Lösungen und Lösungshinweise zum Grundkurs Analysis 2 (2. Auflage)

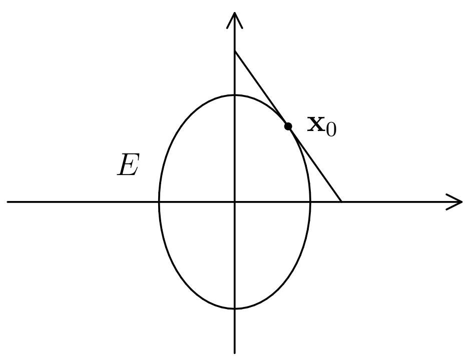
Kapitel 1:

Lösungen zu den Aufgaben in 1.2

Q. Der Punkt $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) = (1/\sqrt{2}, 1)$ liegt auf der Ellipse

$$E = \{(x, y) \,:\, 2x^2 + y^2 = 2\} = \{(x, y) \,:\, (x/a)^2 + (y/b)^2 = 1\}$$

mit $a := 1$ und $b := \sqrt{2}$.



Sei $f(x, y) := 2x^2 + y^2 - 2$. Es ist $f_y(\mathbf{x}_0) = 2y_0 = 2 \neq 0$. Also lässt sich die Gleichung $f(x, y) = 0$ in der Nähe von $\mathbf{x}_0$ in der Form $y = g(x)$ auflösen. Dann ist $g(1/\sqrt{2}) = 1$ und

$$g'(x) = -\frac{4x}{2g(x)} = -\frac{2x}{g(x)}, \text{ also } g'(x_0) = -\sqrt{2}.$$

Das ist die gesuchte Steigung.

Die Tangente an E in $\mathbf{x}_0$ ist gegeben durch

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 1 - \sqrt{2}\big(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\big) = 2 - \sqrt{2}x.$$

Parametrisiert wird sie durch

$$\alpha(t) := (0, 2) + t\big(1, -\sqrt{2}\big).$$

Lösungen zu den Aufgaben in 1.7

A. Man setzt $\varphi_k(0) := y_0$ und $\varphi_k(s) := \varphi_k(y_{j-1}) + (s - t_{j-1}) \cdot y_{j-1}$ auf $(t_{j-1}, t_j]$. Dann ist $\varphi_k(s) = y_0(1+s)$ auf $[0, t_1]$ und

$$\varphi_k(s) = y_0\Big(1 + \frac{t}{k}\Big)^{j-1}\Big(1 + s - \frac{(j-1)t}{k}\Big) \text{ auf } (t_{j-1}, t_j].$$

Das kann man induktiv zeigen, und es folgt: $\varphi_k(t_j) = y_0\big(1+\dfrac{t}{k}\big)^j$. Insbesondere ist $\varphi_k(t) = y_0(1 + t/k)^k$. Für $k \to \infty$ strebt $\varphi_k(t)$ gegen $y_0 \cdot e^t$.

B. 1) Die Abbildung $\widehat{\mathbf{F}} : \mathbb{R} \times G_0 \to \mathbb{R}^n$ mit $\widehat{\mathbf{F}}(t, \mathbf{y}) := \mathbf{F}(\mathbf{y})$ erfüllt lokal die Lipschitzbedingung. Also gibt eine (maximal definierte) eindeutig bestimmte Lösung $\varphi_0 : I \to \mathbb{R}^n$ der DGL $\mathbf{y}' = \widehat{\mathbf{F}}(t, \mathbf{y})$ mit $\varphi_0(0) = \mathbf{y}_0$. Das ist dann auch eine Lösung der „autonomen“ DGL $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(\mathbf{y})$ (globaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz).

2) Ist $\mathbf{F}(\mathbf{y}_0) = \mathbf{0}$ und $\psi(t) := \mathbf{y}_0$ die konstante Funktion, so ist $\psi'(t) = \mathbf{0} = \mathbf{F}(\mathbf{y}_0) = \mathbf{F}(\psi(t))$, also ψ eine Lösung mit $\psi(0) = \mathbf{y}_0$. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems muss $\varphi_0 = \psi$ sein. Da die konstante Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, gilt dies auch für φ_0.

