Lösungen und Lösungshinweise zum Grundkurs Analysis 2 (2. Auflage)

Kapitel 2:

Lösungen zu den Aufgaben in 2.3

E. Sei $D := D_r(\mathbf{x}_0) \subset \mathbb{R}^2$ und $D_+ := \{(x, y) \in D \,:\, y \ge 0\}$. Dann reicht es zu zeigen, dass D_+ J-messbar und $\mathrm{vol}_2(D_+) = r^2\pi/2$ ist.

Die Menge D_+ ist ein Normalbereich (und deshalb J-messbar):

$$D_+ = \{(x, y) \in [-r, r] \times \mathbb{R} \,:\, 0 \le y \le \sqrt{r^2 - x^2}\}.$$

Ist χ die charakteristische Funktion von D_+, so ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_2(D_+) &= \int \chi\, dV_2 \;=\; \int_{-r}^{r} \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} dy\, dx \;=\; \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t} \cdot r \cos t\, dt \\
&= r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\, dt \;=\; \frac{\pi}{2} r^2.
\end{aligned}$$

F. Boden, Deckel und auch die Mantelfläche des Rotationskörpers sind Hyperflächen und daher Nullmengen. Damit ist ∂R eine Nullmenge und R J-messbar. Das bedeutet, dass die charakteristische Funktion χ_R R-integrierbar ist. Weiter ist

$$(\chi_R)_t(\mathbf{x}) := \chi_R(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t \in [a, b] \text{ und } \|\mathbf{x}\| \le f(t) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases},$$

also $(\chi_R)_t = \chi_{D_{f(t)}(0)}$ R-integrierbar für alle $t \in [a, b]$.

Jetzt kann man die Folgerung 2.3.14 aus dem Satz von Fubini benutzen. Setzt man $P = [-C, C] \times [-C, C]$ und $Q := [a, b]$, so ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_3(R) &= \int_{P \times Q} \chi_R(\mathbf{x}, t)\, dV_3 \;=\; \int_Q \left(\int_P \chi_R(\mathbf{x}, t) dV_2 \right) dV_1 \\
&= \int_a^b \left(\int_P \chi_{D_{f(t)}(0)}\, dV_2 \right) dt \;=\; \int_a^b \mathrm{vol}_2(D_{f(t)}(0))\, dt \\
&= \pi \cdot \int_a^b f(t)^2\, dt.
\end{aligned}$$

G. Es ist

$$\begin{aligned}\int_Q y\,\sin(xy)\,dV_2 &= \int_0^\pi y\left(\int_1^2 \sin(xy)\,dx\right)\,dy \\ &= \int_0^\pi y\Big(\frac{-\cos(xy)}{y}\Big)\,\Big|_{x=1}^{2}\,dy \\ &= -\int_0^\pi \Big(\cos(2y)-\cos(y)\Big)\,dy \\ &= -\Big(\frac{1}{2}\sin(2y)-\sin y\Big)\,\Big|_0^\pi = 0.\end{aligned}$$

K. Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader, so dass $M \subset Q \times [a,b]$ ist. Man wende den Satz von Fubini (bzw. die Folgerung 2.3.14) auf $f = \chi_M$ an. Weil M_t für alle $t \in \mathbb{R}$ J-messbar oder leer ist, ist die Funktion $\mathbf{x} \mapsto \chi_M(\mathbf{x},t) = \chi_{M_t}(\mathbf{x})$ für alle $t \in [a,b]$ eine R-integrierbare Funktion.

Dann ist die Funktion $I_Q f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

$$I_Q f(t) = \int_Q \chi_M(\mathbf{x},t)\,dV_n = \begin{cases} \mathrm{vol}_n(M_t) & \text{falls } M_t \neq \varnothing \\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

R-integrierbar, und es gilt:

$$\mathrm{vol}_{n+1}(M) = \int_{Q\times[a,b]} \chi_M(\mathbf{x},t)\,dV_{n+1} = \int_a^b I_Q f(t)\,dt = \int_a^b \mathrm{vol}_n(M_t)\,dt.$$

L. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ J-messbar und $r > 0$. Mit M ist auch $r \cdot M$ beschränkt. Da die Abbildung $\mathbf{x} \mapsto r \cdot \mathbf{x}$ ein Homöomorphismus ist, kann man schließen, dass $r \cdot \partial M = \partial(r \cdot M)$ ist. Außerdem gilt für $\varepsilon > 0$ und $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, sowie den Quader

$$Q_\varepsilon(\mathbf{a}) := \{\mathbf{x} = \mathbf{a} + \sum_{i=1}^n t_i\mathbf{e}_i \,:\, |t_i| < \varepsilon\},$$

dass $r \cdot Q_\varepsilon(\mathbf{a}) = Q_{r\varepsilon}(r\mathbf{a})$ wieder ein Quader ist. Offensichtlich ist $\mathrm{vol}_n(r\cdot Q) = r^n \cdot \mathrm{vol}_n(Q)$.

Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben und $\delta := \varepsilon/r^n$. Weil ∂M eine Nullmenge ist, gibt es eine Folge von Quadern Q_i, so dass $\partial M \subset \bigcup_i Q_i$ und $\sum_i \mathrm{vol}_n(Q_i) < \delta$ ist. Dann ist $\partial(r \cdot M) = r \cdot \partial M \subset \bigcup_i rQ_i$ und $\sum_i \mathrm{vol}_n(rQ_i) = r^n \sum_i \mathrm{vol}_n(Q_i) < r^n\delta = \varepsilon$. Das bedeutet, dass $\partial(r\cdot M)$ eine Nullmenge und $r \cdot M$ J-messbar ist.

Zum Beweis der Volumen-Formel kann man Induktion nach n führen.

$n = 1$:
Liegt M in dem Intervall $[a, b]$, so liegt rM in $[ra, rb]$. Mit Hilfe der Substitutionsregel erhält man:

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_1(rM) &= \int_{ra}^{rb} \chi_{rM}(t)\,dt \;=\; r \cdot \int_{ra}^{rb} \chi_{rM}(t) \frac{1}{r}\,dt \\
&= r \cdot \int_{ra}^{rb} \chi_M(\frac{1}{r}t) \frac{1}{r}\,dt \\
&= r \cdot \int_{a}^{b} \chi_M(s)\,ds \;=\; r \cdot \mathrm{vol}_1(M).
\end{aligned}$$

$(n-1) \Longrightarrow (n)$:
Es ist

$$(rM)_t = \{\mathbf{x} \,:\, (\mathbf{x}, t) \in rM\} = r \cdot \{\mathbf{y} \,:\, (\mathbf{y}, \frac{1}{r}t) \in M\} = r \cdot M_{t/r}.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_n(r \cdot M) &= \int_{ra}^{rb} \mathrm{vol}_{n-1}\big((rM)_t\big)\,dt \qquad \text{(Cavalieri)} \\
&= \int_{ra}^{rb} \mathrm{vol}_{n-1}(r \cdot M_{t/r})\,dt \qquad \text{(siehe oben)} \\
&= \int_{ra}^{rb} r^{n-1}\,\mathrm{vol}_{n-1}(M_{t/r})\,dt \qquad \text{(Induktionsvoraussetzung)} \\
&= r^n \int_{ra}^{rb} \mathrm{vol}_{n-1}(M_{t/r}) \frac{1}{r}\,dt \\
&= r^n \int_{a}^{b} \mathrm{vol}_{n-1}(M_s)\,ds \;=\; r^n \cdot \mathrm{vol}_n(M) \qquad \text{(Cavalieri).}
\end{aligned}$$