Lösungen und Lösungshinweise zum Grundkurs Analysis 1

Lösungen zu den Aufgaben in 1.1

A. (a) ist falsch, (b) ist falsch, (c) ist wahr, (d) und (e) sind falsch.

B. (a): 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12.

(b) Mit quadratischer Erweiterung erhält man: $|x - 4/3| < 1/3$, also $x < 1$ oder $x > 5/3$.

(c): Auflösung der quadratischen Gleichung $2x - 3 = (3x - 5)^2$ liefert $x = 2$ und $x = 14/9$. Aber damit $3x-5 = \sqrt{2x-3} \geq 0$ ist, muss $x \geq 5/3 = 1.666\ldots$ sein. Nur $x = 2$ ist eine passende Lösung.

(d): Die Menge enthält nur 1 und 2.

(e): Man muss etwas knobeln. Die gesuchte Menge ist $= \{1, 2, 3, 5, 10\}$.

C. Es ist zu zeigen, dass die Aussagen „$(x \in A)$ **oder** $\big((x \in B)$ **und** $(x \in C)\big)$“ und „$\big((x \in A)$ **oder** $(x \in B)\big)$ **und** $\big((x \in A)$ **oder** $(x \in C)\big)$“ äquivalent sind. Man macht das am besten mit Hilfe von Wahrheitstafeln.

D. Hier ist versehentlich nur nach einer völlig trivialen Eigenschaft gefragt worden (es ist ja $A \cup B = B \cup A$ und $A \cap B = B \cap A$). Zur Rettung der Aufgabe kann man noch versuchen, die Formel $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$ zu beweisen, und zeigen, dass aus $A\Delta B = A\Delta C$ die Aussage $B = C$ folgt.

E. Diese Aufgabe kann nur sinnvoll gelöst werden, wenn die Axiome der reellen Zahlen und Satz 1.1.3 behandelt wurden. Weil a/b hier als die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung $bx = a$ definiert wurde und $b(b^{-1}a) = (bb^{-1})a = 1 \cdot a = a$ ist, muss $a/b = b^{-1}a$ sein.

a) Die erste Aussage folgt aus der Definition. Weil $1 \cdot 1 = 1$ ist, ist $1^{-1} = 1$, also $n/1 = 1^{-1} \cdot n = 1 \cdot n = n$.

b) Ist $a/b = c/d$, so ist $b^{-1}a = d^{-1}c$, also

$$bc = b(dd^{-1})c = (bd)(d^{-1}c) = (bd)(b^{-1}a) = (bd)(ab^{-1}) = \ldots = ad.$$

Ist umgekehrt $ad = bc$, so ist

$$b^{-1}a = b^{-1}(ad)d^{-1} = b^{-1}(bc)d^{-1} = (b^{-1}b)(cd^{-1}) = d^{-1}c.$$

c) Es ist $(ax)b = (xa)b = b(xa) = (bx)a$, also $(ax)/(bx) = a/b$.

Es ist $(xy)(x^{-1}y^{-1}) = y(xx^{-1})y^{-1} = yy^{-1} = 1$, also $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}(a/b)\cdot(c/d) \;=\; (b^{-1}a)(d^{-1}c) &= b^{-1}(ad^{-1})c \;=\; b^{-1}(d^{-1}a)c \\ &= (b^{-1}d^{-1})(ac) \;=\; (bd)^{-1}(ac) \\ &= (ac)/(bd)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(a/b)+(c/d) \;=\; b^{-1}a + d^{-1}c &= b^{-1}a + (b^{-1}b)(d^{-1}c) \\ &= b^{-1}\big(a + b(d^{-1}c)\big) \\ &= b^{-1}\big((d^{-1}d)a + d^{-1}(bc)\big) \\ &= (b^{-1}d^{-1})(da+bc) \;=\; (bd)^{-1}(ad+bc) \\ &= (ad+bc)/(bd).\end{aligned}$$

Lösungen zu den Aufgaben in 1.2

A. a) Es gibt ein x, für das **nicht** die Aussage $A(x)$ gilt.

b) Es gibt ein x, so dass die Aussage $A(x,y)$ für kein y gilt.

B. Die Aussagen sind nicht äquivalent. Beispiel: „Jeder Mensch besitzt eine Mutter“ und „Es gibt eine Frau, die die Mutter von jedem Menschen ist“.

C. Man führt die Aussagen auf die entsprechenden logischen Sachverhalte zurück. Dann muss man allerdings noch die folgenden Regeln beweisen:

$$\big(\exists\, x \,:\, A(x)\big)\,\textbf{und}\,B \iff \exists\, x \,:\, \big(A(x)\,\textbf{und}\,B\big)$$

und

$$\big(\forall\, x \,:\, A(x)\big)\,\textbf{oder}\,B \iff \forall\, x \,:\, \big(A(x)\,\textbf{oder}\,B\big)$$

Die erste Regel kann man folgendermaßen einsehen: Die Aussage „$\big(\exists\, x \,:\, A(x)\big)$ **und** B“ bedeutet, dass für ein spezielles x_0 die Aussage „$A(x_0)$ **und** B“ wahr ist. Dann ist aber auch die Aussage „$\exists\, x \,:\, \big(A(x)\,\textbf{und}\,B\big)$“ wahr, und die Umkehrung gilt genauso. Die zweite Regel erhält man aus der ersten durch Verneinung.

Bei der dritten Regel kann man ein $x \in X$ betrachten. Dann muss man nur zeigen:

$$\textbf{nicht}\,\big(\exists\, i \in I \,:\, x \in A_i\big) \iff \big(\forall\, i \,:\, \textbf{nicht}\,(x \in A_i)\big).$$

Das ist aber klar, wegen der Verneinungsregeln für Quantoren.

D. Sei $N(n) := n^3 + 2n$. Dann ist $N(3k) = 3 \cdot (9k^3 + 2k)$, $N(3k+1) = (3x+1) + 2(3k+1) = 3(x+2k+1)$ und $N(3k+2) = (3y+8) + 2(3k+2) = 3(y+2k+4)$, also $N(n)$ immer durch 3 teilbar.

E. a) $n^3 + 11n$ ist immer gerade, also durch 2 teilbar. Und wie bei der obigen Aufgabe folgt die Teilbarkeit durch 3.

b) Hier kann man Induktion benutzen. Für $n = 1$ kommt 0 heraus, das ist durch 27 teilbar. Ist die Behauptung für n bewiesen, also $N := 10^n + 18n - 28$ durch 27 teilbar, so ist

$$10^{n+1} + 18(n+1) - 28 = 10^{n+1} - 10^n + 18 + N = 9 \cdot (10^n + 2) + N.$$

Weil $10^n + 2 = 9x + 1 + 2$ (mit einer ganzen Zahl x) durch 3 teilbar ist, folgt die Behauptung für $n + 1$.

F. Ist $0 < a < b$, so ist auch $0 < a^2 < ab < b^2$. Mit einem trivialen Induktionsbeweis folgt die allgemeine Aussage. Betrachtet man auch negative Zahlen, so wird die Aussage falsch. Zum Beispiel ist $-2 < -1 < 1$ und $(-2)^2 > (-1)^2 = 1^2$. Allerdings gilt: Ist $a < b < 0$, so ist $0 < b^2 < a^2$.

G. Ist $0 < a < 1$, so ist auch $0 < 1 - a < 1$ und $0 < 1 - a^2 < 1$. Mit der Bernoulli'schen Ungleichung ist dann

$$(1-a)^n(1+na) < (1-a)^n(1+a)^n = (1-a^2)^n < 1 < n.$$

Daraus folgt die Behauptung.

H. Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist die Formel

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

zu beweisen. Wir führen Induktion nach n.

Der Fall $n = 1$ ist trivial, auf beiden Seiten erhält man den Ausdruck $a + b$.

Die Formel sei nun für $n \geq 1$ schon bewiesen. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n \cdot (a+b) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \cdot (a+b) \\
&\qquad \text{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \\
&\qquad \text{(distributiv ausmultipliziert)} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} \\
&\qquad \text{(Umnummerierung in der 2. Summe, Zusammenfassung)} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} \\
&\qquad \text{(Additionsformel für Binomialkoeffizienten)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k .
\end{aligned}$$

I. a) Der erste Beweis ist simpel. Der Induktionsanfang ist trivial, und es ist

$$\sum_{k=1}^{n+1} = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} .$$

b) Auch bei der zweiten Formel ist der Induktionsanfang trivial. Induktionsschluss:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \frac{n(n+1)}{6}(2n+1) + (n+1)^2 \\
&= \frac{n+1}{6}\big(n(2n+1) + 6(n+1)\big) \\
&= \frac{n+1}{6}\big(2n^2 + 7n + 6\big) \;=\; \frac{n+1}{6}\big(2n(n+2) + 3(n+2)\big) \\
&= \frac{n+1}{6}(n+2)(2n+3).
\end{aligned}$$

J. Wir verwenden Induktion nach n und müssen $1 \le k \le n$ voraussetzen.

Ist $n = 1$, so steht links eine 1 und rechts ebenfalls.

Nun sei die Formel für n bewiesen. Dann ist

$$\begin{aligned}\sum_{i=k}^{n+1}\binom{i-1}{k-1} &= \sum_{i=k}^{n}\binom{i-1}{k-1}+\binom{n}{k-1} = \binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\\ &= \binom{(n+1)-1}{k-1}+\binom{(n+1)-1}{k} = \binom{n+1}{k}.\end{aligned}$$

Damit ist die Induktion abgeschlossen.

K. Es ist

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\Big) = 1-\frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}\,.$$

L. Es ist

$$n^2 = \sum_{i=1}^{n}\big(i^2-(i-1)^2\big) = \sum_{i=1}^{n}(2i-1) = \sum_{i=0}^{n-1}(2i+1).$$

M. Es ist $1-\dfrac{1}{k^2} = \dfrac{k^2-1}{k^2} = \dfrac{(k-1)(k+1)}{k\cdot k}$, also

$$P_n = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\cdot\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\cdots\frac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n}\,.$$

Ohne allzu genau hinzusehen, rät man jetzt schon, dass $P_n = (n+1)/2n$ ist. Der genaue Beweis kann mit Induktion geführt werden.

N. a) Ist $x > 0$, so ist $x^2 = x \cdot x > 0$, nach dem 3. Axiom der Anordnung. Ist $x < 0$, so ist $-x > 0$ und $x^2 = (-x)(-x) > 0$. Insbesondere ist dann $1 = 1 \cdot 1 > 0$.

b) Die Menge $M := \{1\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\}$ enthält definitionsgemäß die 1. Sei nun $x \in M$ ein beliebiges Element. Ist $x = 1$, so ist $x+1 = 1+1 = 2 \in M$. Ist $x \neq 1$, so ist $x \geq 2$, also $x+1 \geq 2+1 > 2$ und wieder $x+1 \in M$. Also ist M induktiv. Da $\mathbb{N}$ in jeder induktiven Menge liegt, muss $\mathbb{N} \subset M$ gelten. Also enthält $\mathbb{N}$ keine reelle Zahl x mit $1 < x < 2$.

c) Wir zeigen durch Induktion: Ist $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 2$, so gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m+1 = n$. Der Induktionsanfang ist der Fall $n = 2$, und der ist klar, weil $2 = 1+1$ ist. Der Induktionsschluss ist trivial, denn $n+1$ hat schon die gewünschte Gestalt. Die Induktionsvoraussetzung wird hier gar nicht gebraucht.

Wir zeigen zunächst: Sind $n, m \in \mathbb{N}$ und ist $m - n > 0$, so ist $m - n \in \mathbb{N}$. Der Beweis wird durch Induktion nach n geführt.

- $n = 1$: Ist $m - 1 > 0$, so ist $m > 1$ und besitzt einen Vorgänger, $m = m' + 1$ mit $m' \in \mathbb{N}$. Also ist $m - 1 = m' \in \mathbb{N}$.
- Ist die Behauptung für n bewiesen und $m-(n+1) > 0$, also $m-n > 1$. Dann ist $m - n \in \mathbb{N}$ (nach Induktionsvoraussetzung), und es gibt ein k mit $k+1 = m-n$. Also ist auch $m-(n+1) = k \in \mathbb{N}$.

