal{L}^+ .

G. a) Sei $f(\mathbf{x}) \equiv c$. Dann ist $g_\nu := \widehat{f|_{[0,\nu]}}$ integrierbar, $\int g_\nu d\mu_n = nc$, $g_\nu \leq f$, also $\int f d\mu_n \geq \int g_\nu d\mu_n = \nu c$. Das ist nicht möglich, wenn f integrierbar ist.

b) Sei $g_n(x) := \begin{cases} \nu & \text{für } 1/(\nu+1) < x \leq 1/\nu, 1 \leq \nu \leq n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Dann ist $\int f d\mu_1 \geq \int g_n d\mu_1 = \sum_{\nu=1}^n \nu$ für jedes n , also $= +\infty$.

H. Es ist $f = g - h$ mit Funktionen $g, h \in \mathcal{L}^+$. Da die Aussage definitionsgemäß für g und h gilt, gilt sie auch für f .

- I.** Die Vereinigung N aller Hyperebenen $\{x = r\}$, $r \in \mathbb{Q}$, ist eine Nullmenge im \mathbb{R}^2 . Außerhalb von N stimmt f mit der charakteristischen Funktion des Einheitsquadrates überein. Damit ist f L-integrierbar. Jede Untersumme von f ist $= 0$, jede Obersumme $= 1$. Also ist f nicht R-integrierbar.
- J.** a) Sei M eine Jordan-Nullmenge. Ist $\varepsilon > 0$, so gibt es abgeschlossene Quader Q_1, \dots, Q_r , so dass $M \subset S := Q_1 \cup \dots \cup Q_r$ und $\text{vol}_n(Q_1) + \dots + \text{vol}_n(Q_r) < \varepsilon$ ist. Sa S abgeschlossen ist, liegt auch \overline{M} in S . Also ist auch \overline{M} eine Jordan-Nullmenge.
- b) Sei $M := [0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Dann ist M eine L-Nullmenge, aber $\overline{M} = [0, 1]$ nicht.
- K.** Der Wert $f(\xi_{j_1 j_2 \dots j_n}(\mathfrak{B}))$ liegt zwischen dem Infimum und dem Supremum von f auf dem Teilquader $Q_{j_1 j_2 \dots j_n}$. Da die Unter- und Obersummen gegen das Integral konvergieren, folgt die Behauptung.
- L.** Es ist $f(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}) = -\frac{67}{16}$, $f(\frac{1}{2}, \frac{7}{4}) = -\frac{139}{16}$, $f(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}) = -\frac{51}{16}$ und $f(\frac{3}{2}, \frac{7}{4}) = -\frac{123}{16}$. Setzt man diese Werte ein, so erhält man:

$$\int_Q f(x, y) dV_2 = -\frac{95}{8} \approx -11.875.$$

Lösungen zu den Aufgaben in 2.4

- A.** Zerlege $f_\nu = f_\nu^+ - f_\nu^-$, mit $f_\nu^+, f_\nu^- \geq 0$. Dann ist $|f_\nu| = f_\nu^+ + f_\nu^-$. Weil $\sum_\nu \int f_\nu^+ d\mu_n \leq \sum_\nu \int |f_\nu| d\mu_n < \infty$ (und genauso $\sum_\nu \int f_\nu^- d\mu_n < \infty$) ist, konvergiert $\sum_\nu f_\nu^+$ gegen eine Funktion $g^+ \in \mathcal{L}^1$ und $\sum_\nu f_\nu^-$ gegen eine Funktion $g^- \in \mathcal{L}^1$. Dann konvergiert $\sum_\nu f_\nu$ gegen $g^+ - g^- =: f \in \mathcal{L}^1$. Die Vertauschbarkeit von Summation und Integration folgt dann:

$$\int f d\mu_n = \int g^+ d\mu_n - \int g^- d\mu_n = \sum_\nu \int g_\nu^+ d\mu_n - \sum_\nu \int g_\nu^- d\mu_n = \sum_\nu \int f_\nu d\mu_n.$$

- B.** Es ist $\int f_n d\mu_1 = \int_{-n}^n e^{-|x|} dx = 2 \int_0^n e^{-x} dx = 2(1 - e^{-n})$. Die Folge (f_n) wächst monoton, die Integrale sind durch 2 nach oben beschränkt. Also konvergiert (f_n) gegen eine integrierbare Funktion (die natürlich mit $f(x) = e^{-|x|}$ übereinstimmt). Es ist $\int f d\mu_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu_1 = 2$.

- C.** Sei $\varphi_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 1/n \text{ oder } > 1, \\ \ln x & \text{falls } (1/n) \leq x \leq 1. \end{cases}$ Dann ist (φ_n) monoton fallend, und die Folge konvergiert gegen f . Alle φ_n sind integrierbar und es ist

$$\int \varphi_n d\mu_1 = \int_{1/n}^1 \ln x dx = (x \ln x - x) \Big|_{1/n}^1 = \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n} - 1.$$

Die Funktion $g(x) := \ln x/x$ ist positiv und streng monoton fallend für $x > e$. Also bleiben die obigen Integrale für $n \rightarrow \infty$ nach oben und unten beschränkt. Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz ist f integrierbar.

D. Die Funktion $\varphi_n(x) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x} & \text{für } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$ ist integrierbar, genauso

wie $\psi(x) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{für } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$. Weil (φ_n) gegen f konvergiert und $|\varphi_n| \leq \psi$ ist, folgt aus dem Lebesgue'schen Konvergenzsatz die Integrierbarkeit von f .

E. Ist $\alpha \geq 0$, so ist x^α über $[0, 1]$ R-integrierbar und $\int_0^1 x^\alpha dx = 1/(\alpha + 1)$.

Sei nun $-1 < \alpha < 0$, sowie $f_n(x) := \begin{cases} x^\alpha & \text{für } x \geq 1/n, \\ 0 & \text{für } x < 1/n. \end{cases}$. Die Folge (f_n) konvergiert gegen $f(x) := x^\alpha \cdot \chi_{[0,1]}$, und es ist

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \int_{1/n}^1 x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha + 1} \left(1 - \frac{1}{n^{\alpha+1}}\right).$$

Die rechte Seite konvergiert für $\alpha > -1$ und $n \rightarrow \infty$ gegen $1/(\alpha + 1)$. Mit dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt die Integrierbarkeit von f .

F. Das Ergebnis sieht aus wie der Lebesgue'sche Konvergenzsatz. Der Unterschied ist: Nicht die Folge, sondern ihr Grenzwert wird als Lebesguebeschränkt vorausgesetzt. Man definiere $g_\nu := \max(-g, \min(f_\nu, g))$. Dann ist g_ν integrierbar, $|g_\nu| \leq g$ und (g_ν) konvergiert fast überall gegen f (weil $-g \leq f \leq g$ ist).

G. Klar ist, dass f für $x \neq 0$ differenzierbar ist, und

$$f'(x) = 2 \left(x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{x} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \right).$$

f ist aber auch in $x = 0$ differenzierbar, denn es ist $f(x) = x \cdot \Delta(x)$, mit $\Delta(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow 0$. Für die Integrierbarkeit von f' spielt natürlich der Wert von f im Nullpunkt keine Rolle.

Wäre f' auf einem Intervall der Gestalt $[0, n]$ integrierbar, so auch

$$g(x) := x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{2} f'(x) = \frac{1}{x} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Und dann müsste

$$\int_0^n \left| \frac{1}{x} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \right| dx = \int_{1/n}^\infty |\cos(u^2)/u| du = \frac{1}{2} \int_{1/n^2}^\infty |(\cos v)/v| dv$$

existieren. Das ist aber nicht der Fall.

H. Sei $\varphi_N := \sum_{n=1}^N \sqrt{n} \cdot \chi_{(1/(n+1), 1/n]}$. Nach 2.3.F konvergiert die Folge der φ_N gegen eine Funktion aus \mathcal{L}^+ , und das ist natürlich f . Aus der Divergenz der harmonischen Reihe folgt, dass f^2 nicht integrierbar ist. Die Funktion $-f$ kann nicht zu \mathcal{L}^+ gehören, denn dann müsste $-f$ fast überall nach unten beschränkt sein.

I. Sei $0 < s < t$. Mit der Substitution $u = x^2$ erhält man

$$\begin{aligned} \left| \int_s^t \sin(x^2) dx \right| &= \frac{1}{2} \left| \int_{s^2}^{t^2} \frac{\sin u}{\sqrt{u}} du \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \left(\frac{\cos u}{\sqrt{u}} \Big|_{s^2}^{t^2} + \frac{1}{2} \int_{s^2}^{t^2} \frac{\cos u}{u^{3/2}} du \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \int_{s^2}^{t^2} \frac{1}{u^{3/2}} du \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{t} - u^{-1/2} \Big|_{s^2}^{t^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{t} - \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{s} \right) \right) = \frac{1}{s}. \end{aligned}$$

Mit dem Cauchy Kriterium für uneigentliche Integrale folgt die Konvergenz des Integrals.

Weiter ist $\int_{\sqrt{k\pi-\pi}}^{\sqrt{k\pi}} |\sin(x^2)| dx = \frac{1}{2} \int_{k\pi-\pi}^{k\pi} \frac{|\sin u|}{\sqrt{u}} du \geq \frac{1}{2} \int_{k\pi-\pi}^{k\pi} \frac{|\sin u|}{\sqrt{\pi k}} du = \frac{1}{\sqrt{\pi k}}$, also

$$\int_0^{\sqrt{n\pi}} |\sin(x^2)| dx = \sum_{k=1}^n \int_{\sqrt{k\pi-\pi}}^{\sqrt{k\pi}} |\sin(x^2)| dx \geq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}},$$

und dieser Ausdruck divergiert für $n \rightarrow \infty$. Das zeigt, dass $\sin(x^2) \cdot \chi_{[0, \infty)}$ nicht Lebesgue-integrierbar ist.

J. Sei $f_n(x) := (1/n) \cdot \chi_{[-n, n]}$. Dann konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen Null, und es ist $\int f_n d\mu_1 = 2n \cdot 1/n = 2$.

K. Sei $f_N := \sum_{\nu=1}^N g_\nu$. Dann konvergiert (f_N) fast überall gegen g . Weil die $g_\nu \geq 0$ sind, wächst die Folge der f_N monoton. Mit g ist dann auch diese Folge L -beschränkt, und aus dem Lebesgue'schen Konvergenzsatz folgt:

$$\sum_{\nu} \int g_\nu d\mu_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \int f_N d\mu_n = \int \lim_{N \rightarrow \infty} f_N d\mu_n = \int g d\mu_n.$$

L. a) Wähle eine Folge $t_\nu \rightarrow 0$ und setze $f_\nu := f_{t_\nu}$. Dann konvergiert $f_\nu(x)$ für fast alle x gegen $f(x)$. Außerdem ist $|f_\nu| \leq g$. Nach Lebesgue ist dann $f \in \mathcal{L}^1$ und $\int f d\mu_1 = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int f_\nu d\mu_1$. Da dies für jede Folge t_ν gilt, ist $\lim_{t \rightarrow 0} \int f_t d\mu_1 = \int f d\mu_1$.

b) Sei $f \in \mathcal{L}^1$, $x_0 \in \mathbb{R}$ fest und $f_h := f \cdot \chi_{(-\infty, x_0+h]}$. Dann ist f_h integrierbar und $|f_h| \leq g := |f|$. Außerdem ist

$$f_h(x) - f_0(x) = f(x) \cdot (\chi_{(-\infty, x_0+h]} - \chi_{(-\infty, x_0]}) = f(x) \cdot \chi_{(x_0, x_0+h]}.$$

Für $h \rightarrow 0$ konvergiert f_h gegen f_0 . Setzt man

$$F(x) := \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int f \cdot \chi_{(-\infty, x]} d\mu_1 = \int f_{x-x_0} d\mu_1,$$

so folgt:

$$\lim_{h \rightarrow 0} F(x_0 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} \int f_h d\mu_1 = \int f_0 d\mu_1 = F(x_0).$$

Das zeigt die Stetigkeit von F .