3) Sei $\mathbf{F}(\mathbf{y}_0) \neq \mathbf{0}$. Dann kann φ_0 nicht konstant sein, und es muss auch $\varphi_0'(t) = \mathbf{F}(\varphi_0(t)) \neq \mathbf{0}$ für alle $t \in I$ sein. Also ist φ_0 eine glatte Parametrisierung der Lösungskurve.

Ist φ_0 nicht injektiv, so gibt es ein $t_1 \neq 0$ mit $\varphi_0(t_1) = \varphi_0(0) = \mathbf{y}_0$. Sei dann $\varphi(t) := \varphi_0(t - t_1)$. Es ist $\varphi'(t) = \varphi_0'(t - t_1) = \mathbf{F}(\varphi_0(t - t_1)) = \mathbf{F}(\varphi(t))$, also φ eine Lösung der DGL mit $\varphi(t_1) = \varphi_0(0) = \varphi_0(t_1)$. Dann muss φ mit φ_0 übereinstimmen. Ist $I = (x_-, x_+)$ das maximale Definitionsintervall von φ_0, so ist $(x_- - t_1, x_+ - t_1)$ das maximale Dfinitionsintervall von φ. Das geht nur, wenn $I = \mathbb{R}$ ist. Und wegen

$$\varphi_0(t) = \varphi_0(t + t_1 - t_1) = \varphi(t + t_1) = \varphi_0(t + t_1)$$

ist φ_0 ist periodisch.

C. a) Ist $y_1(t) := e^{-3t}$ und $y_2(t) := -e^{-3t}$, so ist

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= -3e^{-3t} = -4y_2(t) - y_1(t) \\ \text{und} \quad y_2'(t) &= 3e^{-3t} = y_1(t) - 2y_2(t). \end{aligned}$$

Also ist $\varphi_1 = (y_1, y_2)$ eine Lösung des DGL-Sstems.

Analog folgt, dass $\varphi_2 = (z_1, z_2)$ mit $z_1(t) := (1-t)e^{-3t}$ und $z_2(t) := te^{-3t}$ eine Lösung des Systems ist.

Für die Wronski-Determinante erhält man:

$$\begin{aligned} W(t) &= \det\big(\varphi_1(t)^\top, \varphi_2(t)^\top\big) \\ &= y_1(t)z_2(t) - y_2(t)z_1(t) \;=\; te^{-6t} + (1-t)e^{-6t} \\ &= e^{-6t} \;\neq\; 0 \text{ für alle } t. \end{aligned}$$

Also sind die beiden Lösungen linear unabhängig.

Die allgemeine Lösung hat dann die Gestalt $\varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t)$, mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

b) Sei $y_1(t) := \sin(t^2)$ und $y_2(t) := 2t\cos(t^2)$. Dann ist

$$y_1'(t) = 2t\cos(t^2) = y_2(t) \quad \text{ und } \quad y_2'(t) = 2\cos(t^2) - 4t^2\sin(t^2) = -4t^2 y_1(t) + \frac{1}{t} y_2(t).$$

$\varphi_1 = (y_1, y_2)$ ist also eine Lösung. Und analog zeigt man, dass $\varphi_2 = (z_1, z_2)$ mit $z_1(t) := \cos(t^2)$ und $z_2(t) := -2t\sin(t^2)$ eine Lösung ist.

Es ist $W(t) = y_1(t)z_2(t) - y_2(t)z_1(t) = -2t\sin^2(t^2) - 2t\cos^2(t^2) = -2t$. Also ist $W(0) = 0$, aber $W(t) \neq 0$ für $t \neq 0$.

Sei $t_0 \neq 0$. Ist $c_1 \cdot \varphi_1(t) + c_2 \cdot \varphi_2(t) \equiv 0$, so ist speziell $\big(\varphi_1(t_0)^\top, \varphi_2(t_0)^\top\big) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Weil $W(t_0) \neq 0$ ist, ist $\big(\varphi_1(t_0)^\top, \varphi_2(t_0)^\top\big)$ invertierbar. Es muss also $c_1 = c_2 = 0$ sein. Das bedeutet, dass φ_1, φ_2 linear unabhängig sind.