Zurück zur ursprünglichen Aufgabe! Sei $n < m + 1$. Wäre $m = 1$, so wäre $n < 2$, also $n = 1$ und nichts mehr zu zeigen. Ist nun $m \geq 2$ und nicht $n \leq m$, so muss $m < n$ und außerdem $m = m' + 1$ (mit $m' \in \mathbb{N}$) sein. Daraus folgt $m'+1 < n < m'+2$, also $1 < n-m' < 2$. Das kann nicht sein, weil $n-m' \in \mathbb{N}$ ist. Widerspruch1

Lösungen zu den Aufgaben in 1.3

A. a) Nach der 2. Dreiecksungleichung ist $|a|-|b| \leq |a - b|$ und $|a| = |b - (b - a)| \geq |b| - |a - b|$, also $-|a - b| \leq |a| - |b|$.

b) Ist $x \leq -1$, so ist $x - 3 < x - 1 < x + 1 \leq 0$. Die Gleichung

$$-(x + 1) - (x - 1) - (x - 3) = 3 + x, \qquad \text{also } 4x = 0,$$

hat in diesem Bereich keine Lösung.

Ist $-1 < x \leq 1$, so ist $x - 3 < x - 1 \leq 0 < x + 1$. Die Gleichung

$$(x + 1) - (x - 1) - (x - 3) = 3 + x, \qquad \text{also } 2x = 2,$$

hat die Lösung $x = 1$.

Ist $1 < x \leq 3$, so ist $x - 3 \leq 0 < x - 1 < x + 1$. Die Gleichung

$$(x + 1) + (x - 1) - (x - 3) = 3 + x, \qquad \text{also } x = x,$$

wird in dem angegebenen Bereich von allen Zahlen erfüllt.

Ist $x > 3$, so ist $0 < x - 3 < x - 1 < x + 1$. Die Gleichung

$$(x + 1) + (x - 1) + (x - 3) = 3 + x, \qquad \text{also } 2x = 6,$$

hat im angegebenen Bereich keine Lösung.

Also ist $[1, 3]$ die Lösungmenge.

c) Ist $x \leq 1/2$, so ist $2x-1 \leq 0$ und $x-1 < 0$. Dann hat man die Ungleichung

$$1 - 2x < 1 - x, \qquad \text{also } x > 0.$$

Ist $1/2 < x < 1$, so ist $2x - 1 > 0$ und $x - 1 < 0$. Das ergibt die Ungleichung $2x - 1 < 1 - x$, also $3x < 2$.

Ist $x \geq 1$, so ist $2x - 1 > 0$ und $x - 1 \geq 0$, und wir haben die Ungleichung $2x - 1 < x - 1$, also $x < 0$. Das kann nicht sein.

Die Lösungsmenge ist also die Menge $\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 2/3\}$.

B. a) $\inf(M_1) = 0 \notin M_1$ und $\sup(M_1) = 1 \in M_1$.

b) Weil $1 = 1/1 > 1 - 1/1 = 0$ ist, gehören 0 und 1 nicht zu M_2. Es ist aber $\inf(M_2) = 0$ und $\sup(M_2) = 1$.

c) Es ist $M_3 = \{x \in \mathbb{R} : -2 < x^2 - 1 < 2\} = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x^2 < 3\} = (-\sqrt{3}, +\sqrt{3})$, also $\inf(M_3) = -\sqrt{3}$ und $\sup(M_3) = \sqrt{3}$.

C. Ansatz: $|a_n| < \varepsilon \iff (3n-1)/2 > 1/\varepsilon \iff n > 2/(3\varepsilon) + 1/3$.

Dann schreibt man den Beweis richtig auf: Sei $\varepsilon > 0$. Ist $n_0 > 2/(3\varepsilon) + 1/3$ (was nach Archimedes möglich ist), so folgt für $n \geq n_0$ die Ungleichung $|a_n| < \varepsilon$.

D. Es ist $b_n = 1 - \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$, und das ist offensichtlich eine Nullfolge.

E. Es ist $c_n = \dfrac{1 + 2 + \cdots + n}{n^2} = \dfrac{n(n+1)}{2n^2} = \dfrac{n+1}{2n} = \dfrac{1}{2}\big(1 + \dfrac{1}{n}\big) \geq \dfrac{1}{2}$. Also kann c_n keine Nullfolge sein.

F. Ist $0 < a_n, b_n < \varepsilon$, so ist

$$0 < \frac{a_n^2 + b_n^2}{a_n + b_n} < \frac{\varepsilon(a_n + b_n)}{a_n + b_n} = \varepsilon.$$

Diese Ungleichungen kann man verwenden, um zu zeigen, dass (c_n) eine Nullfolge ist.

G. Ist $a \geq 0$, so ist $\sqrt{a}$ die eindeutig bestimmte Zahl $x \geq 0$ mit $x^2 = a$.

a) Sei $u := \sqrt{x}$ und $v := \sqrt{y}$, so ist $u^2 = x$ und $v^2 = y$, also $(uv)^2 = u^2v^2 = xy$ und daher $uv = \sqrt{xy}$.

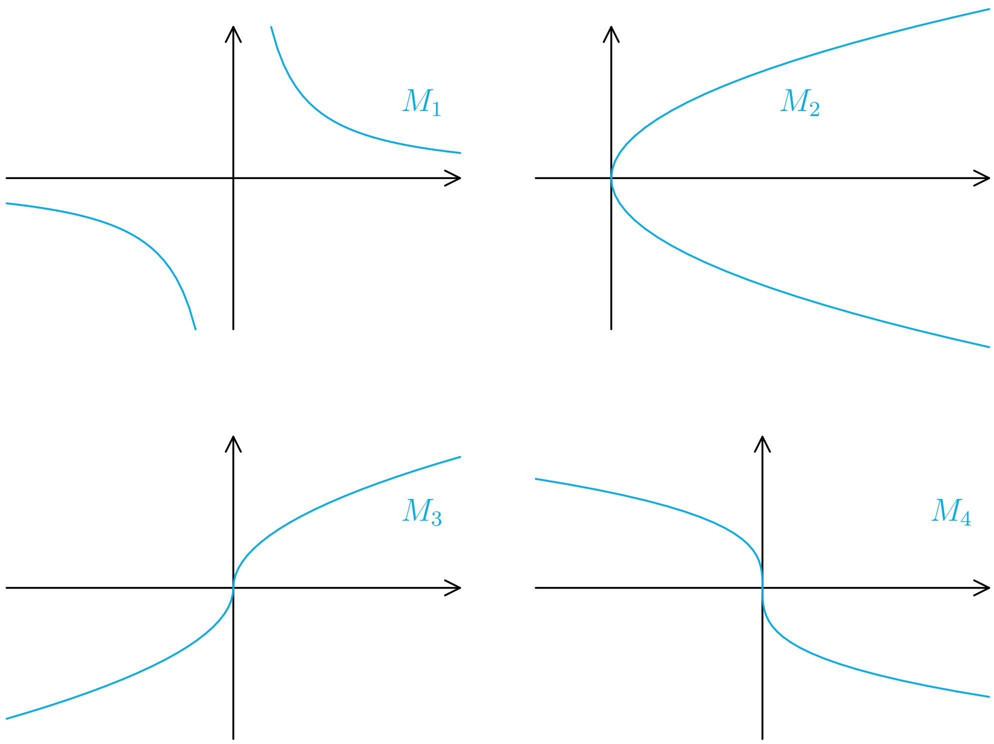
b) Zum Beispiel ist $3 = \sqrt{9} = \sqrt{4+5}$, aber $\sqrt{4} + \sqrt{5} = 2 + \sqrt{5} = 4.236\ldots$

c) Wäre $0 \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{y}$, so wäre auch $0 \leq x \leq y$. Letzteres ist aber falsch. Also muss $\sqrt{x} > \sqrt{y}$ sein.

d) Es ist $x + y - 2\sqrt{xy} = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$, also $\sqrt{xy} \leq (x+y)/2$.

Lösungen zu den Aufgaben in 1.4

A.



Mit Ausnahme von M_2 sind alles Funktionsgraphen.

B. Eine affin-lineare Funktion hat die Gestalt $f(x) = mx + c$. Setzt man die vorgeschriebenen Werte ein, so kann man m und c ausrechnen. Das ergibt in diesem Fall

$$f(x) = \begin{cases} 2 + 2x & \text{für } -1 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{3}(16 - 4x) & \text{für } 1 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

Eine quadratische Funktion g, die eine nach unten geöffnete Parabel mit Scheitelpunkt (x_s, y_s) beschreibt, hat die Gestalt $g(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$, mit einer reellen Zahl $a < 0$. Schreibt man noch einen Wert vor, so kann a ausrechnen. Hier ergibt sich

$$g(x) = -\frac{4}{9}(x - 1)^2 + 4.$$

C. Zunächst muss ein **Druckfehler** korrigiert werden. Es soll natürlich $g(x) = x + 1$ für $x > 2$ sein.

Man überzeugt sich leicht davon, dass

$$g(x) \begin{cases} < 0 & \text{für } x < 1/2, \\ \geq 0 & \text{für } x \geq 1/2 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad f(x) \begin{cases} \leq 2 & \text{für } x \leq -1/2\,, \\ > 2 & \text{falls } x > -1/2 \end{cases}$$

ist. Daraus folgt:

$$f \circ g(x) := \begin{cases} 4x+1 & \text{für } x < 1/2, \\ 4x^2 - 4x + 4 & \text{für } 1/2 \le x \le 2, \\ x^2 + 2x + 4 & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

und

$$g \circ f(x) := \begin{cases} 4x+5 & \text{für } x \le -1/2, \\ 2x+4 & \text{für } -1/2 < x < 0, \\ x^2 + 4 & \text{für } x \ge 0. \end{cases}$$

D. Ist $F(x_1) = F(x_2)$, so ist $(x_1, f(x_1)) = (x_2, f(x_2))$, also $x_1 = x_2$. Der Injektivitätsbeweis ist also trivial. Dennoch ist das Ergebnis nicht unwichtig.

E. Es ist

$$\begin{aligned} \chi_{M\cap N}(x) = 1 &\iff x \in M \cap N \iff x \in M \textbf{ und } x \in N \\ &\iff \chi_M(x) = 1 \textbf{ und } \chi_N(x) = 1 \iff \chi_M(x) \cdot \chi_N(x) = 1. \end{aligned}$$

Und es ist

$$\begin{aligned} \chi_{M\cup N}(x) = 1 &\iff x \in M \cup N \\ &\iff (x \in M \setminus N) \textbf{ oder } (x \in N \setminus M) \textbf{ oder } (x \in M \cap N) \\ &\iff (\chi_M(x) = 1 \textbf{ und } \chi_N(x) = 0) \textbf{ oder } \\ &\qquad (\chi_N(x) = 1 \textbf{ und } \chi_M(x) = 0) \textbf{ oder } \\ &\qquad (\chi_M(x) = \chi_N(x) = 1) \\ &\iff \chi_M(x) + \chi_N(x) - \chi_M(x) \cdot \chi_N(x) = 1. \end{aligned}$$

F. a) f und g seien beide injektiv. Ist $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$, so ist $f(x_1) = f(x_2)$ und daher auch $x_1 = x_2$. Also ist $g \circ f$ injektiv.

b) Seien f und g beide surjektiv. Ist $z \in C$ vorgegeben, so gibt es ein $y \in B$ mit $g(y) = z$ und dann ein $x \in A$ mit $f(x) = y$.

G. Sei $y_0 \in \mathbb{R}$ beliebig. Ist $y_0 \le 3$, so ist $x_0 := (y_0 + 1)/2 \le 2$ und $f(x_0) = 2x_0 - 1 = y_0$. Für beliebiges $x \le 2$ und $x \ne x_0$ ist $f(x) = 2x - 1 \ne 2x_0 - 1 = y - 0$. Für $x > 2$ ist $f(x) = x + 1 > 3$ und damit erst recht $\ne y_0$.

Ist $y_0 > 3$, so ist $x_0 := y_0 - 1 > 2$ und $f(x_0) = x_0 + 1 = y_0$. Für beliebiges $x > 2$ und $x \ne x_0$ ist $f(x) = x + 1 \ne x_0 + 1 = y_0$, und für $x \le 2$ ist $f(x) = 2x - 1 \le 3$ und damit ebenfalls $\ne y_0$.