M. Sei $b_n \geq a$, $b_n \rightarrow \infty$, $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f_n := f \cdot \chi_{[a, b_n]}$. Dann liegt f_n in \mathcal{L}^1 und konvergiert gegen f . Folglich konvergiert auch $|f_n|$ gegen $|f|$. Weil $|f_n|$ eine monoton wachsende Folge ist und $\int |f_n| d\mu_1 \leq M$ für alle n gilt, folgt aus dem Satz von der monotonen Konvergenz, dass $|f| \in \mathcal{L}^1$ ist. Aus dem Lebesgue'schen Konvergenzsatz folgt die Integrierbarkeit von f und die Beziehung $\int f_n d\mu_1 \rightarrow \int f d\mu_1$.

N. Mit L'Hospital zeigt man zunächst, dass $f(x, t)$ auf $[0, 1] \times \mathbb{R}_+$ stetig ist.

a) **Fehler:** Man soll nur zeigen, dass $x \mapsto g(x, t)$ für festes t integrierbar ist.

Ist $x > 1$, so ist $1/x < 1$ und daher $|f(x, t)| < e^{-x} + e^{-xt}$. Für festes t ist $g(x, t)$ auf $[0, 1]$ integrierbar (wegen der Stetigkeit) und auf $[1, \infty)$ absolut uneigentlich integrierbar und damit auch L -integrierbar.

b) Wegen (a) existiert $F(t)$ für jedes $t \in \mathbb{R}_+$. Der Integrand ist nach t differenzierbar, $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = e^{-xt}$ kann für $t > a > 0$ durch die integrierbare Funktion $x \mapsto e^{-xa}$ abgeschätzt werden. Daher ist F differenzierbar und

$$F'(t) = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx = \int_0^\infty e^{-xt} dx = \frac{1}{t}.$$

Also ist $F(t) = \ln t + C$, mit $C = F(1) = 0$.

Lösungen zu den Aufgaben in 2.5

A. Wegen der σ -Additivität des Lebesgue-Maßes ist

$$\mu_1\left(\bigcup_{\nu=1}^{\infty}\left(q_{\nu} - \frac{1}{\nu^2}, q_{\nu} + \frac{1}{\nu^2}\right)\right) \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{\nu^2} < \infty.$$

Also kann der Rest in \mathbb{R} nicht leer sein.

B. Sei $X \subset [0, 1]$, $\mu_1(X) = 1$. Annahme, X ist nicht dicht in $[0, 1]$.

Dann gibt es ein $x_0 \in [0, 1]$ und eine offene Umgebung $U = U(x_0) \subset \mathbb{R}$, so dass $(U \setminus \{x_0\}) \cap X = \emptyset$ ist. Dann gibt es ein offenes Intervall $I \subset U \cap [0, 1]$, so dass $I \cap X = \emptyset$ ist. Daraus folgt:

$$\mu_1(X) + \mu_1(I) = \mu_1(X \cup I) \leq \mu_1([0, 1]) = 1,$$

also $\mu_1(X) \leq 1 - \mu_1(I) < 1$. Widerspruch!

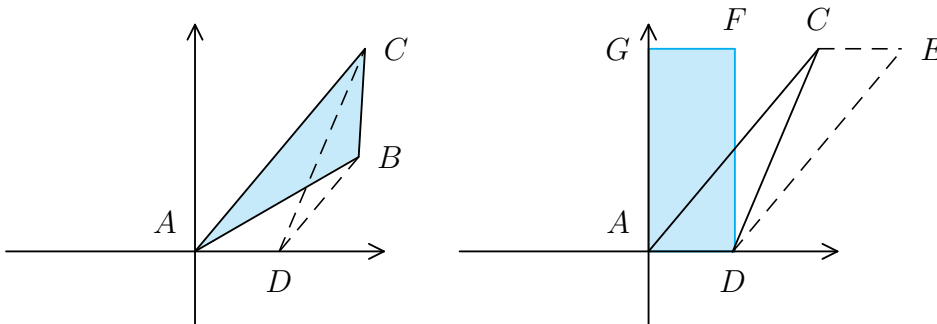
C. a) Nach Voraussetzung ist χ_M integrierbar. Außerdem ist

$$\chi_{\mathbf{a}+M}(\mathbf{x}) = \chi_M(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \quad \text{und} \quad \chi_{c \cdot M}(\mathbf{x}) = \chi_M\left(\frac{1}{c}\mathbf{x}\right).$$

Mit Aufgabe 2.3.17.E folgt: $\mu_n(\mathbf{a}+M) = \mu_n(M)$ und $\mu_n(c \cdot M) = |c|^n \cdot \mu_n(M)$. (**Achtung**, hier ist in der Aufgabenstellung ein **Druckfehler**).

b) Da Translationen keine Rolle spielen, kann man annehmen, dass eine Ecke des Dreiecks ABC im Nullpunkt liegt, etwa A . Elementargeometrisch hat Dreieck ABC den gleichen Flächeninhalt wie Dreieck ADC . Da das eine aus dem anderen durch Wegnahme und Hinzunahme von Teildreiecken entsteht (und dazu höchstens Translationen und eine Punktspiegelung gebraucht werden), ist auch das Maß der Dreiecke gleich.

Mit den gleichen Methoden kann man Dreieck ADC zu einem Parallelogramm $ADEC$ ergänzen, dessen Flächeninhalt (und dessen Maß) doppelt so groß wie das des Dreiecks ist. Schließlich kann man das Parallelogramm $ADEC$ in das achsenparallele Rechteck $ADFG$ verwandeln, ohne fass sich Flächeninhalt und Maß ändern. Und bei diesem Rechteck weiß man, dass Flächeninhalt und Maß übereinstimmen.



So erhält man die Formel: $\mu_2(ADC) = \frac{1}{2} \text{Grundlinie} \times \text{Höhe}$. Bezeichnet man den elementargeometrischen Inhalt mit I_e , so erhält man

$$\mu_2(ABC) = \mu_2(ADC) = I_e(ADC) = I_e(ABC).$$

c) Vgl. „Mathematik für Einsteiger“, 3. Auflage, Kapitel 7, S 167 - 168.

D. Sei $\mathcal{M}_n := \{M_\nu : \mu_1(M_\nu \cap [-n, n]) \geq 1/n\}$ und $\mathcal{M} := \bigcup_n \mathcal{M}_n$. Wenn Mengen $M_{\nu_1}, \dots, M_{\nu_N}$ in \mathcal{M}_n liegen, dann ist

$$\begin{aligned} \frac{N}{n} &\leq \sum_{\nu=1}^N \mu_1(M_{\nu_\nu} \cap [-n, n]) \\ &= \mu_1\left(\bigcup_{\nu=1}^N M_{\nu_\nu} \cap [-n, n]\right) \leq 2n, \end{aligned}$$

also $N \leq 2n^2$. Also ist \mathcal{M}_n endlich und \mathcal{M} abzählbar.

E. Sei (h_ν) eine approximierende Folge von f . Dann konvergiert $\min(h_\nu, \chi_A)$ fast überall monoton wachsend gegen $\min(f, \chi_A)$, und diese Funktion stimmt fast überall mit χ_A überein. Also ist

$$\mu_n(A) = \int \chi_A d\mu_n = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int \min(h_\nu, \chi_A) d\mu_n \leq \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int h_\nu d\mu_n = \int f d\mu_n < \infty.$$

F. Sei Q ein kompakter Quader, $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann sei $\delta < \varepsilon/|c|$ gewählt und E eine messbare Menge mit $\mu_n(E) < \delta$. Dann ist

$$\left| \int_E (c \cdot \chi_Q) d\mu_n \right| = |c| \cdot \mu_n(E \cap Q) \leq |c| \cdot \delta < \varepsilon.$$

Ist h eine Treppenfunktion, so gibt es paarweise disjunkte Quader Q_1, \dots, Q_N und reelle Zahlen $c_\nu \neq 0$, so dass gilt:

$$\left| \int_E f d\mu_n \right| = \sum_{\nu=1}^N |c_\nu| \cdot \mu_n(E \cap Q_\nu) \leq c \cdot \mu_n(E),$$

wenn man $c := \min(|c_1|, \dots, |c_N|)$ setzt. Damit kann man die Behauptung für Treppenfunktionen beweisen.

Ist f integrierbar, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Treppenfunktion h , so dass $0 \leq h \leq |f|$ und $\int (|f| - h) d\mu_n < \varepsilon$ ist. Wählt man nun $\delta > 0$ so, dass $\int h d\mu_n < \varepsilon$ für jede messbare Menge E mit $\mu_n(E) < \delta$ gilt, so folgt für solche Mengen:

$$\left| \int_E f d\mu_n \right| \leq \int_E (|f| - h) d\mu_n + \int_E h d\mu_n < 2\varepsilon.$$

G. Es ist $E_{z,\nu} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : z \cdot 2^{-\nu} \leq f(\mathbf{x}) < (z+1) \cdot 2^{-\nu}\}$. Für festes ν sind die Mengen $E_{z,\nu}$ paarweise disjunkt und ihre Vereinigung ergibt den ganzen \mathbb{R}^n .

Ist $\nu \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, so gibt es ein $z \in \mathbb{Z}$ mit $\mathbf{x} \in E_{z,\nu}$. Dann ist $f_\nu(\mathbf{x}) = z \cdot 2^{-\nu} \leq f(\mathbf{x})$.

Es ist

$$[z \cdot 2^{-\nu}, (z+1) \cdot 2^{-\nu}) = [2z \cdot 2^{-\nu-1}, (2z+1) \cdot 2^{-\nu-1}) \cup [(2z+1) \cdot 2^{-\nu-1}, (z+1) \cdot 2^{-\nu}),$$

also $E_{z,\nu} = E_{2z,\nu+1} \cup E_{2z+1,\nu+1}$. Sei nun $\nu \in \mathbb{N}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und in $E_{z,\nu}$. Ist $\mathbf{x} \in E_{2z,\nu+1}$, so ist $f_{\nu+1}(\mathbf{x}) = 2z \cdot 2^{-\nu-1} = z \cdot 2^{-\nu} = f_\nu(\mathbf{x})$. Ist $\mathbf{x} \in E_{2z+1,\nu+1}$, so ist $f_{\nu+1}(\mathbf{x}) = (2z+1) \cdot 2^{-\nu-1} = z \cdot 2^{-\nu} + 2^{-\nu-1} > f_\nu(\mathbf{x})$.

Ist $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und ν fest, so gibt es ein z mit $\mathbf{x} \in E_{z,\nu}$. Dann ist $f_\nu(\mathbf{x}) = z \cdot 2^{-\nu}$ und $z \cdot 2^{-\nu} \leq f(\mathbf{x}) < (z+1) \cdot 2^{-\nu}$, also $0 \leq f(\mathbf{x}) - f_\nu(\mathbf{x}) \leq (z+1) \cdot 2^{-\nu} - z \cdot 2^{-\nu} = 2^{-\nu}$. Das zeigt, dass (f_ν) monoton wachsend und gleichmäßig gegen f konvergiert.

H. Bemerkung: f wird nicht als messbar vorausgesetzt! Mit M_c ist auch die Komplementärmenge $\{f \leq c\}$ messbar. Das gilt dann auch für $\{f \geq c\} = \bigcap_n \{f > c - 1/\nu\}$. Und dann ist $\{f = c\} = \{f \geq c\} \cap \{f \leq c\}$ messbar. Schließlich ist

$$\{f = \infty\} = \bigcap_{\nu=1}^{\infty} \{f > \nu\} \text{ und } \{f = -\infty\} = \bigcap_{\nu=1}^{\infty} \{f < -\nu\}$$

messbar.

I. Die Menge $A := \{\mathbf{x} : f(\mathbf{x}) = 1\}$ ist messbar und daher auch

$$\mathbb{R}^n \setminus A = \{\mathbf{x} : 0 \leq f(\mathbf{x}) < 1\} \cup \{\mathbf{x} : f(\mathbf{x}) > 1\}.$$

Ist $f(\mathbf{x}) > 1$, so ist $\lim_{\nu \rightarrow \infty} f(\mathbf{x})^\nu = +\infty$. Das kann auf keiner Menge von positivem Maß gelten. Also ist $0 \leq f(\mathbf{x}) < 1$ fast überall auf $\mathbb{R}^n \setminus A$ und damit auch $\lim_{\nu \rightarrow \infty} f(\mathbf{x})^\nu = 0$ fast überall auf $\mathbb{R}^n \setminus A$. Aus dem Lebesgue'schen

Konvergenzsatz folgt, dass $\varepsilon_\nu := \int_{\mathbb{R}^n \setminus A} f(\mathbf{x})^\nu d\mu_n$ für $\nu \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert.