Allerdings liegt gar kein lineares System vor, denn der Koeffizient $1/t$ bei y_2 in der zweiten Gleichung ist in $t = 0$ nicht definiert, geschweige denn stetig. Außerhalb des Nullpunktes ist alles in Ordnung.

D. a) Es ist $\det(A - tE_2) = (-3-t)(-2-t) - 2 = t^2 + 5t + 4$. Das ergibt die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = -4$. Dazu passende Eigenvektoren sind $\mathbf{x}_1 = (1, \sqrt{2})$ und $\mathbf{x}_2 = (-\sqrt{2}, 1)$.

Die allgemeine Lösung hat also die Gestalt $\mathbf{y}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t}$.

b) Es ist $\det(A - tE_2) = (4+t)(2+t) + 1 = t^2 + 6t + 9$, und es gibt nur einen Eigenwert $\lambda = -3$ mit Vielfachheit 2. Ein passender Eigenvektor ist $\mathbf{x} = (1, -1)$. Das ergibt eine Lösung $\boldsymbol{\varphi}_1(t) := (1, -1)e^{-3t}$.

Für die zweite Lösung machen wir den Ansatz

$$\boldsymbol{\varphi}_2(t) = (a + bt, c + dt)e^{-3t}.$$

Einsetzen in die DGL ergibt die Gleichungen

$$\begin{aligned} a+b+c &= 0, \\ a+c-d &= 0 \\ \text{und} \qquad b+d &= 0. \end{aligned}$$

Das System ist überbestimmt. Mit $a = b = 1$ erhält man $c = -2$ und $d = -1$. Das liefert die gewünschte zweite Lösung $\boldsymbol{\varphi}_2(t) := (1+t, -2-t)e^{-3t}$.

Die beiden Lösungen sind linear unabhängig, die allgemeine Lösung erhält man als Linearkombination.

E. Die Nullstellen von $\det(A - tE_3) = (1-t)\cdot\big((1-t)^2+4\big) = (1-t)(t^2-2t+5) = (1-t)(t-\lambda)(t-\overline{\lambda})$ mit $\lambda = 1+2\,\mathsf{i}$ liefern die Eigenwerte.

Die Gleichung $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ liefert den Eigenvektor $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$.

Die Gleichung $\begin{pmatrix} -2\,\mathsf{i} & 0 & 0 \\ 2 & -2\,\mathsf{i} & -2 \\ 3 & 2 & -2\,\mathsf{i} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ liefert den Eigenvektor $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\mathsf{i} \end{pmatrix}$ zum Eigenwert $\lambda_2 = \lambda = 1+2\,\mathsf{i}$.

Dann ist $e^{\lambda t} \cdot \mathbf{x}_2 = e^t\big(\cos(2t) + \mathsf{i}\sin(2t)\big) \cdot \mathbf{x}_2 = e^t \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} + \mathsf{i}\begin{pmatrix} 0 \\ \sin 2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix}\right)$.

Die allgemeine Lösung hat die Gestalt

$$\mathbf{y}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} e^t + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ \sin 2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix} e^t.$$

F. Es ist $\det(A - tE_4) = (1-t)\Big((1-t)\big((1-t)(2-t)+1\big)\Big) - (1-t)\big(2-t+(-1)\big) = (1-t)\big((1-t)^2(2-t) + (1-t) - (2-t) + 1\big) = (1-t)^3(2-t)$.

Ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$ ist $\mathbf{x}_1 = (1,0,1,0)$.

Sei $B := A - E_4$. Da B den Rang 3 hat, hat der Kern $\{\mathbf{x} : \mathbf{x} \cdot B^\top = \mathbf{0}\}$ die Dimension 1. Sei $\mathbf{x}_2 := (0, 1, 0, 0)$. Dann ist $\{\mathbf{x}_2\}$ eine Basis des Kerns.