Alles zusammen zeigt, dass jedes y ein Urbild besitzt (also f surjektiv ist) und dass jedes y nur einmal als Bild vorkommt, also f injektiv ist. Damit ist f sogar bijektiv, und die Umkehrabbildung ergibt sich aus dem Surjektivitätsbeweis:

$$f^{-1}(y) := \begin{cases} \frac{1}{2}(y+1) & \text{für } x \le 3, \\ y - 1 & \text{für } y > 3. \end{cases}$$

H. a) $f(x) = g(x) = x$ ist streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$, nicht aber $f(x) \cdot g(x) = x^2$.

b) Zusatzvoraussetzung: $f > 0$ und $g < 0$ auf $\mathbb{R}$. Ist $x_1 < x_2$, so ist $0 < f(x_1) < f(x_2)$ und $0 < g(x_1) < g(x_2)$. Deshalb ist

$$f(x_1)g(x_1) < f(x_2)g(x_1) < f(x_2)g(x_2),$$

also $f \cdot g$ streng monoton wachsend.

I. Der Beweis wird schrittweise geführt.

1) Weil $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$ ist, muss $f(0) = 0$ sein.

2) Wegen $0 = f(0) = f(x - x) = f(x) + f(-x)$ ist $f(-x) = -f(x)$.

3) Für $k \in \mathbb{N}$ ist $f(kx) = f(x + \cdots + x) = f(x) + \cdots + f(x) = k \cdot f(x)$.

4) Sei $a := f(1)$. Dann gilt für $n, m \in \mathbb{N}$

$$am = m \cdot f(1) = f(m) = f\Big(n \cdot \frac{m}{n}\Big) = n \cdot f\Big(\frac{m}{n}\Big),$$

also $f\Big(\dfrac{m}{n}\Big) = a \cdot \dfrac{m}{n}$.

5) Wegen (2) und (4) ist $f(q) = aq$ für jede rationale Zahl q.

6) Sei x reell und beliebig. Wir nehmen an, es ist $f(x) \neq ax$.

- a) Ist $f(x) < ax$, so gibt es ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $f(x) < aq < ax$. Weil jetzt $q < x$ und $f(q) = aq > f(x)$ ist, kann dieser Fall nicht eintreten.
- b) Den Fall $f(x) > ax$ führt man genauso zum Widerspruch.

Also muss $f(x) = ax$ sein.

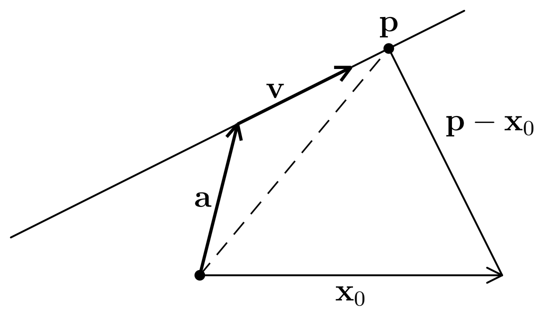
Lösungen zu den Aufgaben in 1.5

A. Es ist $\mathbf{x} = (-14, 73, 42)$.

B. Es ist $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{14}$, $\|b\| = \sqrt{74}$ und $\|\mathbf{c}\| = p\sqrt{134}$, sowie

$$\text{dist}(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = \|\mathbf{c} - \mathbf{b}\| = \sqrt{74 + 36p + 134p^2}.$$

C. Sei $\mathbf{a} := (0, 1, 1)$ und $\mathbf{v} := (4, 1, 0)$. Gesucht ist $\mathbf{p} = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$ mit $(\mathbf{p} - \mathbf{x}_0) \bullet \mathbf{v} = 0$.



Die Gleichung liefert $0 = (4t-10, t-3, -4) \bullet (4,1,0) = 17t - 43$, also $t = 43/17$. Damit ist $\mathbf{p} = \frac{1}{17}(172, 60, 17)$.

D. Es soll $(c_1, c_2, c_3) \bullet (1, -1, 0) = (c_1, c_2, c_3) \bullet (0, 1, -1) = 0$ sein. Das liefert die Gleichungen $c_1 - c_2 = c_2 - c_3 = 0$, also $\mathbf{c} = (x, x, x)$ mit einem beliebigen $x \in \mathbb{R}$. Die Aufgabe ist übrigens nicht besonders gut gestellt, denn der Nullvektor kann sofort ohne Rechnung als Lösung erkannt werden. Gemeint ist aber wohl eine Lösung $\neq \mathbf{0}$.

E. Es ist $(7,3) - (-1,1) = (8,2)$ und $(3,-3) - (1,5) = (2,-8)$. Zufällig stehen die beiden Geraden aufeinander senkrecht.

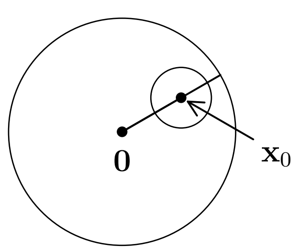
Ein Punkt auf L_1 hat die Gestalt $\mathbf{x} = (-1+8t, 1+2t)$. Liegt $\mathbf{x}$ auch auf L_2, so hat $\mathbf{x}$ die Gestalt $\mathbf{x} = (1+2s, 5-8s)$. Gleichsetzen liefert $8t = 2+2s$ und $2t = 4-8s$, also $s = 4t-1$ und $t = 2-4s$. Es gibt genau eine Lösung, nämlich $t = 2 - 16t + 4 = 6 - 16t$, also $t = 6/17$ und $\mathbf{x} = \frac{1}{17}(31, 29)$.

F. Es ist

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|^2 &= (\mathbf{a}-\mathbf{b}) \bullet (\mathbf{a}-\mathbf{b}) = \mathbf{a}\bullet\mathbf{a} - \mathbf{a}\bullet\mathbf{b} - \mathbf{b}\bullet\mathbf{a} + \mathbf{b}\bullet\mathbf{b} \\ &= \|\mathbf{a}\|^2 - 2\,\mathbf{a}\bullet\mathbf{b} + \|\mathbf{b}\|^2 \end{aligned}$$

und $\mathbf{a}\bullet\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cos\angle(\mathbf{a},\mathbf{b})$.

G. Hier ist eine Skizze:



Sei $\varepsilon := \dfrac{1}{2}(2 - \|\mathbf{x}_0\|) = 1 - \dfrac{1}{2}\|\mathbf{x}_0\|$. Ist $\mathbf{x} \in B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$, so gilt:

$$\|\mathbf{x}\| \le \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\| + \|\mathbf{x}_0\| < 1 - \frac{1}{2}\|\mathbf{x}_0\| + 2 < 2.$$

H. Unter Verwendung der Formel $(z-w)(z+w) = z^2 - w^2$ kann man Nenner leicht reell machen. Dann erhält man:

$$z_1 = 1 + \mathrm{i}\,, \quad z_2 = 0 \quad \text{und} \quad z_3 = 3 + 4\,\mathrm{i}\,.$$

I. a) Offensichtlich ist $w_1 = 2$ und dann auch $|w_1| = 2$.

b) Es ist $|-1+\mathrm{i}\,| = \sqrt{1-\mathrm{i}^{\,2}} = \sqrt{2}$, also $|w_2| = \sqrt{2}^{\,3} = 2\sqrt{2}$.

J. Es ist $(1-\mathrm{i}\,)(2-\mathrm{i}\,)(3-\mathrm{i}\,) = (1-3\,\mathrm{i}\,)(3-\mathrm{i}\,) = -10\,\mathrm{i}$, also $z = -5/(10\,\mathrm{i}\,) = \mathrm{i}\,/2$.

K. Sei $z = x + \mathrm{i}\,y$. Dann ist

$$\begin{aligned}
0 \le |z-\mathrm{i}\,| < |z+\mathrm{i}\,| \quad &\iff \quad 0 \le (z-\mathrm{i}\,)(\overline{z}+\mathrm{i}\,) < (z+\mathrm{i}\,)(\overline{z}-\mathrm{i}\,) \\
&\iff \quad 0 \le z\overline{z} - \mathrm{i}\,\overline{z} + \mathrm{i}\,z + 1 < z\overline{z} + \mathrm{i}\,\overline{z} - \mathrm{i}\,z + 1 \\
&\iff \quad -1 - z\overline{z} \le \mathrm{i}\,(z-\overline{z}) < \mathrm{i}\,(\overline{z}-z) \\
&\iff \quad -1 - z\overline{z} \le -2y < 2y \\
&\iff \quad y > 0 \textbf{ und } 1 + x^2 + y^2 \ge 2y \\
&\iff \quad y > 0\,,
\end{aligned}$$

denn $1+x^2+y^2-2y = x^2+(y-1)^2 \ge 0$ ist immer erfüllt. Die Lösungsmenge der Ungleichung ist also die obere Halbebene $H := \{z = x + \mathrm{i}\,y \,:\, y > 0\}$.

L. Ist $z^2 = -2\,\mathrm{i}$, so ist $|z|^2 = 2$, also $|z| = \sqrt{2}$. Damit ist $z = w\sqrt{2}$ mit einer komplexen Zahl w, deren Quadrat $= -\,\mathrm{i}$ ist. Es gibt ein $t \in [0, 2\pi)$ mit $\cos t + \mathrm{i}\,\sin t = w$, also $\cos^2 t - \sin^2 t + 2\,\mathrm{i}\,\sin t \cos t = -\,\mathrm{i}$. Dafür muss $\cos^2 t - \sin^2 t = 0$ und $\cos t \sin t = -1/2$ sein.

Ist $\cos t = \sin t$, so ist $\cos t \sin t = \cos^2 t \ge 0$, und das kommt nicht in Frage. Also muss $\cos t = -\sin t$ sein, das ist für $t = 3\pi/4$ und $t = 5\pi/4$ der Fall. Bei beiden Stellen ist $\cos t \sin t = -1/2$. Das ergibt die beiden Lösungen

$$z_1 = -1 + \mathrm{i} \quad \text{und } z_2 = 1 - \mathrm{i}\,.$$

Die Probe zeigt, dass dies tatsächlich Lösungen sind.

Lösungen zu den Aufgaben in 1.6

A. Es ist $c_n = a_n$ und $c_j = a_j + \alpha c_{j+1}$, also

$$c_0 = a_0 + \alpha(a_1 + \alpha(a_2 + \alpha(\ldots))) = f(\alpha).$$

Ist $f(x) = x^5 - 7x^3 + 9x^2 + x + 3$ und $\alpha = 2$, so ist $n = 5$, $c_5 = 1$, $c_4 = 0 + \alpha \cdot c_5 = 2$, $c_3 = -7 + \alpha \cdot c_4 = -3$, $c_2 = 9 + \alpha \cdot c_3 = 3$, $c_1 = 1 + \alpha \cdot c_2 = 7$ und schließlich $c_0 = 3 + \alpha \cdot c_1 = 17$.

B. Es ist

$$(3x^5 - x^4 + 8x^2 - 1) : (x^3 + x^2 + x) = 3x^2 - 4x + 1, \text{ Rest } 11x^2 - x - 1,$$

und

$$(x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1) : (x^2 - 2x + 2) = x^3 + x^2 + x - 1, \text{ Rest } -3x + 1.$$

C. Ist $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ und $g(y) = \sum_{j=0}^{m} b_j y^j$, so ist

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= \sum_{j=0}^{m} b_j f(x)^j \\ &= \sum_{j=0}^{m} b_j \big((\text{Terme vom Grad} \le n-1) + a_n x^n\big)^j \\ &= \sum_{j=0}^{m} b_j \Big(\big(\text{Terme vom Grad} \le nj-1\big) + (a_n x^n)^j\Big) \\ &= \big(\text{Terme vom Grad} \le nm-1\big) + b_m a_n x^{nm}. \end{aligned}$$

Weil $a_n \neq 0$ und $b_m \neq 0$ ist, folgt die Behauptung.

D. a) Ist $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, so ist

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \sum_{k=0}^{n} a_k \big((x+h)^k - x^k\big) \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k (x^k + kx^{k-1}h + \cdots + h^k - x^k) \\ &= \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k k x^{k-1}\Big) h + h^2 \cdot g(h) \\ &= Df(x) \cdot h + h^2 \cdot g(h), \end{aligned}$$

wobei g ein Polynom in h ist, mit Koeffizienten, die von (dem festen) x abhängen.