Nun ist $c = \int f(\mathbf{x})^\nu d\mu_n = \int_A d\mu_n + \int_{\mathbb{R}^n \setminus A} f(\mathbf{x})^\nu d\mu_n = \mu_n(A) + \varepsilon_\nu$ für alle ν , also $c = \mu_n(A)$ und damit $\varepsilon_\nu = 0$ für alle ν .

Ist $\mu_n(\mathbb{R}^n \setminus A) = 0$, so ist $f(\mathbf{x}) = 1$ fast überall. Das kann nicht sein (denn dann wäre $c = +\infty$).

Also ist $\mu_n(\mathbb{R}^n \setminus A) > 0$. Weil alle $\varepsilon_\nu = 0$ sind, muss $f = 0$ fast überall auf $\mathbb{R}^n \setminus A$ gelten. Also ist $f = \chi_A$ fast überall.

- J.** Sei $c \in \mathbb{R}$. Dann gibt es eine Folge $q_1 > q_2 > q_3 > \dots$ von rationalen Zahlen, die gegen c konvergiert. Also ist $\{\mathbf{x} : f(\mathbf{x}) > c\} = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \{\mathbf{x} : f(\mathbf{x}) > q_\nu\}$ messbar. Da dies für reelle Zahl c gilt, ist f messbar.
- K.** Die Funktion $g := f \cdot \chi_A$ ist messbar und durch f L -beschränkt, also integrierbar. Da $\int |g| d\mu_n = 0$ ist, ist $g = 0$ fast überall, also auf $\mathbb{R}^n \setminus N$ (wobei N eine Nullmenge ist). Außerdem gibt es eine Nullmenge M , so dass $f > 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus M$ ist. Dann ist $A \setminus M \subset \{\mathbf{x} : g(\mathbf{x}) > 0\} \subset N$ und damit $A = (A \setminus M) \cup (A \cap M)$ eine Nullmenge.
- L.** a) Da $1/\sqrt{x}$ über $I = (0, 1]$ uneigentlich integrierbar ist, liegt f in $\mathcal{L}^1(I)$ und ist insbesondere messbar. $f^2(x) = 1/x$ ist nicht über I integrierbar (sonst wäre $1/x$ auch uneigentlich integrierbar).

b) **Druckfehler:** g sollte f genannt werden!

Offensichtlich ist f messbar. Da $1/x^2$ über $I := [1, \infty)$ uneigentlich integrierbar ist, ist $f^2 \in \mathcal{L}^1(I)$, also $f \in \mathcal{L}^2(I)$. Andererseits ist f nicht integrierbar (gleiche Begründung wie in (a)).

c) Mit f und g ist auch $f \cdot g$ messbar. Außerdem ist $|f \cdot g| \leq (f^2 + g^2)/2$. Also ist $f \cdot g$ integrierbar und

$$(\alpha f + \beta g)^2 = \alpha^2 f^2 + 2\alpha\beta fg + \beta^2 g^2 \in \mathcal{L}^1.$$

Damit liegt $\alpha f + \beta g$ in $\mathcal{L}^2(I)$.

d) wurde schon in (c) gelöst.

- M.** a) Die Integrierbarkeit von f ist trivial (integriere zunächst über endliche Intervalle).

b) Sei $\varphi_n(x) := g(x) \cdot \chi_{[-n,n]}(x)$. Dann ist φ_n integrierbar und $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = g$. Weiter ist

$$|g(x)| \leq \frac{1}{e^{x^2}} \leq \frac{1}{1+x^2} = f(x)$$

und damit auch $|\varphi_n| = |g| \cdot \chi_{[-n,n]} \leq f$. Nach dem Lebesgue'schen Konvergenzsatz liegt g in \mathcal{L}^1 .

- N.** Die Messbarkeit von $f \cdot g$ ist trivial (und wird schon im Buch erwähnt).

Sei $a(\mathbf{x}) := \inf_{q \in \mathbb{Q}_+} \left(\frac{1}{q} f(\mathbf{x}) + q \right)$. Dann ist a eine messbare Funktion. Ist \mathbf{x} ein fester Punkt, so gibt es eine Folge q_ν von nicht-negativen rationalen Zahlen, so dass $f(\mathbf{x})/q_\nu + q_\nu$ gegen $a(\mathbf{x})$ konvergiert. Die Folge (q_ν) ist beschränkt und besitzt daher eine Teilfolge (die wir wieder mit q_ν bezeichnen), die gegen eine

reelle Zahl q konvergiert. Es ist dann $q^2 - qa(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}) = 0$. Diese quadratische Gleichung hat nur eine Lösung, und es folgt: $a(\mathbf{x}) = 2\sqrt{f(\mathbf{x})}$. Somit ist \sqrt{f} messbar.

O. a) Mit g und f ist auch $f \cdot g$ messbar. Ist $|g| \leq C$, so ist $|fg| \leq C|f|$. Weil f integrierbar ist, ist auch fg integrierbar.

b) Sei f eine integrierbare Funktion auf \mathbb{R} .

1. Fall: Ist I ein beschränktes Intervall mit den Grenzen a und b und $f = \chi_I$, so ist

$$\left| \int f(x) \sin nx \, dx \right| = \left| \int_a^b \sin nx \, dx \right| = \left| \frac{\cos(na) - \cos(nb)}{n} \right|,$$

und dieser Ausdruck strebt für $n \rightarrow \infty$ gegen Null.

2. Fall: Ist f eine Treppenfunktion, so folgt die Behauptung trivial aus (1).

3. Fall: Ist $f \in \mathcal{L}^1$ und $\varepsilon > 0$, so gibt es eine Treppenfunktion h mit $\int |f - h| \, d\mu_1 < \varepsilon$. Dann ist

$$\begin{aligned} \left| \int f(x) \sin nx \, dx \right| &\leq \left| \int (f(x) - h(x)) \sin nx \, dx \right| + \left| \int h(x) \sin nx \, dx \right| \\ &\leq \int |f - h| \, d\mu_1 + \left| \int h(x) \sin nx \, dx \right| \\ &< \varepsilon + \varepsilon \text{ für } n \geq n_0. \end{aligned}$$

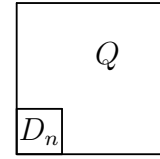
P. Sei $E_i := \{\mathbf{x} : 2^{i-1} < f(\mathbf{x}) \leq 2^i\}$ und $m_i := \mu_n(E_i)$, für $i \in \mathbb{Z}$. Definiere $\varphi_N := \sum_{i=-N}^N 2^i \chi_{E_i}$. Das sind messbare Funktionen, die fast überall monoton wachsend gegen eine messbare Funktion φ konvergieren. Offensichtlich ist $\varphi \geq f$.

a) Sei f integrierbar. Da $\varphi_N \leq 2f$ ist, ist

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} 2^i m_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \varphi_N \, d\mu_n \leq 2 \int f \, d\mu_n < \infty.$$

b) Sei umgekehrt $\sum_{i=-\infty}^{\infty} 2^i m_i < \infty$. Dann streben die Funktionen φ_N gegen die integrierbare Funktion φ . Weil f messbar und $0 \leq f \leq \varphi$ ist, ist f integrierbar.

Lösungen zu den Aufgaben in 2.6



A. Sei $\varphi_n(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{auf } D_n := [0, 1/n) \times [0, 1/n) \\ 1/(x+y) & \text{auf } Q \setminus D_n. \end{cases}$

$\varphi_n \geq 0$ ist messbar und auf Q durch n nach oben beschränkt, also integrierbar. Außerdem ist

$$\varphi_{n+1}(x, y) - \varphi_n(x, y) = \begin{cases} 1/(x+y) & \text{auf } D_n \setminus D_{n+1}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Also konvergiert die Folge (φ_n) monoton wachsend gegen f . Es ist

$$\begin{aligned} \int \varphi_n d\mu_2 &= \int_{Q \setminus D_n} \frac{1}{x+y} d\mu_2 \\ &= \int_0^{1/n} \left(\int_{1/n}^1 \frac{dy}{x+y} \right) dx + \int_{1/n}^1 \left(\int_0^1 \frac{dy}{x+y} \right) dx \\ &= \int_0^{1/n} \ln(x+y) \Big|_{y=1/n}^1 dx + \int_{1/n}^1 \ln(x+y) \Big|_{y=0}^1 dx \\ &= \int_0^1 \ln(x+1) dx - \int_0^{1/n} \ln(x+1/n) dx - \int_{1/n}^1 \ln x dx \\ &= \left((x+1) \ln(x+1) - x \right) \Big|_0^1 - \left((x+1/n) \ln(x+1/n) - x \right) \Big|_0^{1/n} \\ &\quad - (x \ln x - x) \Big|_{1/n}^1 \\ &= 2 \ln 2 - \frac{2}{n} \ln 2. \end{aligned}$$

Da die Integrale beschränkt bleiben, ist f integrierbar. Und dann ist

$$\int_Q f d\mu_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n d\mu_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 \ln 2 - \frac{2}{n} \ln 2 \right) = 2 \ln 2 = \ln 4.$$

B. Es ist

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy = \int_0^1 \left(\frac{-x}{x^2 + y^2} \Big|_{x=0}^1 \right) dy = -\arctan y \Big|_0^1 = -\pi/4$$

und

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx = \int_0^1 \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \Big|_{y=0}^1 \right) dx = \arctan x \Big|_0^1 = \pi/4.$$

Da die Integrale verschieden sind, kann f nicht integrierbar sein.

C. Es soll der Satz von Tonelli benutzt werden. Dazu berechnet man

$$\int \int |f(x, y)| dx dy = \int_{-1}^1 |y| \int_{-1}^1 \frac{|x|}{x^2 + y^2} dx dy.$$

Für $y \neq 0$ ist

$$\int_{-1}^1 \frac{|x|}{x^2 + y^2} dx = 2 \int_0^1 \frac{x}{x^2 + y^2} dx = \ln(x^2 + y^2) \Big|_{x=0}^1 = \ln(1 + y^2) - \ln(y^2).$$

Da $y \ln y$ nach l'Hospital für $y \rightarrow 0$ gegen Null konvergiert, existiert

$$\int_0^1 y \int_{-1}^1 \frac{|x|}{x^2 + y^2} dx dy.$$

Nach Tonelli ist f integrierbar.

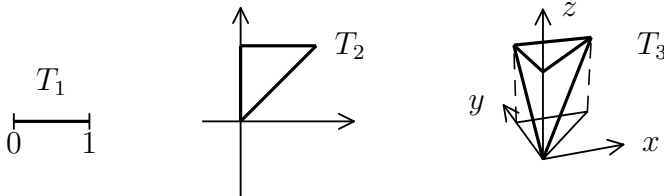
D. a) Sind I, J zwei Intervalle, so ist $\chi_I(x) \cdot \chi_J(y) = \chi_{I \times J}(x, y)$. Damit lässt sich sofort ableiten: Sind f und g Treppenfunktionen, so ist auch $h(x, y) = f(x)g(y)$ eine Treppenfunktion. Betrachtet man Grenzwerte von Folgen von Treppenfunktionen, so erhält man die entsprechende Aussage für messbare Funktionen.

b) Außerhalb der durch $x = y$ oder $x = 0$ gegebenen Nullmenge ist f auf dem \mathbb{R}^2 stetig, also messbar. Außerdem ist $f \geq 0$. Man kann also versuchen, Tonelli anzuwenden. Nun ist

$$\begin{aligned} \int \int f(x, y) dy dx &= \int_0^\infty \left(\int_x^\infty x^2 e^{-xy} dy \right) dx \\ &= \int_0^\infty \left(-x e^{-xy} \Big|_{y=x}^\infty \right) dx \\ &= \int_0^\infty x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_0^\infty = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Weil das iterierte Integral endlich ist, ist f integrierbar.

E. Man nennt T_n ein n -dimensionales *Simplex*:



a) Klar ist, dass $p_n(T_n) \subset T_{n-1}$ ist. Ist $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in T_{n-1}$, so ist $\hat{\mathbf{x}} := (x_1, \dots, x_{n-1}, x_{n-1}) \in T_n$ und $p_n(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{x}$. Also gilt sogar „=“.

b) Offensichtlich ist $\text{vol}_n(T_1) = 1$.

