Lösungen und Lösungshinweise zum Grundkurs Analysis 2 (2. Auflage)

Kapitel 3:

Lösungen zu den Aufgaben in 3.2

H. Sei $\omega = x\,dy + y\,dz + z\,dx$ und $\sigma : [0,2\pi] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $\sigma(u,v) := (\cos u, \sin u, v)$.

Es ist $d\omega = dx \wedge dy + dy \wedge dz + dz \wedge dx$ und

$$\begin{aligned}
\sigma^*(d\omega) &= (-\sin u\,du) \wedge (\cos u\,du) + (\cos u\,du) \wedge dv + dv \wedge (-\sin u\,du) \\
&= (\sin u + \cos u)\,du \wedge dv,
\end{aligned}$$

also (mit $R := [0,2\pi] \times [0,1]$)

$$\begin{aligned}
\int_\sigma d\omega &= \int_R \sigma^*(d\omega) \;=\; \int_R (\sin u + \cos u)\,du \wedge dv \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (\sin u + \cos u)\,dv\,du \;=\; (\sin u - \cos u)\,\Big|_0^{2\pi} \\
&= (0-1) - (0-1) \;=\; 0.
\end{aligned}$$

Das Integral $\int_{\partial_+\sigma} \omega$ muss natürlich den gleichen Wert haben. Man kann es aber auch explizit berechnen. Dazu braucht man die Randabbildungen

$$\sigma_1^u(v) = (0,v), \sigma_1^o(v) = (2\pi, v), \sigma_2^u(u) = (u,0) \text{ und } \sigma_2^o(u) = (u,1).$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
f(v) &:= \sigma \circ \sigma_1^u(v) \;=\; \sigma(0,v) \;=\; (1,0,v), \\
g(v) &:= \sigma \circ \sigma_1^o(v) \;=\; \sigma(2\pi,v) \;=\; (1,0,v), \\
h(u) &:= \sigma \circ \sigma_2^u(u) \;=\; \sigma(u,0) \;=\; (\cos u, \sin u, 0) \\
\text{und } k(u) &:= \sigma \circ \sigma_2^o(u) \;=\; \sigma(u,1) \;=\; (\cos u, \sin u, 1).
\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial_+\sigma}\omega &= \sum_{i=1}^{2}(-1)^{i-1}\Big(\int_{\sigma\circ\sigma_i^o}\omega - \int_{\sigma\circ\sigma_i^u}\omega\Big)\\
&= \Big(\int_{[0,1]} g^*\omega - \int_{[0,1]} f^*\omega\Big) - \Big(\int_{[0,2\pi]} k^*\omega - \int_{[0,2\pi]} h^*\omega\Big)\\
&= (0-0) - \Big(\int_0^{2\pi}(\cos^2 u - \sin u)\,du - \int_0^{2\pi}\cos^2 u\,du\Big)\\
&= -\int_0^{2\pi}\sin u\,du \;=\; \cos u\,\Big|_0^{2\pi} \;=\; 1-1 \;=\; 0.
\end{aligned}$$

Lösungen zu den Aufgaben in 3.3

A. Ist $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$, so ist

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{F} = \big((F_3)_y - (F_2)_z, (F_1)_z - (F_3)_x, (F_2)_x - (F_1)_y\big).$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned}
\mathbf{rot}\,\mathbf{A} &= (0,0,y),\\
\mathbf{rot}\,\mathbf{B} &= (x-x, y-y, z-z) \;=\; (0,0,0)\\
\text{und }\ \mathbf{rot}\,\mathbf{C} &= (0,0,3x^2-3x^2) \;=\; (0,0,0).
\end{aligned}$$

B. Es genügt, für **a** und **b** Einheitsvektoren einzusetzen. Ist $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$, so ist

$$\mathbf{e}_i \cdot (J_F - J_F^\top)\cdot \mathbf{e}_j^\top = (F_i)_{x_j} - (F_j)_{x_i},\ \text{ für } i<j,$$

und andererseits

$$\begin{aligned}
-\det(\mathbf{rot}\,\mathbf{F}, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) &= \det(\mathbf{rot}\,\mathbf{F}, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i)\\
&= \sum_{k=1}^{3}(\mathbf{rot}\,\mathbf{F})_k \cdot \det(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i) \;=\; (F_i)_{x_j} - (F_j)_{x_i}.
\end{aligned}$$

Ist nämlich $\{k,j,i\} \ne \{1,2,3\}$, so ist $\det(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i) = 0$. Ist $\{k,j,i\} = \{1,2,3\}$ und (k,j,i) eine zyklische Vertauschung von $(1,2,3)$, so ist $\det(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i) = 1$ und $(\mathbf{rot}\,\mathbf{F})_k = (F_i)_{x_j} - (F_j)_{x_i}$. Ist (k,j,i) keine zyklische Vertauschung von $(1,2,3)$, so ändert sich bei beiden Termen das Vorzeichen.

C. Die Aufgabe ist so, wie sie gestellt wurde, zu schwer. Es liegt ein Druckfehler vor, gemeint war

$$S := \{\mathbf{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \|\mathbf{x}\| = 1\}.$$

Die Kugeloberfläche S wird durch $\varphi(u,v) := (\cos u\cos v, \sin u\cos v, \sin v)$ mit $0 \le u \le 2\pi$ und $-\pi/2 \le v \le \pi/2$ parametrisiert. Es ist

$$J_\varphi = \det \begin{pmatrix} -\sin u \cos v & -\cos u \sin v \\ \cos u \cos v & -\sin u \sin v \\ 0 & \cos v \end{pmatrix}$$

und daher $G_\varphi = \det(J_\varphi^\top \cdot J_\varphi) = \det \begin{pmatrix} \cos^2 v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, also $\sqrt{G_\varphi} = \cos v$ (auf $[-\pi/2, \pi/2]$).

Sei $P := [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$. Mit $f(x,y,z) = x^2$ ist $f \circ \varphi(u,v) = \cos^2 u \cos^2 v$ auf P, also

$$\int_S x^2 \, do = \int_P f(\varphi(u,v)) \sqrt{G_\varphi(u,v)} \, d\mu_2 = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 u \cos^3 v \, dv \, du.$$

Nun ist

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 v \, dv = \frac{4}{3},$$

also

$$\int_S x^2 \, do = \frac{4}{3} \int_0^{2\pi} \cos^2 u \, du = \frac{4}{3}\pi.$$

Mit den Ergebnissen des Abschnitts 3.5. wäre noch eine andere Lösung möglich: Setzt man $B := B_1(0)$, $\mathbf{F} := (x, 0, 0)$ und berücksichtigt man, dass $\mathbf{N} := (x, y, z)$ das Einheitsnormalenfeld auf $S = \partial B$ ist, so erhält man:

$$\int_S x^2 \, do = \int_S \mathbf{F} \bullet \mathbf{N} \, d\mathbf{O} = \int_B \operatorname{div} \mathbf{F} \, d\mu_3 = \int_B d\mu_3 = \frac{4}{3}\pi.$$