Die Matrix $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ hat Rang 2. Neben $\mathbf{x}_2$ muss es noch einen davon linear unabhängigen Vektor $\mathbf{x}_3$ mit $\mathbf{x}_3 \cdot (B^2)^\top = \mathbf{0}$ geben. $\mathbf{x}_3 = (1, 0, 0, 1)$ tut's!

Es ist $B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Neben $\mathbf{x}_2$ und $\mathbf{x}_3$ muss es noch einen dritten, davon linear unabhängigen Vektor $\mathbf{x}_4$ mit $\mathbf{x}_4 \cdot (B^3)^\top = \mathbf{0}$ geben. Dafür kommt $\mathbf{x}_4 = (0, 0, 1, 0)$ in Frage.

Wir haben also folgendes Fundamentalsystem von Lösungen:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}_1(t) &:= e^{2t}\mathbf{x}_1, \quad \boldsymbol{\varphi}_2(t) := e^t\mathbf{x}_2, \\ \boldsymbol{\varphi}_3(t) &:= e^t(\mathbf{x}_3 + t\mathbf{x}_3 \cdot B^\top) \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\varphi}_4(t) := e^t(\mathbf{x}_4 + t\mathbf{x}_4 \cdot B^\top + \frac{t^2}{2}\mathbf{x}_4 \cdot (B^2)^\top). \end{aligned}$$

Setzt man die Vektoren ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}_1(t) &:= e^{2t}(1, 0, 1, 0), \quad \boldsymbol{\varphi}_2(t) := e^t(0, 1, 0, 0), \\ \boldsymbol{\varphi}_3(t) &:= e^t(1, t, 0, 1) \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\varphi}_4(t) := e^t(t, \frac{t^2}{2}, 1, t). \end{aligned}$$

Dann ist

$$c_1\boldsymbol{\varphi}_1(0) + c_2\boldsymbol{\varphi}_2(0) + c_3\boldsymbol{\varphi}_3(0) + c_4\boldsymbol{\varphi}_4(0) = (c_1 + c_3, c_2, c_1 + c_4, c_3).$$

Mit $c_1 = 0$ und $c_2 = c_3 = c_4 = 1$ erhält man die Lösung

$$\boldsymbol{\varphi}(t) := e^t\big(1 + t,\, 1 + t + \frac{t^2}{2},\, 1,\, 1 + t\big) \text{ mit } \boldsymbol{\varphi}(0) = (1, 1, 1, 1).$$

Mit $c_1 = 1$, $c_2 = c_3 = 0$ und $c_4 = -1$ erhält man die Lösung

$$\boldsymbol{\psi}(t) := \big(e^{2t} - te^t,\, -\frac{t^2}{2}e^t,\, e^{2t} - e^t,\, -te^t\big) \text{ mit } \boldsymbol{\psi}(0) = (1, 0, 0, 0).$$

Bemerkung: Alternativ kann man versuchen, $\boldsymbol{\varphi}_2, \boldsymbol{\varphi}_3, \boldsymbol{\varphi}_4$ per Ansatz zu bestimmen:

$$\boldsymbol{\varphi}_i(t) = e^t\big(a_{i0} + a_{i1}t + a_{i2}t^2,\, b_{i0} + b_{i1}t + b_{i2}t^2,\, c_{i0} + c_{i1}t + c_{i2}t^2\big),\ i = 2, 3, 4.$$

Das ist aber eher nicht ratsam.

G. Wir betrachten die DGL $y'' + 4y = x^2 + 5\cos(2x)$. Das zugeordnete System von DGLn 1.Ordnung sieht folgendermaßen aus:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 + 5\cos 2x \end{pmatrix}$$

Wir beginnen mit dem homogenen System, einem linearen System mit konstanten Koeffizienten. Es ist $\det(A - tE) = t^2 + 4$. Das ergibt die Eigenwerte $\lambda_\pm := \pm 2\,\mathsf{i}$. Wir bekommen nun ein Fundamentalsystem von (reellen) Lösungen, indem wir Real- und Imaginärteil von $\boldsymbol{\varphi}(t) := e^{\lambda_+ t}\mathbf{z}$ betrachten, wobei $\mathbf{z}$ ein zugehöriger Eigenvektor ist, z.B. $\mathbf{z} = (1, 2\,\mathsf{i}\,)$. Das ergibt

$$\boldsymbol{\varphi}_1(t) = (\cos 2t, -2\sin 2t) \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\varphi}_2(t) = (\sin 2t, 2\cos 2t).$$