Eine echte Induktion braucht man garnicht. Es ist

$$\begin{aligned}
 \mu_n(T_n) &= \int_{T_{n-1}} \left(\int_{x_{n-1}}^1 dx_n \right) dx_1 \dots dx_{n-1} \\
 &= \int_{T_{n-1}} (1 - x_{n-1}) dx_{n-1} \dots dx_1 \\
 &= \int_{T_{n-2}} \left(\int_{x_{n-2}}^1 (1 - x_{n-1}) dx_{n-1} \right) dx_{n-2} \dots dx_1 \\
 &= \frac{1}{2} \int_{T_{n-2}} (1 - x_{n-2})^2 dx_{n-2} \dots dx_1 \\
 &\vdots \\
 &= \frac{1}{k!} \int_{T_{n-k}} (1 - x_{n-k})^k dx_{n-k} \dots dx_1 \\
 &\vdots \\
 &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 (1-x)^{n-1} dx \\
 &= -\frac{1}{n!} (1-x)^n \Big|_0^1 = \frac{1}{n!}.
 \end{aligned}$$

F. Es ist

$$\begin{aligned}
 \text{vol}_3(G) &= \int_Q \left(\int_0^{6-x^2-y^2} dz \right) d\mu_2 = \int_Q (6 - x^2 - y^2) d\mu_2 \\
 &= \int_{-1}^1 \int_{-2}^2 (6 - x^2 - y^2) dy dx \\
 &= \int_{-1}^1 \left(\frac{56}{3} - 4x^2 \right) dx = \frac{104}{3}.
 \end{aligned}$$

G. Druckfehler: Gemeint ist

$$G := \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0 \text{ und } 0 \leq z \leq 1 - x - y\}.$$

Das ist ein Normalbereich über $T := \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1 \text{ und } 0 \leq y \leq 1 - x\}$, und es gilt:

$$\begin{aligned}
 \text{vol}_3(G) &= \int_T \left(\int_0^{1-x-y} dz \right) d\mu_2 \\
 &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} dz dy dx \\
 &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y) dy dx = \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - x + \frac{x^2}{2} \right) dx = \frac{1}{6}.
 \end{aligned}$$

Ursprünglich sollte das Integral $\int_G \frac{1}{(x+y+z+1)^3} d\mu_3$ berechnet werden, das Ergebnis ist dann $= \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{5}{16}$.

H. Es ist

$$\begin{aligned} \int_M z d\mu_3 &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z dz dy dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1-x^2-y^2) dy dx \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 (1-x^2)^{3/2} dx \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^4 u du = \frac{\pi}{16}. \end{aligned}$$

I. Da $y \cdot e^{-(1+x^2)y^2} \geq 0$ auf $\{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$ und als (fast überall) stetige Funktion messbar ist, folgt die Integrierbarkeit und die Vertauschbarkeit der Integrale schon aus der Existenz eines iterierten Integrals.

Nun ist

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^\infty y e^{-(1+x^2)y^2} dy dx &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(-\frac{1}{1+x^2} e^{-(1+x^2)y^2} \right) \Big|_0^\infty dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \arctan(x) \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Mit der Substitution $u = xy$ erhält man für das andere iterierte Integral

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^\infty y e^{-(1+x^2)y^2} dx dy &= \int_0^\infty e^{-y^2} \int_0^\infty y e^{-(xy)^2} dx dy \\ &= \int_0^\infty e^{-y^2} \int_0^\infty e^{-u^2} du dy \\ &= \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx \right)^2. \end{aligned}$$

Da die beiden Integrale gleich sind, folgt: $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

J. Sei a gegeben, $A := \{\mathbf{x} : f(\mathbf{x}) \geq a\}$. Dann ist $A \times [0, a] \subset \{(\mathbf{x}, t) \in A \times \mathbb{R} : 0 \leq f(\mathbf{x}) \leq t\} = M^f \cap (A \times \mathbb{R})$.

Also ist $\int f d\mu_n \geq \int_A f d\mu_n = \mu_{n+1}(M^f \cap (A \times \mathbb{R})) \geq \mu_{n+1}(A \times [0, a]) = a \cdot \mu_n(A)$.

Lösungen zu den Aufgaben in 3.1

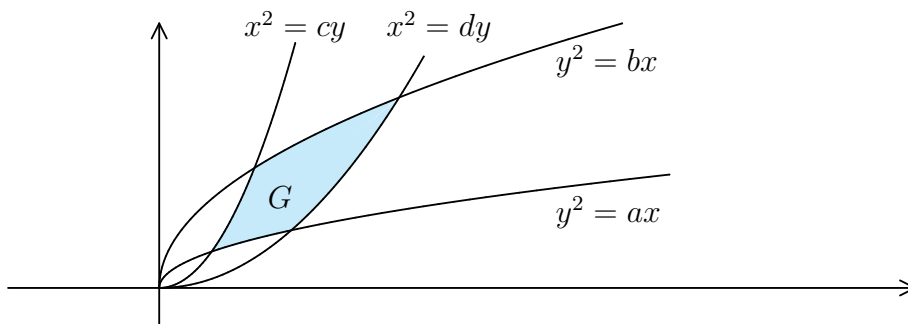
A. Es ist

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2(x^2 + y^2)^2 dy dx &= \int_0^\pi \int_0^1 (r^2 \cos^2 t) r^5 dr dt \\ &= \int_0^\pi \left(\frac{r^8}{8} \Big|_0^1 \cos^2 t \right) dt \\ &= \frac{1}{16} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^\pi = \frac{\pi}{16}. \end{aligned}$$

B. P ist das Parallelogramm mit den Ecken $(0, 0)$, $(2, 2)$, $(3, 4)$ und $(1, 2)$. Die Transformation $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $(x, y) = T(u, v) = (u - v, 2u - v)$ bildet $P^* := [0, 1] \times [-2, 0]$ diffeomorph auf P ab (mit $(0, 0) \mapsto (0, 0)$, $(0, -2) \mapsto (2, 2)$, $(1, -2) \mapsto (3, 4)$ und $(1, 0) \mapsto (1, 2)$). Dabei wird T durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ beschrieben, mit $\det A = 1$. Daher ist

$$\begin{aligned} \int_P xy d\mu_2 &= \int_{P^*} (u - v)(2u - v) d\mu_2 \\ &= \int_{-2}^0 \int_0^1 (2u^2 + v^2 - 3uv) du dv \\ &= \int_{-2}^0 \left(\frac{2}{3} + v^2 - \frac{3}{2}v \right) dv = 7. \end{aligned}$$

C. Das Gebiet sieht etwa folgendermaßen aus:

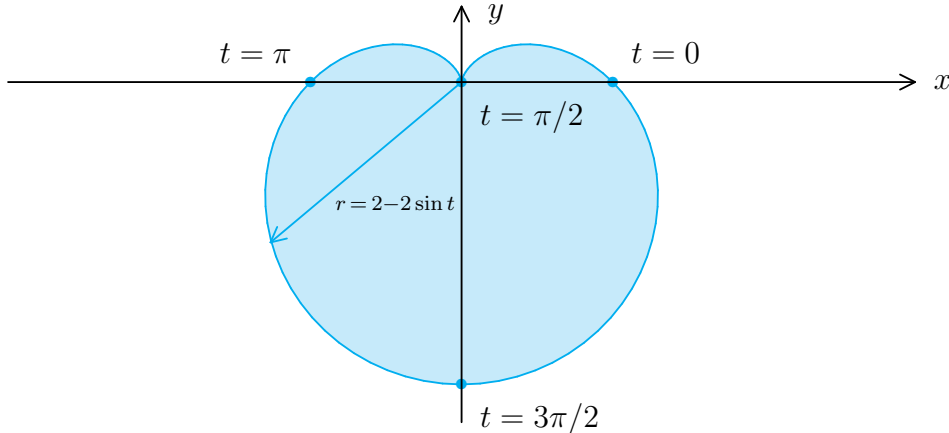


Wir definieren einen Diffeomorphismus Φ durch $(u, v) = \Phi^{-1}(x, y) := (y^2/x, x^2/y)$. Das geht in der Nähe von G , weil dort $x > 0$ und $y > 0$ ist. Es folgt, dass $\Phi(u, v) = (\sqrt[3]{uv^2}, \sqrt[3]{u^2v})$ und $\Phi((a, b) \times (c, d)) = G$ ist (denn wenn $ax < y^2 < bx$ und $cy < x^2 < dy$ ist, ist $\Phi^{-1}(x, y) \in (a, b) \times (c, d)$).

Nun ist $\det J_\Phi(u, v) = -1/3 = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{3}u^{-2/3}v^{2/3} & \frac{2}{3}u^{1/3}v^{-1/3} \\ \frac{2}{3}u^{-1/3}v^{1/3} & \frac{1}{3}u^{2/3}v^{-2/3} \end{pmatrix} = -1/3$ in $(a, b) \times (c, d)$, also

$$\mu_2(G) = \int_G d\mu_2 = \int_a^b \int_c^d \frac{1}{3} dv du = \frac{1}{3}(d-c)(b-a).$$

- D. Setzt man $r(t) := 2 - 2 \sin t$, so ist $\alpha(t) = (r(t) \cos t, r(t) \sin t)$. Das ist die Beschreibung der Kurve in Polarkoordinaten.



Die gesuchte Fläche ist

$$\begin{aligned} \mu_2(G) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2-2\sin t} r dr dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^2}{2} \Big|_{r=0}^{2-2\sin t} \right) dt \\ &= 2 \int_0^{2\pi} (1 - \sin t)^2 dt = 6\pi. \end{aligned}$$

- E. Sei $\mathbf{F}(x, y, z) := (ax, by, cz)$. Wir können annehmen, dass $a, b, c > 0$ ist. Dann ist $\det J_{\mathbf{F}}(x, y, z) = abc > 0$. Außerdem ist $\mathbf{F}(B_1(\mathbf{0})) = E$ und daher

$$\begin{aligned} \mu_3(E) &= \int_E d\mu_3 = \int_{B_1(\mathbf{0})} abc d\mu_3 \\ &= \frac{4\pi}{3} abc. \end{aligned}$$

- F. Das Volumen des Rotationsparaboloids (ohne Bohrung)

$$R = \{(x, y, z) : 0 \leq x^2 + y^2 \leq \sqrt{1-z}, z \in [0, 1]\}$$

ist nach der Formel für Rotationskörper gegeben durch

$$\text{vol}_3(R) = \pi \int_0^1 (1-z) dz = \frac{\pi}{2}.$$

Wir berechnen nun das Volumen des herausgefrästen Teils. Dazu parametrisieren wir die Kreisscheibe

$$L := \{(x, y) : (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}\}$$

durch $\mathbf{F} : Q := [0, 1/2] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, mit

$$(x, y) = \mathbf{F}(r, \varphi) := (1/2 + r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)).$$

Dann ist $J_{\mathbf{F}}(r, \varphi) = r$, und es gilt:

$$\begin{aligned} \text{vol}_3(Z) &= \int_L (1 - x^2 - y^2) d\mu_2 = \int_Q \left[1 - \left(\frac{1}{2} + r \cos(\varphi)\right)^2 - (r \sin(\varphi))^2 \right] \cdot r d\varphi dr \\ &= \int_0^{1/2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{4}r - r^2 \cos(\varphi) - r^3 \right) d\varphi dr = 2\pi \int_0^{1/2} \left(\frac{3}{4}r - r^3 \right) dr \\ &= 2\pi \left(\frac{3r^2}{8} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^{1/2} = \frac{5}{32}\pi. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für das Restvolumen:

$$\text{vol}_3(R \setminus Z) = \text{vol}_3(R) - \text{vol}_3(Z) = \frac{\pi}{2} - \frac{5}{32}\pi = \frac{11}{32}\pi.$$

- G.** Wegen der Translationsinvarianz des Integrals können wir das Tetraeder so verschieben, dass eine Ecke im Nullpunkt liegt. Das erledigt die Translation $\mathbf{F} : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 - 1, x_2 - 1, x_3 - 1)$. Das durch die Punkte

$$\mathbf{0} = (0, 0, 0), \mathbf{b}_1 = (1, 1, 2) \mathbf{b}_2 = (2, 0, -1) \text{ und } \mathbf{b}_3 = (3, 1, 2)$$

gegebene Tetraeder

$$T = \left\{ \mathbf{x} : \mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \mathbf{b}_i, \sum_{i=1}^3 \alpha_i \leq 1, \alpha_i \geq 0 \right\}$$

hat das gleiche Volumen wie das Ausgangstetraeder.