Speziell ist $(x-\alpha+h)^n - (x-\alpha)^n = n(x-\alpha)^{n-1}h + h^2 \cdot (\ldots)$, also $D(x-\alpha)^n = n \cdot (x-\alpha)^{n-1}$.

b) Sei

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + Df(x) \cdot h + h^2 \cdot p(h) \\ \text{und} \quad g(x+h) &= g(x) + Dg(x) \cdot h + h^2 \cdot q(h). \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}(fg)(x+h) &= \big(f(x)+Df(x)h+h^2p(h)\big)\big(g(x)+Dg(x)h+h^2q(h)\big)\\ &= (fg)(x)+\big(Df(x)g(x)+f(x)Dg(x)\big)\,h+h^2(\ldots),\end{aligned}$$

also $D(fg)(x) = Df(x)g(x) + f(x)Dg(x)$.

c) f besitzt genau dann eine Nullstelle α der Vielfachheit ≥ 2, wenn $f(x) = (x-\alpha)^s \cdot g(x)$ mit $s \geq 2$ und $g(\alpha) \neq 0$ ist.

Trifft das zu, so ist

$$\begin{aligned}Df(x) &= s(x-\alpha)^{s-1}g(x) + (x-\alpha)^s Dg(x)\\ &= (x-\alpha)\cdot[s(x-\alpha)^{s-2}g(x)+(x-\alpha)^{s-1}Dg(x)],\end{aligned}$$

also α auch Nullstelle von $Df(x)$.

Sei umgekehrt α gemeinsame Nullstelle von f und Df. Wir nehmen an, dass $f(x) = (x-\alpha)^s \cdot g(x)$ mit $s = 1$ und $g(\alpha) \neq 0$ ist. Dann ist $Df(x) = 1 \cdot g(x) + (x-\alpha)\cdot Dg(x)$ und daher $0 = Df(\alpha) = g(\alpha) + 0 \cdot Dg(\alpha)$. Das ist ein Widerspruch, es muss $s \geq 2$ sein.

E. Ist p ungerade, so ist $p \geq 1$ und $f(1) = 1 + \cdots + 1 = p \neq 0$. Sei nun $\alpha \neq 1$ eine Nullstelle von f. Dann ist

$$0 = (\alpha-1)f(\alpha) = \alpha^p - 1, \qquad \text{also } \alpha^p = 1.$$

Weil p ungerade ist, muss $\alpha = 1$ sein, und das hatten wir schon ausgeschlossen. Also kann f keine (reelle) Nullstelle besitzen.

F. Es ist $k := \text{grad}(f) \geq 1$. Ist $g := 1/f$ ein Polynom, so ist auf jeden Fall $g \neq 0$ und $\text{grad}(g) \geq 0$. Dann ist $0 = \text{grad}(1) = \text{grad}(fg) = \text{grad}(f) + \text{grad}(g) \geq 1$. Das kann nicht sein, d.h., $1/f$ kann kein Polynom sein.

G. Sei $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$.

a) Sei $f(-x) = f(x)$ für alle x. Dann ist $a_1x + a_3x^3 + \cdots \equiv 0$ und daher $a_1 = a_3 = \ldots = 0$.

b) Sei $a_{2k+1} = 0$ für $k \geq 0$. Dann ist $f(x) = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \cdots$ und das ist offensichtlich eine gerade Funktion.

H. Polynomdivision ergibt

$$R(x) = x + 1 + \frac{x+2}{x^2-1} = x + 1 + \frac{x+2}{(x-1)(x+1)}\,.$$

Der Ansatz $\dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1} = \dfrac{x+2}{(x-1)(x+1)}$ liefert das Gleichungssystem $a + b = 1$ und $a - b = 2$, also $a = 3/2$ und $b = -1/2$. Damit ist

$$R(x) = x + 1 + \frac{3/2}{x-1} - \frac{1/2}{x+1}\,.$$

I. Durch Zerlegung des Nenners erhält man den komplexen Ansatz

$$R(x) = \frac{A}{x-\mathrm{i}} + \frac{B}{x+\mathrm{i}} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+2}\,.$$

Multipliziert man jeweils $R(x)$ mit der Nullstelle $x - \alpha$ und setzt man dann α ein, so erhält man den gesuchten Koeffizienten. Zum Beispiel ist

$$\begin{aligned} A &= \frac{2x^3+3x+2}{(x+\mathrm{i})(x^2+x-2)}\Big|_{x=\mathrm{i}} = \frac{-2\mathrm{i}+3\mathrm{i}+2}{2\mathrm{i}(-1+\mathrm{i}-2)} \\ &= \frac{2+\mathrm{i}}{-2-6\mathrm{i}} = -\frac{(2+\mathrm{i})(2-6\mathrm{i})}{(2+6\mathrm{i})(2-6\mathrm{i})} \\ &= -\frac{10-10\mathrm{i}}{40} = \frac{1}{4}(\mathrm{i}-1). \end{aligned}$$

Genauso erhält man

$$B = -\frac{1}{4}(1+\mathrm{i}), \quad C = \frac{7}{6} \quad \text{und} \quad D = \frac{4}{3}\,.$$

Nun ist

$$\frac{(\mathrm{i}-1)/4}{x-\mathrm{i}} - \frac{(1+\mathrm{i})/4}{x+\mathrm{i}} = \frac{(\mathrm{i}-1)(x+\mathrm{i})-(1+\mathrm{i})(x-\mathrm{i})}{4(x^2+1)} = \frac{-x-1}{2(x^2+1)}\,,$$

also $R(x) = \dfrac{-x-1}{2(x^2+1)} + \dfrac{7/6}{x-1} + \dfrac{4/3}{x+2}\,.$

J. (etwas trickreich!) Es gibt ganze Zahlen c und d, so dass alle Zahlen ca_i und db_j in $\mathbb{Z}$ liegen. Wählt man $|c|$ und $|d|$ minimal, so kann man erreichen, dass jeweils $ca_0, \ldots, ca_{n-1}$ teilerfremd und $db_0, \ldots, db_{m-1}$ teilerfremd sind. Sei $D := cd$. Wir nehmen an, dass es einen Primteiler p von D gibt. Der kann dann nicht alle ca_i und auch nicht alle db_j teilen. Also gibt es minimale Indizes i_0 und j_0, so dass p kein Teiler von ca_{i_0} und kein Teiler von sb_{j_0} ist.

Es ist $(cf)(dg) = \ldots + (ca_{i_0}db_{j_0} + pq)x^{i_0+j_0} + \ldots$ (mit einer ganzen Zahl q). Das zeigt, dass $D \cdot (fg)$ einen Koeffizienten besitzt, der nicht durch p teilbar ist. Weil fg nach Voraussetzung ganzzahlige Koeffizienten hat, ist das ein Widerspruch. Also muss $D = \pm 1$ (und dann auch $c = \pm 1$ und $d = \pm 1$) sein. Das bedeutet, dass schon alle a_i und b_j ganzzahlig waren.

K. a) Ist $u^3 + v^3 = q$ und $uv = -p/3$, so ist

$$\begin{aligned} (u+v)^3 + p(u+v) &= u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u+v) \\ &= q - p(u+v) + p(u+v) \;=\; q. \end{aligned}$$

b) Ist $u^3 + v^3 = q$ und $u^3v^3 = -p^3/27$, so sind u^3 und v^3 nach Vieta die Nullstellen des quadratischen Polynoms $y^2 - qy - p^3/27$.

Also ist $u^3 = \frac{1}{2}(q+\sqrt{q^2 + 4p^3/27})$ und $v^3 = \frac{1}{2}(q-\sqrt{q^2 + 4p^3/27})$. Die Zahlen u und v erhält man durch Ziehen der 3. Wurzel.

c) Man verwendet (a) und setzt hier $p = 63$ und $q = 316$. Dann ist $q/2 = 158$ und $p/3 = 21$, also

$$\begin{aligned} u &= \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{158 + \sqrt{158^2 + 21^3}} = \sqrt[3]{158 + 185} = 7 \\ \text{und } v &= \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{158 - \sqrt{158^2 + 21^3}} = \sqrt[3]{158 - 185} = -3 \end{aligned}$$

Eine Lösung der kubischen Gleichung ist dann $x = u + v = 4$.

Lösungen zu den Aufgaben in 2.1

A. a) Es ist $|a_n| = 1/(3 \cdot 4 \cdots (n-1)) < 1/(n-1)$, und das ist offensichtlich eine Nullfolge.

b) Die Teilfolge $b_{2k} = 1/k$ konvergiert gegen 0, die Teilfolge $b_{2k+1} = 0$ ist konstant und konvergiert ebenfalls gegen 0. Also ist (b_k) beschränkt und besitzt nur einen Häufungspunkt, ist also konvergent.

B. Sei $|b_n| \le C$ für alle n, $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es ein n_0, so dass $|a_n| < \varepsilon/C$ für $n \ge n_0$ ist. Es folgt, dass $|a_n b_n| < (\varepsilon/C) \cdot C = \varepsilon$ für $n \ge n_0$ ist.

C. $a_n = (3/5)^n + (2/5)^n$ konvergiert gegen Null.

$b_n = (6n^2 + 2)/n^2 = 6 + 2/n^2$ konvergiert gegen 6.

$c_n = u_n + v_n$ mit $u_n = 3n/3^n$ und $v_n = 2 + 1/n$. Offensichtlich konvergiert (v_n) gegen 2. Bei (u_n) ist es etwas schwieriger. Per Induktion kann man zeigen, dass $n^2 < 2^n$ für $n \ge 5$ gilt. Also ist erst recht $n^2 < 3^n$ und damit $3n/3^n < 3n/n^2 = 3/n$. Das bedeutet, dass (u_n) gegen Null und c_n gegen 2 konvergiert.

D. Es ist

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} \le \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}},$$

und die rechte Seite strebt für $n \to \infty$ gegen Null.

E. Es ist

$$\begin{aligned} a_{n+1} \ge a_n \quad &\iff \quad \frac{2n-5}{3n+5} \ge \frac{2n-7}{3n+2} \\ &\iff \quad (2n-5)(3n+2) \ge (2n-7)(3n+5) \\ &\qquad\ \ (\text{denn es ist } 3n+2 \ge 0 \text{ und } 3n+5 \ge 0) \\ &\iff \quad 6n^2 - 11n - 10 \ge 6n^2 - 11n - 35. \end{aligned}$$

Weil $10 \le 35$ ist, muss auch $a_{n+1} \ge a_n$ sein.

Es ist $a_1 = -1$, $a_2 = -3/8$, $a_3 = -1/11$, $a_4 = 1/14, \ldots, a_{100} = 193/302 \approx 0.64$. Vielleicht ist $c = 1$ eine obere Schranke? Tatsächlich ist

$$a_n \le 1 \iff 2n - 7 \le 3n + 2 \iff n \ge -9.$$

Da die rechte Aussage trivialerweise für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist, gilt auch die linke Aussage.

F. In 1.3 wurde gezeigt, dass die rationalen Zahlen dicht in $\mathbb{R}$ liegen. Es gibt also zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine rationale Zahl q_n mit $|q_n - a| < 1/n$. Dann ist klar, dass (q_n) gegen a konvergiert.

G. Nach der Bernoullischen Ungleichung ist $1 \geq u_n > 1 - n \cdot (1/n^2) = 1 - 1/n$, also $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$.

Sei $a_n := (1+1/n)^n$. Dann ist $u_n/a_n = \big((n-1)/n\big)^n = x_n$, also $\lim_{n\to\infty} x_n = 1/e$.

Es ist $y_n \cdot x_n \cdot (1 + 1/(n+1)) = a_{n+1}$, also $\lim_{n\to\infty} y_n = e^2$.

H. Wir betrachten nur den Fall, dass (a_n) monoton wächst und zeigen, dass a dann sogar obere Schranke von (a_n) ist. Wenn nicht, dann müsste es ein $a_{n_0} > a$ geben. Dann wäre aber $a_n > a_{n_0} > a$ für fast alle n und a kein Häufungspunkt.

Es folgt, dass (a_n) konvergiert, und der Grenzwert ist dann der einzige Häufungspunkt. Also konvergiert (a_n) gegen a.

I. Die Aussage ist eigentlich trivial. In jeder Umgebung von a liegen fast alle Glieder der Folge und damit auch fast alle Glieder einer beliebigen Teilfolge.