Da die Wronski-Determinante $W(t) = \det\big(\boldsymbol{\varphi}_1(t), \boldsymbol{\varphi}_2(t)\big) = 2 \neq 0$ ist, handelt es sich tatsächlich um eine Basis. Die Lösungen der DGL 2. Ordnung stehen dann jeweils in der ersten Zeile: $\varphi_1(t) = \cos 2t$ und $\varphi_2(t) = \sin 2t$.

Für eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL suchen wir jeweils partikuläre Lösungen für die beiden DGLn $y'' + 4y = x^2$ und $y'' + 4y = 5\cos 2x$. Die Summe ist dann die gesuchte spezielle Lösung.

Wir verwenden die Methode aus der Vorlesung, die sich aus der Variation der Konstanten ergab. Sind φ_1, φ_2 wie oben konstruiert, so erhält man eine Lösung der inhomogenen Gleichung nach der Formel

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) \cdot \int_{t_0}^{t} \frac{-\varphi_2(s) r(s)}{W(s)}\, ds + \varphi_2(t) \cdot \int_{t_0}^{t} \frac{\varphi_1(s) r(s)}{W(s)}\, ds\,,$$

und $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi, \varphi')$ ist dann eine Lösung des inhomogenen Systems. Wir wählen hier $t_0 = 0$.

1. Fall: $r(x) = x^2$.

Hier brauchen wir die Integrale

$$\begin{aligned} \int_0^t s^2 \sin 2s\, ds &= \frac{1}{8}\Big(2\cos 2t + 4t\sin 2t - 4t^2\cos 2t - 2\Big) \\ \text{und} \quad \int_0^t s^2 \cos 2s\, ds &= \frac{1}{8}\Big(-2\sin 2t + 4t\cos 2t + 4t^2 \sin 2t\Big). \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \varphi_p(t) &= -\frac{1}{2}\cos 2t \int_0^t s^2 \sin 2s\, ds + \frac{1}{2}\sin 2t \int_0^t s^2 \cos 2s\, ds \\ &= -\frac{1}{16}\Big(2\cos^2 2t + 4t\sin 2t\cos 2t - 4t^2\cos^2 2t - 2\cos 2t\Big) \\ &\quad + \frac{1}{16}\Big(-2\sin^2 2t + 4t\sin 2t\cos 2t + 4t^2\sin^2 2t\Big) \\ &= \frac{1}{16}\big(-2 + 4t^2 + 2\cos 2t\big). \end{aligned}$$

Nach einer solchen Rechnung empfiehlt sich die Probe. Tatsächlich ist $\varphi_p''(t) + 4\varphi_p(t) = t^2$. Mit anderen Methoden kommt man auch zu einfacheren Lösungen (ohne Cosinus-Term).

2. Fall: $r(x) = 5\cos 2x$.

Diesmal braucht man die folgenden Integrale, die man leicht durch partielle Integration gewinnen kann:

$$\begin{aligned} \int_0^t \sin 2s \cos 2s \, ds &= \frac{1}{4} \sin^2 2t \\ \text{und} \qquad \int_0^t \cos^2 2s \, ds &= \frac{1}{4}(2t + \cos 2t \sin 2t). \end{aligned}$$

Damit ist

$$\varphi_p(t) = -\frac{5}{8} \cos 2t \sin^2 2t + \frac{5}{8} \sin 2t\big(2t + \cos 2t \sin 2t\big) = \frac{5}{4}\, t \sin 2t.$$

Die allgemeine Lösung der DGL $y'' + 4y = x^2 + 5\cos(2x)$ ist nun insgesamt

$$\varphi(t) = \frac{1}{4}\, t^2 - \frac{1}{8} + \frac{5}{4}\, t \sin 2t + c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t.$$