Die Menge $\mathcal{B} = \{(1, 1, 2), (2, 0, -1), (3, 1, 2)\}$ ist eine Basis des \mathbb{R}^3 , die Matrix des Basiswechsels von \mathcal{B} zur Standardbasis ist damit gegeben durch

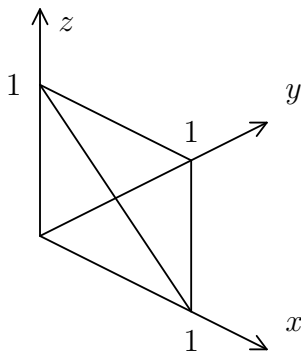
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Es ist $\det(B) = 4 - 3 + 1 - 4 = -2$.

Die lineare Abbildung \mathbf{L} , die durch B gegeben ist, bildet das sogenannte „Einheitssimplex“

$$\begin{aligned} S &:= \left\{ \mathbf{x} : \mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{e}_i, \sum_{i=1}^3 \lambda_i \leq 1, \lambda_i \geq 0 \right\} \\ &= \{(x, y, z) : x, y, z \geq 0 \text{ und } x + y + z \leq 1\} \end{aligned}$$

bijektiv auf das Tetraeder T ab.



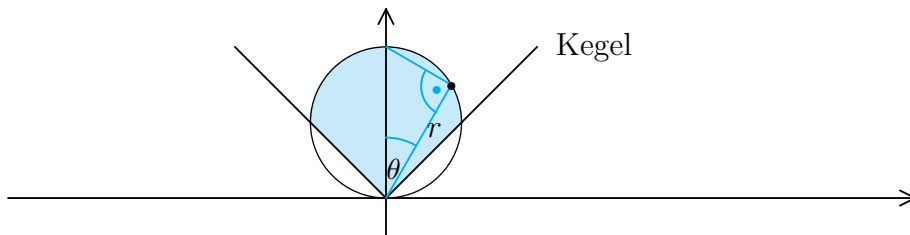
Das Volumen des Einheitssimplex ist nach der Formel für Kegel

$$= \text{vol}_3(S) = \frac{1}{3} \cdot \text{vol}_2(\text{Grundfläche}) \cdot \text{Höhe} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6},$$

und die Funktionaldeterminante von \mathbf{L} ist $J_{\mathbf{L}}(\mathbf{x}) = \det B = -2$. Damit erhalten wir mit der Transformationsformel:

$$\begin{aligned} \text{vol}_3(T) &= \int_T d\mu_3 = \int_{\mathbf{L}(S)} d\mu_3 = \int_S |\det \mathbf{L}| d\mu_3 \\ &= |\det B| \cdot \int_S d\mu_3 = 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

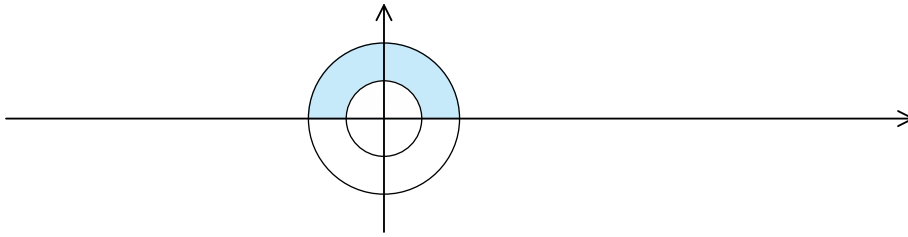
H. Man benutze Kugelkoordinaten r, φ, θ , wobei θ der Winkel gegen die z -Achse ist.



Der Radius läuft jeweils zwischen 0 und $2 \cos \theta$. Das liefert

$$\begin{aligned} \text{vol}_3(V) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{2 \cos \theta} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\ &= \frac{16\pi}{3} \int_0^{\pi/4} \cos^3 \theta \sin \theta d\theta \\ &= -\frac{16\pi}{3} \int_1^{1/\sqrt{2}} x^3 dx = \pi. \end{aligned}$$

I. Es werden Polarkoordinaten verwendet.



$$\begin{aligned}
 \int_G e^{x^2+y^2} d\mu_2 &= \int_0^\pi \int_1^2 e^{r^2} r dr d\varphi \\
 &= \frac{\pi}{2} \int_1^4 e^u du \\
 &= \frac{\pi}{2}(e^4 - e).
 \end{aligned}$$

J. Man berechne zunächst

$$\begin{aligned}
 \int_{D_1 \setminus D_\varepsilon} -\ln(x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_\varepsilon^1 (-\ln r^2) r dr d\varphi \\
 &= -\pi \int_{\varepsilon^2}^1 \ln u du = -\pi(u \ln u - u) \Big|_{\varepsilon^2}^1 \\
 &= \pi + \pi(\varepsilon^2 \ln(\varepsilon^2) - \varepsilon^2).
 \end{aligned}$$

Dieser Wert strebt für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen π .

Lösungen zu den Aufgaben in 3.2

A. a) Parametrisierung des Randes:

$$\begin{aligned}
 \alpha(t) &:= (t, 0), \text{ für } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \\
 \beta(t) &:= \left(\frac{\pi}{2}, t\right), \text{ für } 0 \leq t \leq 1, \\
 \gamma(t) &:= \left(\frac{\pi}{2}(1-t), 1-t\right), \text{ für } 0 \leq t \leq 1.
 \end{aligned}$$

Dann ist $\alpha + \beta + \gamma = \partial\Delta$. Setzen wir $f(x, y) := y - \sin x$ und $g(x, y) := \cos x$, so ist

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha} f dx + g dy &= \int_0^{\pi/2} f(\alpha(t))\alpha'_1(t) dt + \int_0^{\pi/2} g(\alpha(t))\alpha'_2(t) dt \\
&= -\int_0^{\pi/2} \sin t dt = -1, \\
\int_{\beta} f dx + g dy &= \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) dt = 0, \\
\int_{\gamma} f dx + g dy &= \int_0^1 \left([1-t - \sin(\frac{\pi}{2}(1-t))](-\frac{\pi}{2}) + \cos(\frac{\pi}{2}(1-t))(-1) \right) dt \\
&= -\frac{\pi}{4} + 1 - \frac{2}{\pi}.
\end{aligned}$$

Zusammen ergibt das: $\int_{\partial\Delta} f dx + g dy = -\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}$.

b) Nach Green ist

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Delta} f dx + g dy &= \int_{\Delta} (g_x - f_y) dx dy \\
&= \int_0^1 \left(\int_{(\pi/2)y}^{\pi/2} (-\sin x - 1) dx \right) dy \\
&= \int_0^1 (\cos x - x) \Big|_{x=(\pi/2)y}^{\pi/2} dy \\
&= \left(\frac{\pi}{4}y^2 - \frac{\pi}{2}y - \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}y\right) \right) \Big|_{y=0}^1 \\
&= -\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}.
\end{aligned}$$

Das Ergebnis muss natürlich mit dem von (a) übereinstimmen.

B. a) Es ist $\text{vol}_2(G) = \frac{1}{2} \int_{\partial G} (x dy - y dx)$.

Der Rand von G setzt sich aus den beiden parametrisierten Kurven

$$\begin{aligned}
\alpha(t) &:= (t, t^3) \quad (\text{für } 0 \leq t \leq 1) \\
\text{und } \beta(t) &:= (1-t, 1-t) \quad (\text{für } 0 \leq t \leq 1)
\end{aligned}$$

zusammen. Es ist

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha} (x dy - y dx) &= \int_{\alpha} (-y, x) \cdot d\mathbf{x} \\
&= \int_0^1 2t^3 dt = \frac{1}{2}t^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

und

$$\int_{\beta} (x dy - y dx) = \int_0^1 (t - 1, 1 - t) \cdot (-1, -1) dt = 0.$$

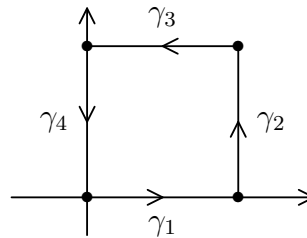
Also ist $\text{vol}_2(G) = 1/4$.

b) Da G auch ein Normalgebiet ist, folgt:

$$\begin{aligned} \text{vol}_2(G) &= \int_0^1 \int_{x^3}^x dy dx = \int_0^1 y \Big|_{y=x^3}^x dx \\ &= \int_0^1 (x - x^3) dx = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

C. B ist ein Greenscher Bereich, dessen Rand C durch die folgende Parametrisierung beschrieben wird:

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= (t, 0), & 0 \leq t \leq 2 \\ \gamma_2(t) &= (2, t - 2), & 2 \leq t \leq 4 \\ \gamma_3(t) &= (6 - t, 2), & 4 \leq t \leq 6 \\ \gamma_4(t) &= (0, 8 - t), & 6 \leq t \leq 8. \end{aligned}$$



Es sei $\mathbf{F}(x, y) = (P, Q) = (y^2, x)$, dann ist

$$\begin{aligned} \int_C (y^2 dx + x dy) &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} \\ &= \sum_{i=1}^4 \int_{\gamma_i} \mathbf{F}(\gamma_i(t)) \cdot \gamma_i'(t) dt \\ &= \int_0^2 (0, t) \cdot (1, 0) dt + \int_2^4 ((t - 2)^2, 2) \cdot (0, 1) dt \\ &\quad + \int_4^6 (4, 6 - t) \cdot (-1, 0) dt + \int_6^8 ((8 - t)^2, 0) \cdot (0, -1) dt \\ &= \int_2^4 2 dt + \int_4^6 (-4) dt = -4. \end{aligned}$$

Mit dem Greenschen Integralsatz lässt sich das Integral ebenfalls berechnen, denn es ist

$$\begin{aligned} \int_C (y^2 dx + x dy) &= \int_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\mu_2 \\ &= \int_0^2 \int_0^2 (1 - 2y) dx dy \\ &= \int_0^2 \int_0^2 (1 - 2y) dy dx \\ &= \int_0^2 (2 - 4) dx = -4. \end{aligned}$$

- D. Sei $M := 7y - e^{\sin x}$ und $N := 15x - \sin(y^3 + 8y)$, sowie D das berandete Gebiet. Nach Green ist

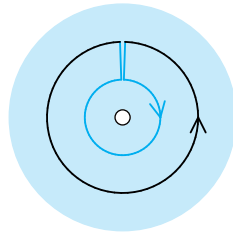
$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} &= \int_C M dx + N dy \\ &= \int_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) d\mu_2 = \int_D (15 - 7) d\mu_2 \\ &= 8 \int_D d\mu_2 = 72\pi. \end{aligned}$$

- E. $C = \partial P$ besteht aus zwei Strecken und einem Parabelstück. Nach Green ist

$$\int_C (x^2 + y^3) dx + 3xy^2 dy = \int_R (3y^2 - 3y^2) d\mu_2 = 0.$$

- F. C berandet ein Teilgebiet $B \subset D_2(\mathbf{0})$. Liegt der Nullpunkt nicht in B , so kann man Green anwenden und erhält als Wert des Integrals die Null.

Liegt der Nullpunkt in B , so kann man ihn umgehen, z.B. wie im folgenden Fall:



Es bleibt dann der Wert des Integrals über einen kleinen Kreis um den Nullpunkt (im Uhrzeigersinn).