J. Es ist $a_n = n(n+1)(2n+1)/(6n^3) = (1+1/n)(2+1/n)/6$, und diese Folge konvergiert gegen $1/3$.

K. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein n_0, so dass $|a_n - a| < \varepsilon/2$ für $n \geq n_0$ gilt. Und es gibt ein $n_1 \geq n_0$, so dass $\dfrac{|a_1 - a|}{n} + \cdots + \dfrac{|a_{n_0} - a|}{n} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ für n$\geq n_1$ ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
|b_n - a| &= \Big| \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - a \Big| \\
&= \Big| \frac{(a_1 - a) + \cdots + (a_n - a)}{n} \Big| \\
&\leq \frac{|a_1 - a|}{n} + \cdots + \frac{|a_{n_0} - a|}{n} + \frac{|a_{n_0+1} - a|}{n} + \cdots + \frac{|a_n - a|}{n} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{n - n_0}{n} \; < \; \varepsilon \text{ für } n \geq n_1.
\end{aligned}$$

L. Zunächst ist $a_n > 0$ für alle n. Ist nämlich $a_i > 0$ für alle $i < n$, so ist auch $a_n = 1/(a_1 + \cdots + a_{n-1}) > 0$.

Daraus folgt, dass $a_n + 1/a_n > 1/a_n$ und damit $a_{n+1} = 1/(1/a_n + a_n) < a_n$ ist. Außerdem ist (a_n) nach unten durch Null beschränkt, also konvergent gegen eine Zahl $a \geq 0$.

Wir nehmen an, es sei $a > 0$. Da $a_n \geq a$ für alle n gilt, ist dann $a_1 + \cdots + a_n \geq n \cdot a$ und $a_{n+1} \leq 1/(na)$. Für $n > 1/a^2$ ist aber $1/(na) < a$. Das ergibt einen Widerspruch, es muss $a = 0$ sein.

M. a) (z_n) besitzt die Teilfolge $z^{2k} = (-1)^k$ mit den Häufungspunkten 1 und -1 und kann daher nicht konvergieren.

b) Es ist $|1 + \mathrm{i}\,| = \sqrt{2}$, also $|w_n| = 2^{-n/2}$. Damit ist (w_n) eine Nullfolge.

N. Konvergiert $z_n = x_n + \mathrm{i}\,y_n$ gegen $z_0 = x_0 + \mathrm{i}\,y_0$, so konvergiert (x_n) gegen x_0 und (y_n) gegen y_0. Aber dann konvergiert auch $\overline{z}_n = x_n - \mathrm{i}\,y_n$ gegen $x_0 - \mathrm{i}\,y_0 = \overline{z}_0$ und $|z_n|^2 = x_n^2 + y_n^2$ gegen $x_0^2 + y_0^2 = |z_0|^2$. Daraus folgt, dass $|z_n| = \sqrt{|z_n|^2}$ gegen $\sqrt{|z_0|^2} = |z_0|$ konvergiert.

O. Die Beweise funktionieren genauso wie bei den Grenzwertsätzen für skalare Folgen. Als Beispiel sei hier nur Aussage (c) betrachtet.

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben und ein n_0 gewählt, so dass $\|\mathbf{a}_n - \mathbf{a}\| < \varepsilon$ und $\|\mathbf{b}_n - \mathbf{b}\| < \varepsilon$ für $n \geq n_0$ gilt. Insbesondere ist dann $\|\mathbf{a}_n\|$ durch eine positive Konstante c beschränkt und daher für fast alle n

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}_n \bullet \mathbf{b}_n - \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}| &= |\mathbf{a}_n \bullet (\mathbf{b}_n - \mathbf{b}) + (\mathbf{a}_n - \mathbf{a}) \bullet \mathbf{b}| \\ &\leq \|\mathbf{a}_n\| \cdot \|\mathbf{b}_n - \mathbf{b}\| + \|\mathbf{a}_n - \mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \text{ (Cauchy-Schwarz)} \\ &\leq c \cdot \varepsilon + \|\mathbf{b}\|\varepsilon, \end{aligned}$$

und das wird beliebig klein.

P. a) Ist $\delta > 0$ gegeben und $\mathbf{x} \in U_\delta(\mathbf{x}_0)$, so ist

$$|x_\nu - x_\nu^{(0)}| \leq \sqrt{(x_1 - x_1^{(0)})^2 + \cdots + (x_n - x_n^{(0)})^2} < \delta \text{ für } \nu = 1, \ldots, n,$$

also $U_\delta(\mathbf{x}_0) \subset Q_\delta(\mathbf{x}_0)$.

Ist umgekehrt ein $\varepsilon > 0$ gegeben, $\delta := \varepsilon/\sqrt{n}$ und $\mathbf{x} \in Q_\delta(\mathbf{x}_0)$, so ist

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = \sqrt{(x_1 - x_1^{(0)})^2 + \cdots + (x_n - x_n^{(0)})^2} < \sqrt{n\delta^2} = \varepsilon,$$

also $Q_\delta(\mathbf{x}_0) \subset U_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$.

b) $Q_\delta(\mathbf{x}_0)$ ist ein Würfel, und das kartesische Produkt von Würfeln ist wieder ein Würfel.

Q. Sei $(\mathbf{x}_\nu)$ eine Folge von Punkten in A, die gegen ein $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ konvergiert. Da die Punktfolge in jeder Menge A_n liegt und da die A_n abgeschlossen sind, muss auch der Grenzwert $\mathbf{x}_0$ in jedem A_n und damit in A liegen.

R. a) (x_n) und (y_n) besitzen jeweils die Null als Häufungspunkt. Die Folge $(\mathbf{z}_n)$ setzt sich aus den beiden Teilfolgen $\mathbf{z}_{2k} = (1/k, k)$ und $\mathbf{z}_{2k+1} = (k, 1/k)$ zusammen. Hätte $(\mathbf{z}_n)$ einen Häufungspunkt $\mathbf{z}_0$, so müssten in jeder Umgebung von $\mathbf{x}_0$ wenigstens von einer der beiden Teilfolgen unendlich viele Glieder liegen. Aber das geht nicht.

b) Die Folge (x_n) konvergiere gegen x_0, die Folge (y_n) habe den Häufungspunkt y_0. Dann ist (x_0, y_0) ein Häufungspunkt von $(\mathbf{z}_n)$.

S. Die Menge A besitzt keinen Häufungspunkt, enthält also alle ihre Häufungspunkte. Damit ist sie abgeschlossen.

Die Menge B hat $\mathbf{0} = (0,0)$ als Häufungspunkt, aber der Nullpunkt gehört nicht zu B. Daher ist B nicht abgeschlossen.

Lösungen zu den Aufgaben in 2.2

A. Im 1. Schritt teilt man das Intervall von 0 bis 1 in n gleiche Teile und markiert im Intervall $I_1 := [0, (n-m)/n]$ die ersten m Teile. Das geht, weil $2m < n$ ist, also $m < n - m$, und liefert den Beitrag m/n. Der markierte Teil entspricht genau $m/(n-m)$ des Intervalls I_1.

Im zweiten Schritt teilt man das Rest-Intervall von $(n-m)/n$ bis 1 (der Länge m/n) wieder in n gleiche Teile und markiert im Intervall I_2, das aus den ersten $(n-m)/n$ des Restintervalls besteht, die ersten m davon. Das ergibt den Beitrag $(m/n)^2$, und der markierte Teil entspricht genau $m/(n-m)$ des Intervalls I_2. So geht es weiter.

B. Sei $x := 0.123123123\ldots$, also $1000x - x = 123$. Dann ist $x = 123/999 = 41/333$.

C. Eine Majorante ist die geometrische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g-1}{g^n} = \frac{g-1}{g} \sum_{n=0}^{\infty} g^{-n}.$$

D. a) $(k+1)/k^2 = 1/k + 1/k^2$ ist eine monoton fallende Nullfolge. Man kann das Leibniz-Kriterium anwenden.

b) Die zweite Reihe konvergiert gegen $\exp(-3 - \mathsf{i}) - 1$.

c) Das Quotientenkriterium hilft! Es ist $a_{n+1}/a_n = (n/(n+1))^n$, und diese Folge konvergiert gegen $1/e < 1$.

E. a) Teleskopreihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2} \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \Big(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \Big) = -\frac{1}{2}\,.$$

b) Summe zweier geometrischer Reihen, Grenzwert $= 1 - 1/4 = 3/4$.

c) Kombination zweier geometrischer Reihen, Grenzwert $= 1 + (1/2)\,\mathsf{i}$.

F. $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ ist konvergente Majorante.

G. a) Wegen der Monotonie ist $2^n a_{2^n} \ge a_{2^n} + a_{2^n+1} + \cdots + a_{2^{n+1}-1}$.

b) Ist $r \in \mathbb{N}$, so ist $2^r > 2^0 = 1$. Mit dem Widerspruchsprinzip folgt dann, dass auch $2^{r/s} = \sqrt[s]{2^r} > 1$ ist.

c) Sei $a_n = 1/n^q$ mit $q > 1$. Dann ist $2^n a_{2^n} = (2^{1-q})^n$. Also ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ eine konvergente geometrische Reihe und daher $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ auch konvergent.

H. Wenn a_n/b_n gegen 1 konvergiert, dann gibt es ein n_1, so dass $a_n/b_n > 1/2$ für $n \ge n_1$ ist. Deshalb ist $b_n < 2a_n$ für $n \ge n_1$. Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so ist nach dem Majorantenkriterium auch $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent.

Genauso gibt es ein n_2, so dass $a_n/b_n < 3/2$ für $n \ge n_2$ ist, also $a_n < 3b_n/2$. Ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent, so konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

I. a) Aus den Voraussetzungen folgt, dass $1/2 < a_n/b_n < 3/2$ für $n \ge n_0$ gilt, also $b_n < 2a_n < 3b_n$. Mit dem Majorantenkriterium (und dem Widerspruchsprinzip) folgt die Behauptung.

b) Es ist

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+10)}} \Big/ \frac{1}{n} = \frac{n}{\sqrt{n(n+10)}} = \frac{1}{\sqrt{1+10/n}},$$

und dieser Ausdruck strebt gegen 1. Der Vergleich mit der harmonischen Reihe liefert die Divergenz der zu untersuchenden Reihe.

J. a) Es ist $n!/(n+2)! = 1/\big((n+1)(n+2)\big) < 1/n^2$. Die Reihe konvergiert.

b) Sei $a > 0$, $b > 0$ und $a_n := 1/(an+b)$, sowie $b_n := 1/n$. Dann konvergiert $a_n/b_n = 1/(a+b/n)$ gegen $1/a$. Es gibt also ein n_0, so dass $a_n/b_n > 1/(2a)$ für $n \ge n_0$ gilt, also $a_n > b_n/(2a)$. Daraus folgt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert.

c) Ist $a_n := (3^n\, n!)/n^n$, so ist $a_{n+1}/a_n = 3(n+1)n^n/(n+1)^{n+1} = 3\cdot(n/(n+1))^n$. Dieser Ausdruck konvergiert gegen $3/e > 1$. Also divergiert die Reihe.

K. Die Behauptung folgt ganz einfach aus dem Beweis des Leibniz-Kriteriums.

L. Es ist $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1/(1-q)$, also

$$\frac{1}{(1-q)^2} = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} q^n\Big) \cdot \Big(\sum_{m=0}^{\infty} q^m\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n+m=k} q^{n+m} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)q^k.$$

Lösungen zu den Aufgaben in 2.3

A. a) $\lim_{x\to 3}(3x+9)/(x^2-9) = \lim_{x\to 3} 3/(x-3)$ existiert nicht.

b) $\lim_{x\to -3}(3x+9)/(x^2-9) = \lim_{x\to -3} 3/(x-3) = -1/2$.

c) $\lim_{x\to 0-} x/|x| = -1$ und $\lim_{x\to 0+} x/|x| = 1$.

d) $\lim_{x\to -1}(x^2+x)/(x^2-x-2) = \lim_{x\to -1} x/(x-2) = 1/3$.

e) $\lim_{x\to 3}(x^3-5x+4)/(x^2-2) = 16/7$.

f) $\lim_{x\to 0}(\sqrt{x+2}-\sqrt{2})/x = \lim_{x\to 0} 1/(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}) = 1/(2\sqrt{2})$.

B. Es ist $\lim_{x\to x_0-} f(x) = \lim_{x\to x_0} f_1(x) = f_1(x_0) = f_2(x_0) = \lim_{x\to x_0} f_2(x) = \lim_{x\to x_0+} f(x)$. Nach Satz ... existiert dann auch der beidseitige Limes von $f(x)$ für $x \to x_0$ und stimmt mit $f(x_0)$ überein.

C. Offensichtlich ist $f(x)$ stetig für $x \neq 1$. Weil $\lim_{x\to 1}(x^2+2x-3)/(x-1) = \lim_{x\to 1}(x+3) = 4$ ist, kann f durch Einsetzen dieses Wertes stetig ergänzt werden.

Die Funktion $g(x)$ ist nicht definiert für $x = -1$ und $x = 4$, in allen anderen Punkten stetig. Weiter ist $\lim_{x\to -1} g(x) = \lim_{x\to -1}(x^3-x^2-2x+2)/(x-4) = -2/5$, während $\lim_{x\to 4} g(x) = 42/0$ nicht existiert. Also kann g bei $x = -1$ stetig ergänzt werden, nicht aber bei $x = 4$.

D. Es ist

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2-2x+1}-2x) &= \lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-2x+1-4x^2}{\sqrt{4x^2-2x+1}+2x} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{-2x+1}{\sqrt{4x^2-2x+1}+2x} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{-2+1/x}{2+\sqrt{4-2/x+1/x^2}} = -1/2.
\end{aligned}$$

E. Division mit Rest liefert

$$\frac{4x^3+5}{-6x^2-7x} = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{9} + \frac{5+49x/9}{-6x^2-7x}\,.$$

Also ist $L(x) = (-2/3)x + 7/9$ und $g(x) := (5+49x/9)/(-6x^2-7x)$ strebt für $x \to \infty$ gegen 0.

F. Die Graphen von $y = x$ und $y = x^2$ treffen sich bei $(0,0)$ und bei $(1,1)$. Dort ist f offensichtlich stetig. In jedem anderen Punkt x_0 ist $x_0 \neq x_0^2$, und es gibt Folgen $(x_\nu), (y_\nu)$ mit $x_\nu \to x_0$, $y_\nu \to x_0$, $f(x_\nu) \to x_0$ und $f(y_\nu) \to x_0^2$. Daher kann f dort nicht stetig sein.

G. a) Ist $x = x_0 + h$, so ist $|x^2 - x_0^2| = |h^2 + 2x_0h|$. Ist $x_0 > 0$ und $|h| < \delta$, so ist $|x^2 - x_0^2| \le |h|^2 + 2x_0|h|$. Damit dieser Ausdruck $< \varepsilon$ wird, muss $|h|^2 + 2x_0|h| - \varepsilon < 0$ sein, also $|h| < \delta := -x_0 + \sqrt{x_0^2 + \varepsilon}$.

b) Ist $x_0 = 0.2$, so ergibt sich für $\varepsilon = 0.01$ die Zahl $\delta \approx 0.023$.

Ist $x_0 = 20$. so ergibt sich $\delta \approx 0.00024$.

H. Für reelle Zahlen ist $\big|\,|a| - |b|\,\big| \le |a - b|$, denn es ist

$$|a| - |b| = |(a-b) + b| - |b| \le |a-b| + |b| - |b| = |a-b|$$

und (wegen der Ungleichung $|a-b| \ge |a| - |b|$)

$$-|a-b| = -|b-a| \le -(|b| - |a|) = |a| - |b|.$$

Ist $x_0 \in I := [a,b]$ und $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so gibt es ein $\delta > 0$, so dass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für $x \in I$ und $|x - x_0| < \delta$ ist. Aber dann ist erst recht $\big|\,|f(x)| - |f(x_0)|\,\big| < \varepsilon$ für diese x, also $|f|$ in x_0 stetig.

Es ist $\max(f,g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$. Mit f und g ist auch $|f - g|$ und damit $\max(f,g)$ stetig.

I. Sei $f(x) = (x - x_0)^k \cdot f^*(x)$ und $g(x) = (x - x_0)^s \cdot g^*(x)$, mit $k \ge s$ und Polynomen f^*, g^*, die in x_0 keine Nullstelle besitzen. Dann ist $f(x)/g(x) = (x - x_0)^{k-s} \cdot f^*(x)/g^*(x)$, und der Limes für $x \to x_0$ existiert offensichtlich.

J. Es ist $p(0) = a_0 < 0$, und für $k \in \mathbb{N}$ ist $p(k) = k^n\big(a_0k^{-n} + \cdots + a_{n-1}k^{-1} + a_n\big)$. Für $k \to +\infty$ strebt die Klammer auf der rechten Seite gegen $a_n > 0$. Also ist $p(k) > 0$ für genügend großes k. Nach dem Zwischenwertsatz muss p eine positive Nullstelle besitzen.

K. Es ist $p(1) = 1 - 7 - 2 + 14 - 3 + 21 = 36 - 12 = 24 > 0$ und $p(2) = 32 - 7 \cdot 16 - 16 + 56 - 6 + 21 = -6 \cdot 16 + 71 = -25 < 0$. Nach dem Zwischenwertsatz muss zwischen 1 und 2 eine Nullstelle liegen.

Tatsächlich ist $p(x) = (x - 7)(x^2 + 1)(x^2 - 3)$, die gesuchte Nullstelle ist $x = \sqrt{3}$.

L. Ist $f(0) = 0$ oder $f(1) = 1$, so ist man fertig. Es sei also $f(0) > 0$ und $f(1) < 1$. Wir definieren $g(x) := f(x) - x$. Dann ist g stetig auf $[0,1]$, $g(0) > 0$ und $g(1) < 0$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein c zwischen 0 und 1 mit $g(c) = 0$, also $f(c) = c$.

M. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$, sowie $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben, $c := f(x_0) - \varepsilon$ und $d := f(x_0) + \varepsilon$. Dann ist $(x_0, c) \in U_-$ und es gibt ein $\delta_- > 0$, so dass $U_{\delta_-}(x_0, c) \subset U_-$ ist. Analog folgt die Existenz einer Zahl $\delta_+ > 0$, so dass $U_{\delta_+}(x_0, d) \subset U_+$ ist.

Sei nun $\delta := \min(\delta_-, \delta_+)$. Ist $|x - x_0| < \delta$, so liegt (x, c) in $U_{\delta_-}(x_0, c)$ und (x, d) in $U_{\delta_+}(x_0, d)$. Das bedeutet, dass $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ ist, also $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

N. a) Für $(x, y) \neq (0, 0)$ und $t \neq 0$ ist $f(tx, ty) = t \cdot f(x, y)$, und dieser Ausdruck strebt für festes (x, y) gegen Null.

b) Sei (a_n) eine Nullfolge und $b_n := -(1 - a_n^2)a_n$. Dann ist auch (b_n) eine Nullfolge und

$$f(a_n, b_n) = \frac{a_n^2}{a_n - (1 - a_n^2)a_n} = \frac{a_n}{1 - (1 - a_n^2)} = \frac{1}{a_n}$$

strebt für $n \to \infty$ gegen Unendlich. Also ist f im Nullpunkt nicht stetig.

O. Annahme, es gibt Folgen $\mathbf{x}_n \in K$ und $\mathbf{y}_n \in B$ mit $\operatorname{dist}(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) \to 0$. Dann gibt es eine Teilfolge $(\mathbf{x}_{n_i})$, die gegen einen Punkt $\mathbf{x}_0 \in K$ konvergiert. Es ist $\operatorname{dist}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_{n_i}) \leq \operatorname{dist}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_{n_i}) + \operatorname{dist}(\mathbf{x}_{n_i}, \mathbf{y}_{n_i})$, und das strebt gegen Null. Also konvergiert $(\mathbf{y}_{n_i})$ gegen $\mathbf{x}_0$, und weil B abgeschlossen ist, muss $\mathbf{x}_0$ zu B gehören. Das ist ein Widerspruch.

P. Sei S die Menge der Unstetigkeitsstellen von f. Es kann sich nur um Sprungstellen handeln. Ist $x \in S$ und $y_-(x) := f(x-)$, $y_+(x) := f(x+)$. Wegen der Monotonie muss $y_-(x) \leq y_+(x)$ sein und im Falle einer echten Sprungstelle sogar $y_-(x) < y_+(x)$. Dann kann man eine rationale Zahl $q(x)$ mit $y_-(x) < q(x) < y_+(x)$ finden. Sind $x_1 < x_2$ zwei Sprungstellen, so ist $y_+(x_1) \leq y_-(x_2)$, also $q(x_1) < q(x_2)$. Damit ist $\{q(x) : x \in S\}$ eine Teilmenge von $\mathbb{Q}$, und jedem Element $s \in S$ wird genau ein $q(s) \in \mathbb{Q}$ zugeordnet. Also ist S höchstens abzählbar.

Q. M_1 ist nicht einmal abgeschlossen.
M_2 ist nicht beschränkt.
M_3 ist nicht abgeschlossen, denn der Grenzwert der Folge $(1/n)$ gehört nicht zur Menge.
M_4 ist abgeschlossen und beschränkt, also kompakt.
M_5 ist nicht abgeschlossen, weil die irrationalen Punkte fehlen.
M_6 ist zwar abgeschlossen, aber nicht beschränkt.

R. Endliche Vereinigungen und Durchschnitte von abgeschlossenen Mengen sind wieder abgeschlossen. Außerdem bleiben beschränkte Mengen bei diesen Operationen beschränkt. Daraus folgt die Kompaktheit.

S. Auch hier ist klar, dass $K_1 \times \ldots \times K_n$ wieder abgeschlossen und beschränkt ist, wenn die einzelnen K_i es sind.

T. a) Klar ist, dass K eine beschränkte Menge ist. Sei nun $(\mathbf{x}_n)$ eine Folge von Punkten in K, die im $\mathbb{R}^n$ gegen ein $\mathbf{x}_0$ konvergiert. Da die Glieder der Folge in jeder Menge K_n liegen, gehört auch $\mathbf{x}_0$ zu jedem K_n und damit zu K. Also ist K auch abgeschlossen und damit kompakt.

b) Wählt man in jedem K_n einen Punkt $\mathbf{y}_n$, so erhält man eine beschränkte Folge. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt diese einen Grenzwert $\mathbf{y}_0$. Da $\mathbf{y}_0$ auch Grenzwert der in K_r enthaltenen Folge $(\mathbf{y}_n)_{n\geq r}$ ist, gehört $\mathbf{y}_0$ zu jedem K_r und damit zu K.

U. a) Ist f stetig, so ist G_f abgeschlossen und beschränkt.

b) Sei G_f kompakt und $x_0 \in [a,b]$. Ist f in x_0 nicht stetig, so gibt es ein $c > 0$ und eine Folge (x_n) in $[a,b]$, die gegen x_0 konvergiert, so dass $|f(x_n) - f(x_0)| \geq c$ für alle n ist. Die Folge $(x_n, f(x_n))$ besitzt aber eine Teilfolge $(x_{n_i}, f(x_{n_i}))$, die gegen ein Element $(x_0, y_0) \in G_f$ konvergiert. Dann muss $y_0 = f(x_0)$ sein und daher $(f(x_{n_i}))$ gegen $f(x_0)$ konvergieren. Das ist ein Widerspruch. Also ist f überall stetig.

V. Sei $M \subset [-R,R]$. Da f gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass $|f(x_1) - f(x_2)| < 1$ für alle $x_1, x_2 \in M$ mit $|x_1 - x_2| < \delta$ ist. Ist $n\delta > 2R$, so muss $f(M)$ in einem Intervall der Länge n liegen. Damit ist f beschränkt.

Lösungen zu den Aufgaben in 2.4

A. Ist $x < 1$, so ist $f_n(x) = 0$ für alle n.

Ist $x \geq 1$, so gibt es genau ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x \in [n, n+1)$. Dann ist $f_n(x) = 1/n$ und $f_m(x) = 0$ für $m \neq 0$. Also konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ überall punktweise absolut gegen Null.

Es ist $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ divergent. Die Reihe konvergiert also nicht normal.