- G. Sei $\mathbf{N} := (\alpha'_2, -\alpha'_1)$ und $\mathbf{n} := \mathbf{N}/\|\mathbf{N}\|$. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_G \Delta f d\mu_2 &= \int_G ((f_x)_x - (-f_y)_y) d\mu_2 = \int_{\partial G} (-f_y dx + f_x dy) \\ &= \int_a^b \left(-(f_y \circ \boldsymbol{\alpha}(t))\alpha'_1(t) + (f_x \circ \boldsymbol{\alpha}(t))\alpha'_2(t) \right) dt \\ &= \int_a^b (f_x \circ \boldsymbol{\alpha}(t), f_y \circ \boldsymbol{\alpha}(t)) \cdot \mathbf{N} \circ \boldsymbol{\alpha}(t) dt \\ &= \int_a^b (\nabla f \cdot \mathbf{N}) \circ \boldsymbol{\alpha}(t) dt \\ &= \int_a^b (\nabla_{\mathbf{n}} f) \circ \boldsymbol{\alpha}(t) \|\boldsymbol{\alpha}'(t)\| dt = \int_{\partial G} \nabla_{\mathbf{n}} f ds. \end{aligned}$$

Lösungen zu den Aufgaben in 3.3

- A. Sei $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 \text{ und } z = y^2\}$. Das ist ein Graph, den man am besten durch $\varphi(u, v) := (u, v, v^2)$ parametrisiert (über der Menge aller $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ mit $u^2 + v^2 \leq 1$). Es ist $bS = C$ und $\varphi_u \times \varphi_v = (1, 0, 0) \times (0, 1, 2v) = (0, -2v, 1)$. Mit Stokes folgt nun:

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} &= \int_S \mathbf{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O} = \int_S (0, y, -z) \cdot d\mathbf{O} \\ &= \int_{u^2+v^2 \leq 1} (0, v, -v^2) \cdot (0, -2v, 1) \, du \, dv \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (-3(r \sin \theta)^2 r) \, dr \, d\theta \\ &= -3 \left(\int_0^1 r^3 \, dr \right) \left(\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \, d\theta \right) \\ &= -\frac{3}{8} \left(\theta - \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= -\frac{3\pi}{4}. \end{aligned}$$

B.

$$\begin{aligned} \text{Es ist } bS &= \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1 \text{ und } z = 1\} \\ &= \{(\cos t, \sin t, 1) : t \in [0, 2\pi]\}, \end{aligned}$$

parametrisiert durch $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 1)$.

Das Flächenstück S wird parametrisiert durch $\varphi : \{u^2 + v^2 \leq 1\} \rightarrow \mathbb{R}^3$, mit

$$\varphi(u, v) := (u, v, 2 - u^2 - v^2).$$

Flächennormale ist $\varphi_u \times \varphi_v = (1, 0, -2u) \times (0, 1, -2v) = (2u, 2v, 1)$. Außerdem ist $\mathbf{F}(x, y, z) = (2, x, y^2)$ und $\mathbf{rot} \mathbf{F}(x, y, z) = (2y, 0, 1)$.

Das Randintegral:

$$\begin{aligned} \int_{bS} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} (2, \cos t, (\sin t)^2) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-2 \sin t + \cos^2 t) \, dt \\ &= \left(2 \cos t + \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin(2t) \right) \right) \Big|_0^{2\pi} = \pi. \end{aligned}$$

Das Flächenintegral (muss nach Stokes das Gleiche ergeben):

$$\begin{aligned}
\int_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O} &= \int_{u^2+v^2 \leq 1} (2v, 0, 1) \cdot (2u, 2v, 1) \, du \, dv \\
&= \int_{u^2+v^2 \leq 1} (4uv + 1) \, du \, dv \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (4r^2 \cos \theta \sin \theta + 1)r \, dr \, d\theta \\
&= 4 \left(\int_0^1 r^3 \, dr \right) \left(\int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta \, d\theta \right) + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \\
&= -\frac{1}{4} \cos(2\theta) \Big|_0^{2\pi} + \pi = \pi.
\end{aligned}$$

C. Parametrisierung $\varphi(u, v) = (u, v, v^2 - 4u)$. Dann ist

$$J_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -4 & 2v \end{pmatrix}, \quad J_\varphi^\top \cdot J_\varphi = \begin{pmatrix} 17 & -8v \\ -8v & 1 + 4v^2 \end{pmatrix}$$

und $G_\varphi = \det(J_\varphi^\top \cdot J_\varphi) = 17 + 4v^2$, also

$$\begin{aligned}
A(S) &= \int_\delta \sqrt{17 + 4v^2} \, du \, dv = \int_0^2 \int_0^v \sqrt{17 + 4v^2} \, du \, dv \\
&= \int_0^2 v \sqrt{17 + 4v^2} \, dv = \frac{1}{8} \int_{17}^{33} \sqrt{y} \, dy \\
&= \frac{1}{12} y^{3/2} \Big|_{17}^{33} = \frac{1}{12} (33^{3/2} - 17^{3/2}) \approx 9.956.
\end{aligned}$$

D. a) Es ist $h = R(1 - \cos \beta)$.

b) Es ist

$$\begin{aligned}
\varphi_u(u, v) &= (R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, -R \sin u), \\
\varphi_v(u, v) &= (-R \sin u \sin v, R \sin u \cos v, 0), \\
\varphi_u(u, v) \times \varphi_v(u, v) &= (R^2 \sin^2 u \cos v, R^2 \sin^2 u \sin v, R^2 \sin u \cos u) \\
\text{und } \|\varphi_u(u, v) \times \varphi_v(u, v)\| &= R^2 \sin u,
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
A(S) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\beta R^2 \sin u \, du \, dv \\
&= 2\pi R^2 - \cos u \Big|_0^\beta = 2\pi R^2 (1 - \cos \beta) = 2\pi R h.
\end{aligned}$$

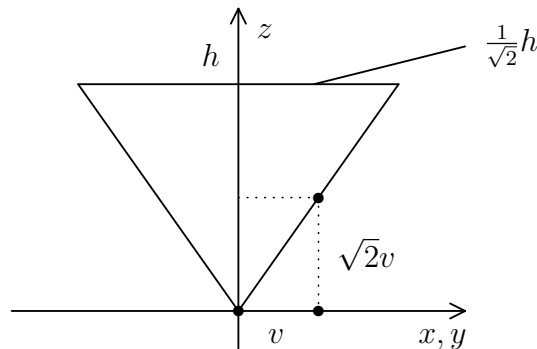
c) Ist $\beta \leq \pi/2$ und $0 \leq u \leq \beta$, so zeigt $\varphi_u \times \varphi_v$ nach oben (und damit nach außen). Der Fluss von \mathbf{F} durch S ergibt damit

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\beta \mathbf{F}(\varphi(u, v)) \cdot (\varphi_u(u, v) \times \varphi_v(u, v)) \, du \, dv \\ &= R^3 \int_0^{2\pi} \int_0^\beta \sin^2 u \cos u \, du \, dv \\ &= 2\pi R^3 \int_0^{\sin \beta} x^2 \, dx = \frac{2}{3} R^3 \pi \sin^3 \beta. \end{aligned}$$

Ist $0 < \beta \leq \pi$, so zeigt $\varphi_u \times \varphi_v$ nach unten und damit auch in diesem Falle nach außen. Die Formel bleibt dafür also richtig. Ist $h = 2R$, so ist $\beta = \pi$ und der Fluss = 0.

E. Sei $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq h \text{ und } x^2 + y^2 = z^2/2\}$.

Im Querschnitt sieht der Kegel folgendermaßen aus:



Wir können M als den Graphen der Funktion $f(x, y) := \sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2}$ über der Kreisscheibe $D := \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}h^2\}$ auffassen. Wenn wir D durch ebene Polarkoordinaten $\mathbf{F}(u, v) := (v \cos u, v \sin u)$ parametrisieren, erhalten wir auch eine Parametrisierung von M :

$$\varphi : Q := [0, 2\pi] \times [0, \frac{h}{\sqrt{2}}] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, \sqrt{2}v).$$

Es ist $\varphi'(u, v) = \begin{pmatrix} -v \sin u & \cos u \\ v \cos u & \sin u \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$, also $\text{rg } \varphi'(u, v) \neq 0$, für $v \neq 0$. Auf

dem Inneren von Q ist φ injektiv. Dabei wird die untere Seite von Q auf die Spitze $(0, 0, 0)$ abgebildet, die obere Seite von Q auf das reguläre Randstück $\{(x, y, h) : x^2 + y^2 = \frac{1}{2}h^2\}$, und die anderen beiden Seiten von Q werden zu der Kante $\{(t, 0, \sqrt{2}t) : 0 \leq t \leq \frac{h}{\sqrt{2}}\}$ zusammengeklebt. Die Tangentialvektoren an M sind

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) = (-v \sin u, v \cos u, 0) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) = (\cos u, \sin u, \sqrt{2}).$$

Daraus ergibt sich der Normalenvektor

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) = (\sqrt{2}v \cos u, \sqrt{2}v \sin u, -v)$$

der Länge $\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\| = \sqrt{3}v$. Der Flächeninhalt von M ist

$$\begin{aligned} A(M) &= \int_Q \sqrt{3}v \, du \, dv = \sqrt{3} \int_0^{h/\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} v \, du \, dv \\ &= 2\pi\sqrt{3} \int_0^{h/\sqrt{2}} v \, dv = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi h^2. \end{aligned}$$

Die Länge der Mantellinie s des geraden Kreiskegels mit Radius r berechnet sich mit dem Satz von Pythagoras zu $s = \sqrt{h^2 + r^2}$. In diesem Fall ist $r = \frac{h}{\sqrt{2}}$, also $s = \sqrt{\frac{3}{2}}h$. Das Ergebnis entspricht somit der aus der Schule bekannten Formel für die Mantelfläche $A(M) = \pi \cdot r \cdot s$.

F. Sei $M := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ und } -\sqrt{2}/2 \leq z \leq \sqrt{2}/2\}$. Die Einheitssphäre $\partial B_1(\mathbf{0})$ wird durch

$$\psi : [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \psi(u, v) = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v)$$

parametrisiert. Es gilt $-\sqrt{2}/2 \leq z = \sin(v) \leq \sqrt{2}/2$ und $v \in [-\pi/2, \pi/2]$ genau dann, wenn $-\pi/4 \leq v \leq \pi/4$ ist. Damit erhalten wir direkt eine Darstellung von M als parametrisiertes Flächenstück:

$$\varphi : [0, 2\pi] \times [-\pi/4, \pi/4] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi(u, v) = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v).$$

Dabei wird die untere Seite ∂Q_u von $Q := [0, 2\pi] \times [-\pi/4, \pi/4]$ auf das reguläre Randstück

$$\{(x, y, \sqrt{2}/2) : x^2 + y^2 + 1/2 = 1\}$$

und die obere Seite ∂Q_o auf das reguläre Randstück

$$\{(x, y, -\sqrt{2}/2) : x^2 + y^2 + 1/2 = 1\}$$

abgebildet. Die anderen beiden Seiten werden zu der Kante

$$\{(x, 0, z) : x^2 + z^2 = 1 \text{ und } -\sqrt{2}/2 \leq z \leq \sqrt{2}/2\}$$

verklebt. Die Tangentialvektoren an M sind

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) = (-\sin u \cos v, \cos u \cos v, 0)$$

und

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) = (-\cos u \sin v, -\sin u \sin v, \cos v),$$

und die Flächennormale zu M ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) = (\cos u \cos^2 v, \sin u \sin^2 v, \cos v \sin v).$$

Damit ist die Länge des Normalenvektors $\|\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v)\| = \cos v$ und der Flächeninhalt von M ist gegeben durch

$$\begin{aligned} A(M) &= \int_Q \cos v \, du \, dv = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{2\pi} \cos v \, du \, dv \\ &= 2\pi \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos v \, dv = 2\pi(\sin(\pi/4) - \sin(-\pi/4)) = 2\pi\sqrt{2}. \end{aligned}$$

G. $P = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = z \text{ und } 0 \leq z \leq 1\}$ ist Graph der Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ über der Kreisscheibe $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Wir parametrisieren D durch

$$\mathbf{F} : [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{F}(u, v) = (v \cos u, v \sin u),$$

dann ist $f \circ \mathbf{F}(u, v) = v^2$. Daraus erhält man als Parametrisierung für P :

$$\varphi : [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

mit

$$\varphi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, v^2).$$

Die Tangentialvektoren an P sind

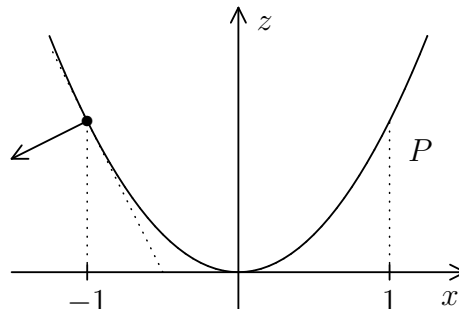
$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) = (-v \sin u, v \cos u, 0) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) = (\cos u, \sin u, 2v),$$

und die Flächennormale im Punkt $\varphi(u, v)$ ist gegeben durch

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) = (2v^2 \cos u, 2v^2 \sin u, -v).$$

Speziell ist $\varphi(\pi, v) = (-v, 0, v^2)$, und es ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(\pi, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(\pi, v) = (-2v^2, 0, -v).$$



Das ergibt einen nach „außen“ weisenden Vektor, und da das Einheitsnormalenfeld stetig ist und nirgends verschwindet, erhält man in jedem Punkt einen nach „außen“ weisenden Vektor.

Sei $\mathbf{F}(x, y, z) := (y, -x, z^2)$. Dann ist $\mathbf{F}(\varphi(u, v)) = (v \sin u, -v \cos u, v^4)$ und

$$\mathbf{F}(\varphi(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right) = -v^5.$$

Für das Flächenintegral erhält man damit

$$\begin{aligned} \int_P \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O} &= \int_Q -v^5 \, du \, dv \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} -v^5 \, du \, dv = -\frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Man könnte das Paraboloid P z.B. auch durch

$$\psi : [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \psi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2)$$

parametrisieren. Dabei würde man aber eine nach „innen“ weisende Flächennormale bekommen. Mit der orientierungsumkehrenden Parametertransformation

$$\Phi : [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 2\pi], \quad \Phi(u, v) := (v, u),$$

erhält man dann die obige Parametrisierung $\varphi = \psi \circ \Phi$.

H. Sei $E := \{(x, y, z) : x + y + z = 1\}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} S &:= E \cap Z = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1 \text{ und } z = 1 - x - y\} \\ \text{und } C &:= E \cap \partial Z = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1 \text{ und } z = 1 - x - y\}. \end{aligned}$$

Die direkte Berechnung der Zirkulation von \mathbf{V} entlang C wird sehr kompliziert. Mit Hilfe des Satzes von Stokes können wir aber schreiben:

$$\int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{x} = \int_S \mathbf{rot} \, \mathbf{V} \cdot d\mathbf{O}.$$

S ist der Graph der Funktion $f(x, y) = 1 - x - y$ über der Kreisscheibe $D := \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Die Parametrisierung

$$\alpha : [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow D \subset \mathbb{R}^2, \quad \alpha(u, v) = (u \cos v, u \sin v),$$

der Kreisscheibe liefert die Parametrisierung

$$\varphi : [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, 1 - u(\cos v + \sin v)),$$

von S . Die Tangentialvektoren und die Flächennormale an S sind

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) &= (\cos v, \sin v, -(\cos v + \sin v)), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) &= (-u \sin v, u \cos v, u(\sin v - \cos v)) \quad \text{und} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) &= (u, u, u) = u \cdot (1, 1, 1).\end{aligned}$$

Es ist $\mathbf{rot V}(x, y, z) = (0, 0, 3(x^2 + y^2))$, also

$$\mathbf{rot V}(\varphi(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right) = (0, 0, 3u^2) \cdot u(1, 1, 1) = 3u^2.$$

Wir erhalten für die Zirkulation von \mathbf{V} entlang C :

$$\begin{aligned}\int_S \mathbf{rot V} \cdot d\mathbf{O} &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \mathbf{rot V}(\varphi(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right) dv du \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} 3u^2 dv du = \frac{3}{2}\pi.\end{aligned}$$

- I. (x, y, z) liegt genau dann im Bild von φ , wenn $\sqrt{x^2 + y^2} = f(z)$ ist. Also ist S die Mantelfläche eines Rotationskörpers. Es ist

$$\varphi_u(u, v) \times \varphi_v(u, v) = (-f(u) \cos v, -f(u) \sin v, f'(u)f(u)),$$

also

$$\|\varphi_u \times \varphi_v\| = f(u)\sqrt{1 + f'(u)^2}$$

und

$$A(S) = \int_a^b \int_0^{2\pi} f(u)\sqrt{1 + f'(u)^2} dv du = 2\pi \int_a^b f(u)\sqrt{1 + f'(u)^2} du.$$

Genauer kann man den Flächeninhalt nicht berechnen, solange f nicht näher bekannt ist.

- J. Die Parametrisierung der Oberfläche des Torus T wird durch $\varphi : [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\varphi(u, v) = ((R - r \cos v) \cos u, (R - r \cos v) \sin u, r \sin v)$$

gegeben.

Die Tangentialvektoren an T sind

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) = (-(R - r \cos v) \sin u, (R - r \cos v) \cos u, 0)$$

und

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) = (r \sin v \cos u, r \sin v \sin u, r \cos v).$$

Die Flächennormale ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) = r(R - r \cos v) \cdot (\cos u \cos v, \sin u \cos v, -\sin v),$$

also $\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\| = r(R - r \cos v)$.

Damit ergibt sich für den Flächeninhalt des Torus T :

$$\begin{aligned} A(T) &= \int_Q r(R - r \cos v) \, du \, dv = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} r(R - r \cos v) \, du \, dv \\ &= 2\pi r \int_{-\pi}^{\pi} (R - r \cos v) \, dv = 4\pi^2 r R. \end{aligned}$$

Lösungen zu den Aufgaben in 3.4

A. Zunächst (b). Mit dem Satz von Gauß geht's einfacher:

$$\begin{aligned} \int_{\partial G} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O} &= \int_G (\operatorname{div} \mathbf{F}) \, d\mu_3 = \int_G 2z \, d\mu_3 \\ &= \int_{x^2+y^2 \leq 4} \left(\int_0^5 2z \, dz \right) \, dx \, dy \\ &= \int_{x^2+y^2 \leq 4} 25 \, dx \, dy = 100\pi. \end{aligned}$$

a) Für die direkte Berechnung parametrisiert man den Zylindermantel

$$S_m = \{(2 \cos u, 2 \sin u, v) : 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 5\},$$

mit Normalenfeld $\mathbf{N}_m = (-2 \sin u, 2 \cos u, 0) \times (0, 0, 1) = (2 \cos u, 2 \sin u, 0)$,
den Boden

$$S_u = \{(u, v, 0) : u^2 + v^2 \leq 4\}, \text{ mit Normalenfeld } \mathbf{N}_u = (0, 0, -1),$$

und den Deckel

$$S_o = \{(u, v, 5) : u^2 + v^2 \leq 4\}, \text{ mit Normalenfeld } \mathbf{N}_o = (0, 0, 1).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \int_{S_u} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O} &= \int_{u^2+v^2 \leq 4} (v^2, u^2, 0) \cdot (0, 0, -1) \, du \, dv = 0, \\ \int_{S_o} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O} &= \int_{u^2+v^2 \leq 4} (v^2, u^2, 25) \cdot (0, 0, 1) \, du \, dv = 100\pi \\ \text{und } \int_{S_m} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O} &= \int_0^5 \int_0^{2\pi} (4 \sin^2 u, 4 \cos^2 u, v^2) \cdot (2 \cos u, 2 \sin u, 0) \, du \, dv \\ &= 8 \int_0^5 \int_0^{2\pi} (\sin^2 u \cos u + \cos^2 u \sin u) \, du \, dv \\ &= \frac{8}{3} \int_0^5 (\sin^3 u - \cos^3 u) \Big|_0^{2\pi} \, dv = 0. \end{aligned}$$

Der Fluss durch ∂G ergibt sich als Summe der 3 Integrale. Dies stimmt mit dem Ergebnis von (b) überein, so wie es sein soll.

- B.** Es ist $G = \{(x, y, z) : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - x^2 \text{ und } 0 \leq y \leq 2 - z\}$ und $\operatorname{div} \mathbf{F} = 3y$, also

$$\begin{aligned} \int_{\partial G} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O} &= \int_G \operatorname{div} \mathbf{F} \, d\mu_3 \\ &= \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{2-z} 3y \, dy \, dz \, dx \\ &= \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} \left(\frac{3}{2} y^2 \Big|_{y=0}^{2-z} \right) dz \, dx \\ &= \frac{3}{2} \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} (4 - 4z + z^2) dz \, dx \\ &= \frac{3}{2} \int_{-1}^1 \left(4z - 2z^2 + \frac{z^3}{3} \Big|_{z=0}^{1-x^2} \right) dx \\ &= \frac{3}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{7}{3} - x^2 - x^4 - \frac{1}{3} x^6 \right) dx \\ &= 7 - \frac{1}{2} \left(\frac{x^7}{7} + \frac{3}{5} x^5 + x^3 \right) \Big|_{x=-1}^1 = \frac{184}{35}. \end{aligned}$$

- C.** a) $\varphi(u, v) := (u, v, u^2 + v^2)$ liefert die falsche Orientierung, benutze daher stattdessen $\varphi(u, v) := (v, u, u^2 + v^2)$.

Dann ist $\varphi_u = (0, 1, 2u)$, $\varphi_v = (1, 0, 2v)$ und $\varphi_u \times \varphi_v = (2v, 2u, -1)$.

- b) $\psi(u, v) := (u, v, 4)$. Dann ist $\psi_u = (1, 0, 0)$, $\psi_v = (0, 1, 0)$ und $\psi_u \times \psi_v = (0, 0, 1)$.

- c) Es ist

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O} &= \int_D \mathbf{F}(v, u, u^2 + v^2) \cdot (2v, 2u, -1) \, du \, dv \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (2r^2 - 3)r \, dr \, d\varphi = 4\pi. \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \int_T \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O} &= \int_D \mathbf{F}(u, v, 4) \cdot (0, 0, 1) \, du \, dv \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 3r \, dr \, d\varphi = 12\pi. \end{aligned}$$

Der Gesamtfluss durch $\partial\Omega$ beträgt daher 16π .

d) Nach Gauß ist

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O} &= \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV = \int_D \left(\int_{x^2+y^2}^4 2 \, dz \right) dx \, dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (8 - 2r^2)r \, dr \, d\varphi = 16\pi. \end{aligned}$$

e) Sukzessive Integration von $f_x = 4xe^z$ ($\implies f(x, y, z) = 2x^2e^z + g(y, z)$), von $f_y = g_y = \cos y$ ($\implies g(y, z) = \sin y + h(z)$) und $f_z = 2x^2e^z$ ($\implies h(z) = 0$) liefert: $f(x, y, z) = 2x^2e^z + \sin y$.

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = f(1, \pi, 0) - f(0, 0, 2) = 2.$$

f) Das Integral von \mathbf{F} über geschlossene Kurven ist Null. Nach Stokes ist dann

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O} = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = 0.$$

D. Es sei S die geschlossene Fläche, die den Zylinder $G := \{(x, y, z) : 0 < z < H \text{ und } x^2 + y^2 < R^2\}$ berandet. Der Zylindermantel wird parametrisiert durch $\varphi_1 : Q_1 := [0, 2\pi] \times [0, H] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\varphi_1(u, v) = (R \cos u, R \sin u, v)$, der „Boden“ durch $\varphi_2 : Q_2 := [0, 2\pi] \times [0, R] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\varphi_2(u, v) = (v \cos u, v \sin u, 0)$ und der „Deckel“ wird durch $\varphi_3 : Q_3 := [0, 2\pi] \times [0, R] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\varphi_3(u, v) = (v \cos u, v \sin u, H)$ parametrisiert. Damit haben wir S als Vereinigung der drei parametrisierten Flächenstücke $S_1 = \varphi_1(Q_1)$, $S_2 = \varphi_2(Q_2)$ und $S_3 = \varphi_3(Q_3)$ dargestellt.