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Ist $n_0 \geq 1/\varepsilon$, $m > n_0$ und $x \in \mathbb{R}$, so ist entweder $f_n(x) = 0$ für alle n mit $n_0 + 1 \leq n \leq m$, oder es gibt ein n zwischen $n_0 + 1$ und m, so dass $f_n(x) = 1/n < \varepsilon$ und $f_k(x) = 0$ für $k \neq n$ ist. Auf jeden Fall ist dann $|\sum_{n=n_0+1}^{m} f_n(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

B. a) $|c_n/c_{n+1}| = n^k/(n+1)^k = (1 - 1/(n+1))^k$ strebt gegen $R = 1$.

b) $|c_{n+1}/c_n| = \dfrac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \dfrac{1}{(1+1/n)^n}$ strebt gegen $1/e$. Also ist $R = e$.

c) $|c_n/c_{n+1}| = 2^n/2^{n+1} = 1/2$. Also ist auch $R = 1/2$.

d) Es ist $\exp(\mathsf{i}\,n\pi) = \cos(n\pi) + \mathsf{i}\,\sin(n\pi) = (-1)^n$, also $|c_n/c_{n+1}| = (n+2)/(n+1) = 1 + 1/(n+1)$ und $R = 1$.

e) Hier ist $c_{2k+1} = 0$ und

$$\left| \frac{c_{2k}}{c_{2k+2}} \right| = \frac{2^{2k+2}((k+1)!)^2}{2^{2k}(k!)^2} = 4(k+1)^2\,,$$

und das strebt gegen Unendlich. Also ist $R = \infty$.

f) $|c_n/c_{n+1}| = (1/3)\sqrt{(n+2)/(n+1)} = (1/3)\sqrt{1+1/(n+1)}$ strebt gegen $R = 1/3$.

C. a) Es ist $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-4)^n$ mit $a_n = 2^n/3$. Das Quotientenkriterium liefert den Konvergenzradius $R = 1/2$, also das Konvergenzintervall $(7/2, 9/2)$.

$P(7/2) = 3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot (-1/2)^n = 3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ divergiert, und genauso $P(9/2) = 3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} 1$.

b) Hier ist $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-(-3))^n$, mit $c_n = n^3$ und $c_n/c_{n+1} = (n/(n+1))^3$. Also ist der Konvergenzradius $R = 1$ und das Konvergenzintervall $(-4, -2)$.

$P(-4) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n^3$ und $P(-2) = \sum_{n=0}^{\infty} n^3$ divergieren.

D. a) Die erste Reihe ist eine geometrische Reihe, die für $|z-1| < 2$ konvergiert, gegen $3/(1-(z-1)/(-2)) = 6/(1+z)$.

b) Die zweite Reihe konvergiert aus dem gleichen Grund für $|z| < 1/\sqrt{3}$ gegen $-1/(4(1-3z^2)) = 1/(12z^2-4)$.

c) Hier handelt es sich um die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}/n! = \sum_{n=0}^{\infty}(-z^2)^n/n! = \exp(-z^2)$. Der Konvergenzradius ist Unendlich.

E. Ist $x = \log_a(b)$, so ist $b = a^x = \exp(x \ln a)$, also $x = (\ln b)/(\ln a)$. Dabei muss $a \neq 1$ sein.

a) Offensichtlich ist dann $\log_a b \cdot \log_b a = 1$.

b) Die Gleichung bedeutet, dass $\log_3(4x^2) = 2$ ist, also $4x^2 = 3^2 = 9$ und $x = 3/2$ (das negative Vorzeichen kommt nicht in Frage).

c) Es ist $\log_{a^n}(x^m) = \dfrac{m \ln x}{n \ln a} = \dfrac{m}{n} \cdot \log_a x$.

F. Sei $s := \sin x$, $c := \cos x$ und $t := \tan x$. Dann ist $t = s/c$ und $c = \sqrt{1-s^2}$.

Aus der Gleichung $s/\sqrt{1-s^2} = t$ erhält man $s^2 = t^2(1-s^2)$, also $s = t/\sqrt{1+t^2}$. Daraus ergibt sich $c = 1/\sqrt{1+t^2}$.

G. Es ist $\sin(\pi/2) = 1$ und $\cos(\pi/2) = 0$. Außerdem sind beide Funktionen zwischen 0 und $\pi/2$ positiv.

Sei $s := \sin(\pi/4)$ und $c := \cos(\pi/4)$. Dann ist $\mathrm{i} = \exp((\pi/2)\,\mathrm{i}\,) = \exp((\pi/4)\,\mathrm{i}\,)^2 = (c + s\,\mathrm{i}\,)^2 = c^2 - s^2 + 2sc\,\mathrm{i}$, also $(c-s)(c+s) = 0$ und $2cs = 1$. Daraus folgt: $c = s$ und $c^2 = 1/2$, also

$$\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Nun sei $s := \sin(\pi/6)$ und $c := \cos(\pi/6)$. Dann ist $s^2 + c^2 = 1$ und $(c + s\,\mathrm{i}\,)^3 = \exp((\pi/6)\,\mathrm{i}\,)^3 = \mathrm{i}$, also $c^3 - 3cs^2 = 0$ und $3c^2 s - s^3 = 1$. Daraus folgt, dass $c^3 + 3c^3 - 3c = 0$ ist, also $c^2 = 3/4$ und $c = \sqrt{3}/2$. Zusammen ergibt das

$$\sin(\pi/6) = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \cos(\pi/6) = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Schließlich ist $\exp((\pi/3)\,\mathrm{i}\,) = \exp((\pi/6)\,\mathrm{i}\,)^2 = (\sqrt{3} + \mathrm{i}\,)^2/4 = 1/2 + (1/2)\sqrt{3}\,\mathrm{i}$, also

$$\sin(\pi/3) = \frac{1}{2}\sqrt{3} \quad \text{und} \quad \cos(\pi/3) = \frac{1}{2}.$$

H. Sei $D_N(x) := \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} e^{\,\mathrm{i}\,nx}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
(e^{\,\mathrm{i}\,x} - 1)D_N(x) &= \sum_{n=-N}^{N} e^{\,\mathrm{i}\,(n+1)x} - \sum_{n=-N}^{N} e^{\,\mathrm{i}\,nx} \\
&= e^{\,\mathrm{i}\,(N+1)x} - e^{-\,\mathrm{i}\,Nx}.
\end{aligned}$$

Multiplikation mit $e^{-\,\mathrm{i}\,\frac{x}{2}}$ ergibt:

$$(e^{\,\mathrm{i}\,\frac{x}{2}} - e^{-\,\mathrm{i}\,\frac{x}{2}}) \cdot D_N(x) = e^{\,\mathrm{i}\,(N+\frac{1}{2})x} - e^{-\,\mathrm{i}\,(N+\frac{1}{2})x},$$

also

$$D_N(x) = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}} \qquad \text{für } x \neq 2k\pi.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos(nx) &= \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{N} 2\cos(nx)\right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{N} (e^{\,\mathrm{i}\,nx} + e^{-\,\mathrm{i}\,nx})\right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=-N}^{N} e^{\,\mathrm{i}\,nx} \\
&= \frac{\sin(N + \frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}.
\end{aligned}$$

I. Ist $0 < x \le 2$ so ist $x - x^3/6 < \sin x < x$ und $1 - x^2/2 < \cos x < 1 - x^2/2 + x^4/24$. Daraus folgt:

$$1 - \frac{x^2}{6} < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \text{und} \quad \frac{x}{2} - \frac{x^3}{24} < \frac{1-\cos x}{x} < \frac{x}{2}\,.$$

Daraus folgt die Behauptung.

J. Sei $x_n := 1/(n\pi)$ und $y_n := 1/(2n\pi + \pi/2)$. In beiden Fällen handelt es sich um Nullfolgen. Es ist aber $\sin(1/x_n) = \sin(n\pi) = 0$ und $\sin(1/y_n) = \sin(\pi/2 + 2n\pi) = 1$. Aus dem Folgenkriterium kann man nun entnehmen, dass $\lim_{x\to 0} \sin(1/x)$ nicht existiert.

K. Es ist

$$\begin{aligned}
&\sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \ = \\
&\quad = \ \frac{1}{4}\Big((e^x - e^{-x})(e^y + e^{-y}) + (e^x + e^{-x})(e^y - e^{-y})\Big) \\
&\quad = \ \frac{1}{2}(e^x e^y - e^{-x}e^{-y}) \\
&\quad = \ \sinh(x+y).
\end{aligned}$$

L. Nach der Methode der quadratischen Ergänzung erhält man:

$$\begin{aligned}
&z^2 - (3 + 4\,\mathsf{i}\,)z - 1 + 5\,\mathsf{i} = 0 \\
&\quad \Longleftrightarrow \quad (z - (3 + 4\,\mathsf{i}\,)/2)^2 = (4\,\mathsf{i} - 3)/4 \\
&\quad \Longleftrightarrow \quad z - (3 + 4\,\mathsf{i}\,)/2 = \pm(1 + 2\,\mathsf{i}\,)/2.
\end{aligned}$$

Das ergibt die beiden Lösungen $z_1 = 2 + 3\,\mathsf{i}$ und $z_2 = 1 + \mathsf{i}$.

Lösungen zu den Aufgaben in 2.5

A. 1) Sei f integrierbar, also $I_*(f) = I^*(f) = I_{a,b}(f)$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ Zerlegungen $\mathfrak{Z}'$ und $\mathfrak{Z}''$ von $I = [a,b]$ mit

$$I_{a,b} - U(f,\mathfrak{Z}') < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad O(f,\mathfrak{Z}'') - I_{a,b} < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Ist $\mathfrak{Z}$ eine gemeinsame Verfeinerung von $\mathfrak{Z}'$ und $\mathfrak{Z}''$, so ist

$$O(f,\mathfrak{Z}) - U(f,\mathfrak{Z}) \le \big(O(f,\mathfrak{Z}'') - I_{a,b}(f)\big) + \big(I_{a,b}(f) - U(f,\mathfrak{Z}')\big) < \varepsilon.$$

2) Sei umgekehrt das Kriterium erfüllt. Ist $\varepsilon > 0$ und $\mathfrak{Z}$ eine Zerlegung, so dass $O(f,\mathfrak{Z}) - U(f,\mathfrak{Z}) < \varepsilon$ ist, so ist auch

$$0 \le I^*(f) - I_*(f) \le O(f,\mathfrak{Z}) - U(f,\mathfrak{Z}) < \varepsilon.$$

Da das für jedes ε gilt, ist $I^*(f) = I_*(f)$.

3) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und monoton wachsend, $m \le f(x) \le M$ für alle $x \in [a,b]$. Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $(b-a)(M-m)/n < \varepsilon$ ist. Wählt man eine äquidistante Zerlegung $\mathfrak{Z} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ von $[a,b]$, so ist $x_i - x_{i-1} = (b-a)/n$, und aus der Monotonie folgt:

$$\begin{aligned} O(f,\mathfrak{Z}) - U(f,\mathfrak{Z}) &= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \\ &\le \frac{b-a}{n}(M-m) < \varepsilon. \end{aligned}$$

B. 1) Sei $f(x) = 2x - 2x^2$. Teile $[0,1]$ in n gleiche Teile der Länge $1/n$ und wähle $\xi_i := i/n = x_i$. Dann ist

$$\begin{aligned} \Sigma(f,\mathfrak{Z},\boldsymbol{\xi}) &= \sum_{i=1}^{n} f(i/n) \cdot 1/n \\ &= \sum_{i=1}^{n} \big(2i/n - 2(i/n)^2\big) \cdot 1/n \\ &= \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i - \frac{2}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 \\ &= \frac{2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} - \frac{2}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{n+1}{n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{3n^2} \\ &= \frac{(n+1)(n-1)}{3n^2} = \frac{1}{3}\big(1 - \frac{1}{n^2}\big), \end{aligned}$$

und dieser Ausdruck konvergiert gegen $1/3$.

2) Sei $f(x) = x^2 - 2x$. Teile $[0,2]$ in n gleiche Teile der Länge $2/n$ und wähle $\xi_i := x_i = 2i/n$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\Sigma(f, \mathfrak{Z}, \boldsymbol{\xi}) &= \sum_{i=1}^{n} f(2i/n) \cdot 2/n \\
&= \sum_{i=1}^{n} \big(4i^2/n^2 - 4i/n\big) \cdot 2/n \\
&= \frac{8}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{8}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i \\
&= \frac{8}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{8}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2} - \frac{4(n+1)}{n} \\
&= \frac{4(n+1)}{3n^2}(1-n) \;=\; -\frac{4}{3}\big(1 - \frac{1}{n^2}\big),
\end{aligned}$$

und das konvergiert gegen $-4/3$.

3) Sei $f(x) = e^x$. Teile $[0,1]$ in n gleiche Teile der Länge $1/n$ und wähle $\xi_i := (i-1)/n = x_{i-1}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\Sigma(f, \mathfrak{Z}, \boldsymbol{\xi}) &= \sum_{i=0}^{n-1} e^{i/n} \cdot \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (e^{1/n})^i \\
&= \frac{1}{n} \cdot \frac{e-1}{e^{1/n} - 1} \\
&= (e-1) \cdot \frac{1/n}{e^{1/n} - 1}\,.
\end{aligned}$$

Da $(e^x - 1)/x$ für $x \to 0$ gegen 1 konvergiert, strebt $\Sigma(f, \mathfrak{Z}, \boldsymbol{\xi})$ für $n \to \infty$ gegen $e - 1$.