Der Fluss des Vektorfeldes \mathbf{F} durch S ist gegeben durch

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O} = \int_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O} + \int_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O} + \int_{S_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O}.$$

Wir berechnen zuerst den Fluss durch S_1 : Die Tangentialvektoren an S_1 sind

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u, v) = (-R \sin u, R \cos u, 0) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u, v) = (0, 0, 1),$$

und die nach außen weisende Flächennormale ist

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u, v) = (R \cos u, R \sin u, 0).$$

Da \mathbf{F} als zylindersymmetrisch vorausgesetzt wird, ist

$$\mathbf{F}(\varphi_1(u, v)) = (f(R) \cos u, f(R) \sin u, 0)$$

und damit

$$\mathbf{F}(\varphi_1(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u, v) \right) = R \cdot f(R).$$

Der Fluss eines zylindersymmetrischen Vektorfeldes \mathbf{F} durch den Zylindermantel ist

$$\int_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O} = \int_{Q_1} Rf(R) \, du \, dv = \int_0^H \int_0^{2\pi} Rf(R) \, du \, dv = 2\pi H R f(R).$$

Wir vermuten natürlich, daß der Fluss eines zylindersymmetrischen Vektorfeldes durch die „Deckflächen“ Null ist. Überprüfen wir das beispielsweise am „Boden“: Die Tangentialvektoren an S_2 sind

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u, v) = (-v \sin u, v \cos u, 0) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u, v) = (\cos u, \sin u, 0).$$

Als Flächennormale erhalten wir $\frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u, v) = v(0, 0, -1)$, die wegen $v \geq 0$ nach außen zeigt. Für ein zylindersymmetrisches Vektorfeld \mathbf{F} ist dann

$$\mathbf{F}(\varphi_2(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u, v) \right) = 0,$$

und somit ist auch der Fluss gleich Null.

Analog verhält es sich beim „Deckel“ S_3 , unabhängig davon, ob die Flächennormale nach innen oder außen zeigt. Bei der angegebenen Parametrisierung zeigt die Flächennormale $\frac{\partial \varphi_3}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi_3}{\partial v}(u, v) = v(0, 0, -1)$ nach innen!

E. Man soll natürlich den Satz von Gauß verwenden. Das Prisma ist die Menge $P = \{(x, y, z) \in [0, 1] \times [0, 2] \times \mathbb{R} : 0 \leq z \leq 2 - 2x\}$. Damit ist

$$\begin{aligned} \int_{\partial P} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O} &= \int_P \operatorname{div} \mathbf{F} \, d\mu_3 \\ &= \int_0^1 \int_0^2 \int_0^{2-2x} (2y - 1) \, dz \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \int_0^2 (2y - 1)(2 - 2x) \, dy \, dx \\ &= 4 \int_0^1 (1 - x) \, dx = 2. \end{aligned}$$

F. Es ist $Q = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 4 \text{ und } 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2\}$ und $\operatorname{div} \mathbf{F} = 3(x^2 + y^2 + z^2)$, also (unter Verwendung von Polarkoordinaten)

$$\begin{aligned}
\int_{\partial Q} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O} &= \int_Q \operatorname{div} \mathbf{F} \, d\mu_3 \\
&= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{4-r^2} (r^2 + z^2)r \, dz \, dr \, d\varphi \\
&= 6\pi \int_0^2 \left((r^3 z + z^3 r/3) \Big|_{z=0}^{4-r^2} \right) dr \\
&= 6\pi \int_0^2 \left(-12r^3 + 3r^5 + (64/3)r - r^7/3 \right) dr \\
&= 6\pi \left((-3r^2 + r^4/2 + 32/3 - r^6/24)r^2 \right) \Big|_0^2 = 96\pi.
\end{aligned}$$

Lösungen zu den Aufgaben in 3.5

A. Es ist $\varphi \wedge \psi = (xz + yz^2) dx \wedge dy \wedge dz$ und $\psi \wedge \psi = 0$ (siehe dazu auch Aufgabe B).

B. a) Ist α eine 1-Form, so ist

$$\alpha \wedge \alpha(\mathbf{x}; \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \alpha(\mathbf{x}; \mathbf{v}) \cdot \alpha(\mathbf{x}; \mathbf{w}) - \alpha(\mathbf{x}; \mathbf{w}) \cdot \alpha(\mathbf{x}; \mathbf{v}) = 0.$$

Also ist $\alpha_\nu \wedge (\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p) = \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_\nu \wedge \alpha_\nu \wedge \dots \wedge \alpha_p = 0$ für $\nu = 1, \dots, p$

b) Man ergänze $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ durch $\alpha_{p+1}, \dots, \alpha_n$ zu einer Basis. Ist $\alpha = \sum_{\nu=1}^n \lambda_\nu \alpha_\nu$ eine beliebige 1-Form, so ist

$$\begin{aligned}
\alpha \wedge (\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p) &= \sum_{\nu=p+1}^n \lambda_\nu \alpha_\nu \wedge \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p = 0 \\
\iff \lambda_{p+1} = \dots = \lambda_n &= 0 \\
\iff \alpha &= \sum_{\nu=1}^p \lambda_\nu \alpha_\nu
\end{aligned}$$

c) In der Aufgabenstellung fehlt die Bedingung $\alpha \neq 0$.

Ist $\alpha \wedge (\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p) = 0$, so ist $\alpha = \sum_{\nu=1}^p \lambda_\nu \alpha_\nu$. Einer der Koeffizienten λ_ν ist $\neq 0$, etwa sei $\lambda_1 \neq 0$. Dann kann man $\beta := (1/\lambda_1)\alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_p$ setzen.

C. Auch wenn es nicht explizit gesagt wird, kann man davon ausgehen, dass ω und Ω Formen auf dem \mathbb{R}^3 sind. Dann ist

$$d\omega = -2y \, dx \wedge dy \quad \text{und} \quad d\Omega = -\cos z \, dx \wedge dy \wedge dz.$$

D. Es ist $d\omega = n dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$.

E. Es ist $\mathbf{F}^*\omega = F_1 dF_2 \wedge dF_3 + F_2 dF_3 \wedge dF_1 + F_3 dF_1 \wedge dF_2$. Nach längerer Rechnung erhält man

$$\mathbf{F}^*\omega = r \cos \theta (r^2 d\varphi \wedge d\theta).$$

Etwas einfacher geht es mit den Formeln für krummlinige Koordinaten. Dazu sollte man die Bezeichnungen wechseln:

$$\Phi(r, \varphi, \theta) := (r \cos \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \theta) \text{ und } F_1 := x, F_2 := y, F_3 := z.$$

Dann ist $h_1 = 1$, $h_2 = r \cos \theta$ und $h_3 = r$, sowie

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= (\cos \varphi \cos \theta, \sin \varphi \cos \theta, \sin \theta), \\ \mathbf{e}_\varphi &= (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) \\ \text{und } \mathbf{e}_\theta &= (-\cos \varphi \sin \theta, -\sin \varphi \sin \theta, \cos \theta). \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \tilde{F}_1 &= ((F_1, F_2, F_3) \circ \Phi) \cdot \mathbf{e}_r = r, \\ \tilde{F}_2 &= ((F_1, F_2, F_3) \circ \Phi) \cdot \mathbf{e}_\varphi = 0, \\ \tilde{F}_3 &= ((F_1, F_2, F_3) \circ \Phi) \cdot \mathbf{e}_\theta = 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \Phi^*\omega &= (\tilde{F}_1 h_2 h_3) d\varphi \wedge d\theta + (\tilde{F}_2 h_3 h_1) d\theta \wedge dr + (\tilde{F}_3 h_1 h_2) dr \wedge d\varphi \\ &= r^3 \cos \theta d\varphi \wedge d\theta. \end{aligned}$$

F. Es ist $d\omega = -x dx \wedge dy - 3 dy \wedge dz$ und

$$\varphi^*\omega = (9u^2 + 4uv + u^3v^2) du + (u^4v - u^2) dv.$$

Berechnet man nun $\varphi^*(d\omega)$ und $d(\varphi^*\omega)$, so erhält man in beiden Fällen das gleiche Ergebnis, nämlich $(2u^3v - 6u) du \wedge dv$.

G. Hier ist

$$d\omega = (1 + \cos y + \sin z) dx \wedge dy \wedge dz$$

und (mit $(x, y, z) = \Phi(u, v, w) = (u, v - uw, vw)$)

$$\begin{aligned} \Phi^*\omega &= (-uw^2 - w \sin(v - uw) - \cos(vw)) du \wedge dv \\ &\quad + (-uvw - v \sin(v - uw) + u \cos(vw)) du \wedge dw + (uv + u^2w) dv \wedge dw. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \Phi^*(d\omega) &= d(\Phi^*\omega) \\ &= \left((v + uw)(1 + \cos(v - uw) + \sin(vw)) \right) du \wedge dv \wedge dw. \end{aligned}$$

$\Phi^*(d\omega)$ ist etwas leichter zu berechnen.

H. Sei

$$\Phi(r, \varphi, \theta) := \mathbf{F}_{\text{sph}}(r, \varphi, \theta) = (r \cos \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \theta)$$

und $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ ein Vektorfeld.

Es ist $h_1 = 1$, $h_2 = r \cos \theta$ und $h_3 = r$. Damit ergibt sich:

a)

$$(\operatorname{div} \mathbf{F}) \circ \Phi = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \tilde{F}_1 \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta}(r \tilde{F}_2 \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(r \tilde{F}_3) \right],$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{F}_1 &= (\mathbf{F} \circ \Phi) \cdot \mathbf{e}_r \\ &= (F_1 \circ \Phi) \cos \varphi \sin \theta + (F_2 \circ \Phi) \sin \varphi \sin \theta + (F_3 \circ \Phi) \cos \theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_2 &= (\mathbf{F} \circ \Phi) \cdot \mathbf{e}_\theta \\ &= (F_1 \circ \Phi) \cos \varphi \cos \theta + (F_2 \circ \Phi) \sin \varphi \cos \theta - (F_3 \circ \Phi) \sin \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{und } \tilde{F}_3 &= (\mathbf{F} \circ \Phi) \cdot \mathbf{e}_\varphi \\ &= -(F_1 \circ \Phi) \sin \varphi + (F_2 \circ \Phi) \cos \varphi. \end{aligned}$$

b)

$$(\operatorname{rot} \mathbf{F}) \circ \Phi = R_1 \mathbf{e}_r + R_2 \mathbf{e}_\theta + R_3 \mathbf{e}_\varphi$$

mit

$$R_1 = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta}(r \tilde{F}_3 \sin \theta) - \frac{\partial}{\partial \varphi}(r \tilde{F}_2) \right]$$

$$= \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\tilde{F}_3 \sin \theta) - \frac{\partial}{\partial \varphi}(\tilde{F}_2) \right],$$

$$R_2 = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi}(\tilde{F}_1) - \frac{\partial}{\partial r}(r \tilde{F}_3 \sin \theta) \right]$$

$$= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}(\tilde{F}_1) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \tilde{F}_3),$$

$$\text{und } R_3 = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(r \tilde{F}_2) - \frac{\partial}{\partial \theta}(\tilde{F}_1) \right].$$

I. Hier sollen die Kugelkoordinaten in der Form

$$\Phi(r, \varphi, \theta) = (r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta)$$

verwendet werden, es ist also

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r \quad \text{und} \quad h_3 = r \sin \theta.$$

Ist $\mathbf{F} \circ \Phi = -\gamma \frac{M}{r^2} \mathbf{e}_r$, so ist $\tilde{F}_1 = -\gamma \frac{M}{r^2}$, $\tilde{F}_2 = 0$ und $\tilde{F}_3 = 0$. Setzt man dies in die entsprechenden Formeln ein, so erhält man

$$(\operatorname{div} \mathbf{F}) \circ \Phi = 0 \quad \text{und} \quad (\operatorname{rot} \mathbf{F}) \circ \Phi = \mathbf{0}.$$

J. Es ist $\mathbf{V} \circ \Phi = \tilde{V}_1 \mathbf{e}_r + \tilde{V}_2 \mathbf{e}_\theta + \tilde{V}_3 \mathbf{e}_\varphi$, also nach Voraussetzung $\tilde{V}_1 = \omega r \sin \theta$, $\tilde{V}_2 = 0$ und $\tilde{V}_3 = 0$.

Dann ist $(\mathbf{rot} \mathbf{V}) \circ \Phi = \tilde{R}_1 \mathbf{e}_r + \tilde{R}_2 \mathbf{e}_\theta + \tilde{R}_3 \mathbf{e}_\varphi$ mit

$$\tilde{R}_1 = 2\omega \cos \theta, \quad \tilde{R}_2 = -2\omega \sin \theta \quad \text{und} \quad \tilde{R}_3 = 0.$$

Mit

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta) \\ \text{und } \mathbf{e}_\theta &= (\cos \varphi \cos \theta, \sin \varphi \cos \theta, -\sin \theta) \end{aligned}$$

ist dann $(\mathbf{rot} \mathbf{V}) \circ \Phi = (0, 0, 2\omega)$.