C. Da rationale und irrationale Zahlen dicht liegen, ist $U(f, \mathfrak{Z}) = 0$ und $O(f, \mathfrak{Z}) = 1$ für jede Zerlegung $\mathfrak{Z}$.

Wäre $\chi_{\mathbb{Q}}$ integrierbar, so müsste $O(f, \mathfrak{Z}) - U(f, \mathfrak{Z})$ bei geeigneten Zerlegungen beliebig klein werden. Das ist nicht der Fall.

D. a) Sei f ungerade, $f^+ := f|_{[0,a]}$, $f^- := f|_{[-a,0]}$ und $\varepsilon > 0$ vorgegeben.

Wir wählen eine genügend feine Zerlegung $\mathfrak{Z} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ von $[0, a]$ (mit $x_0 = 0$ und $x_n = a$), so dass für jede Wahl von Zwischenpunkten $|\Sigma(f^+, \mathfrak{Z}, \boldsymbol{\xi}) - I_{0,a}(f^+)| < \varepsilon$ ist. Sei $\mathfrak{Z}^- := \{-x_n, -x_{n-1}, \ldots, -x_1, -x_0\}$. Dann ist

$$\begin{aligned}\Sigma(f^-,\mathfrak{Z}^-,-\boldsymbol{\xi}) &= \sum_{i=1}^{n} f(-\xi_i)(-x_{i-1}-(-x_i))\\ &= -\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}) \;=\; -\Sigma(f^+,\mathfrak{Z},\boldsymbol{\xi}).\end{aligned}$$

Also ist $|\Sigma(f^-,\mathfrak{Z}^-,-\boldsymbol{\xi}) - (-I_{0,a}(f))| = |\Sigma(f^+,\mathfrak{Z},\boldsymbol{\xi}) - I_{0,a}(f^+)| < \varepsilon$. Daraus folgt, dass $I_{-a,0}(f) = -I_{0,a}(f)$ und $I_{-a,a}(f) = I_{-a,0}(f) + I_{0,a}(f) = 0$ ist.

b) Sei f gerade und $\widetilde{f} : [-a,a] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} -f(x) & \text{für } x<0 \\ f(x) & \text{für } x \ge 0. \end{cases}$$

Dann ist $\widetilde{f}$ ungerade und

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx\\ &= -\int_{-a}^{0} \widetilde{f}(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx\\ &= \Big(\int_{-a}^{0} \widetilde{f}(x)\,dx + \int_{0}^{a} \widetilde{f}(x)\,dx\Big) - \int_{-a}^{0} \widetilde{f}(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx\\ &= 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.\end{aligned}$$

E. a) Sei $g : [a+c, b+c] \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) := f(x-c)$. Ist $\mathfrak{Z} = \{x_0,\ldots,x_n\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$ und $\xi_i \in [x_{i-1},x_i]$, so ist $\mathfrak{Z}^* := \{x_0+c,\ldots,x_n+c\}$ eine Zerlegung von $[a+c,b+c]$ und $\xi_i + c \in [x_{i-1}+c, x_i+c]$. Wir setzen $\boldsymbol{\xi}^* := (\xi_1+c,\ldots,\xi_n+c)$. Dann ist

$$\begin{aligned}\Sigma(g,\mathfrak{Z}^*,\boldsymbol{\xi}^*) &= \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i+c)\big((x_i+c)-(x_{i-1}+c)\big)\\ &= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}) \;=\; \Sigma(f,\mathfrak{Z},\boldsymbol{\xi}).\end{aligned}$$

Also müssen auch die Integrale übereinstimmen.

b) Sei $h : [ca,cb] \to \mathbb{R}$ definiert durch $h(x) := f(x/c)$. Ist $\mathfrak{Z} = \{x_0,\ldots,x_n\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$ und $\xi_i \in [x_{i-1},x_i]$, so ist $\mathfrak{Z}^* := \{cx_0,\ldots,cx_n\}$ eine Zerlegung von $[ca,cb]$ und $c\xi_i \in [cx_{i-1},cx_i]$. Wir setzen $\boldsymbol{\xi}^* := (c\xi_1,\ldots,c\xi_n)$. Dann ist

$$\begin{aligned}\Sigma(h,\mathfrak{Z}^*,\boldsymbol{\xi}^*) &= \sum_{i=1}^{n} h(c\xi_i)\big(cx_i - cx_{i-1}\big)\\ &= c\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}) \;=\; c\Sigma(f,\mathfrak{Z},\boldsymbol{\xi}).\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung.

F. a) Es ist

$$\begin{aligned}\frac{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}{p+1} &= \frac{n^{p+1}+(p+1)n^p+\cdots+(p+1)n+1-n^{p+1}}{p+1}\\ &= n^p + \text{ positive Terme } > n^p\end{aligned}$$

und wegen der Beziehung $x^{q+1}-y^{q+1}=(x-y)\sum_{i=0}^{q} x^{q-i}y^i$ ist

$$\begin{aligned}(n+1)^{p+1}-n^{p+1} &= \big((n+1)-n\big)\sum_{i=0}^{p}(n+1)^{p-i}n^i\\ &< 1\cdot\sum_{i=0}^{p}(n+1)^p = (p+1)(n+1)^p.\end{aligned}$$

b) Induktionsanfang: Ist $n=1$, so ergeben sich die Ungleichungen

$$0 < 1/(p+1) < 1,$$

die offensichtlich erfüllt sind.

Der Schritt von n nach $n+1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{(n+1)-1} k^p &= \sum_{k=1}^{n-1} k^p + n^p\\ &< \frac{n^{p+1}}{p+1}+\frac{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}{p+1}\\ &= \frac{(n+1)^{p+1}}{p+1}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^p &= \sum_{k=1}^{n} k^p + (n+1)^p\\ &> \frac{n^{p+1}}{p+1}+\frac{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}{p+1}\\ &= \frac{(n+1)^{p+1}}{p+1}.\end{aligned}$$

c) Multipliziert man die in (b) bewiesenen Ungleichungen mit a^{p+1}/n^{p+1}, so erhält man:

$$\frac{a}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\Big(\frac{ak}{n}\Big)^p < \frac{a^{p+1}}{p+1} < \frac{a}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{ak}{n}\Big)^p.$$

Sei nun $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := x^p$. Wir teilen das Intervall in n gleiche Teile der Länge a/n. Dann ist $x_k = ak/n$, für $k = 0, 1, \ldots, n$. Es folgt:

$$U(f, \mathfrak{Z}) = \frac{a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) < \frac{a^{p+1}}{p+1} < \frac{a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) = O(f, \mathfrak{Z}).$$

Weil f stetig und monoton ist, strebt $O(f, \mathfrak{Z}) - U(f, \mathfrak{Z})$ für $n \to \infty$ gegen Null. Also ist $\int_0^a x^p \, dx = a^{p+1}/(p+1)$.

G. Sei $f(x) = 1/x$. Man verwende die Zerlegung $\mathfrak{Z} := \{x_0, x_1, x_2, x_3\} = \{1,\ 4/3,\ 5/3,\ 2\}$. Dann erhält man die Untersumme

$$U(f, \mathfrak{Z}) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{5} + \frac{1}{2}\right) = \frac{37}{60}$$

und die Obersumme

$$O(f, \mathfrak{Z}) = \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{3}{4} + \frac{3}{5}\right) = \frac{47}{60}\,.$$

Der Mittelwert zwischen Untersumme und Obersumme beträgt $(37/60 + 47/60)/2 = 84/120 = 7/10$. Also ist $\ln(2) \approx 0.7$, mit einem Fehler von $(O(f, \mathfrak{Z}) - U(f, \mathfrak{Z}))/2 = 1/12 < 0.09$.

Tatsächlich ist $\ln(2) \approx 0.69314718\ldots$.

H. a) Ist $f(x_0) = 0$, so ist $f(x) = f(x_0 + (x - x_0)) = f(x_0) \cdot f(x - x_0) = 0$ für alle x. Das kann nicht sein.

b) Es ist $f(0) \neq 0$ und $f(0) = f(0 + 0) = f(0) \cdot f(0)$, also $f(0) = 1$. Sei $a := f(1)$. Dann ist $a = f(1/2 + 1/2) = f(1/2)^2 \geq 0$, also sogar > 0.

Es ist $f(n) = f(1 + \cdots + 1) = a^n$ und $1 = f(0) = f(n + (-n)) = a^n \cdot f(-n)$, also $f(-n) = a^{-n}$.

Weiter ist $a = f(1) = f(n \cdot (1/n)) = f(1/n + \cdots + 1/n) = f(1/n)^n$ und damit $f(1/n) = \sqrt[n]{a}$. Das bedeutet, dass $f(q) = a^q$ für jede rationale Zahl q gilt.

Wegen der Stetigkeit von f ist auch $f(x) = a^x$ für jede reelle Zahl x.

Lösungen zu den Aufgaben in 3.1

A. Offensichtlich handelt es sich um rationale Funktionen von zusammengesetzten Funktionen von elementaren differenzierbaren Funktionen. Also sind f, g und h überall dort differenzierbar, wo sie definiert sind. Wer schlau ist, führt bei $f(x)$ zunächst eine Polynomdivision aus und vermeidet so die Quotientenregel. Auf jeden Fall ist $f'(x) = 2x$, für $x \neq \pm 1$. Bei $g(x)$ kommt (außerhalb $x = 0$) die Quotientenregel ins Spiel, aber auch Ketten- und Produktregel. Das Ergebnis ist

$$g'(x) = \frac{6\cos(3x)}{x^2} - \frac{4\sin(3x)}{x^3} + \cos x - x\sin x.$$

Die dritte Funktion stellt man am besten in der Form $h(x) = \exp(\sqrt{x} \cdot \ln x)$ dar. Dann ist $h'(x) = x^{\sqrt{x}} \cdot (\ln x + 2)/(2\sqrt{x})$.

Bei $k(x)$ muss mehrfach Ketten- und Produktregel angewandt werden. Um die Übersicht zu behalten, kann man z.B. die drei vorkommenden Exponentialfunktionen mit verschiedenen Bezeichnungen versehen:

$$h(x) = \alpha(x \cdot \beta(x \cdot \gamma(x^2))).$$

Dann ist

$$h'(x) = h(x) \cdot \beta(x \cdot \gamma(x^2)) \cdot [1 + x \cdot \gamma(x^2) \cdot \{1 + 2x^2\}].$$

B. Es ist $f'(x) = a\sin x + (ax+b)\cos x + c\cos x - (cx+d)\sin x = (a-d-cx)\sin x + (b+c+ax)\cos x$. Also muss man $a = d$ und $c = 0$ setzen, sowie $b = -c$ und $a = 1$. Das ergibt $a = d = 1$ und $b = c = 0$, also $f(x) = x\sin x + \cos x$.

C. Offensichtlich sind beide Funktionen außerhalb $x = 0$ differenzierbar. Die Berechnung der Ableitung sei dem Leser überlassen. Was ist aber bei $x = 0$? Für f ergibt sich als Differenzenquotient

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \sin\Big(\frac{1}{x}\Big).$$

Diese Funktion hat keinen Grenzwert für $x \to 0$. Damit ist f in 0 nicht differenzierbar. Die Funktion f ist allerdings im Nullpunkt stetig, denn $|\sin(1/x)|$ bleibt durch 1 beschränkt und $x \cdot \sin(1/x)$ strebt dann für $x \to 0$ gegen Null. Jetzt sieht man, dass der Differenzenquotient von $g(x)$ für $x \to 0$ gegen 0 konvergiert. Damit ist g in $x = 0$ differenzierbar und $g'(0) = 0$.

D. Man sollte sich erst mal die Aufgabenstellung klarmachen. Dass $f'(x_0) > 0$ ist, bedeutet, dass die Tangente an den Graphen von f bei x_0 ansteigt. Dann liegt es natürlich nahe, dass die Werte von f links von x_0 unterhalb von $c = f(x_0)$ liegen, und rechts von x_0 oberhalb. Aber das gilt sicher nur in der

Nähe von x_0. Wie nahe? Hier wird behauptet, dass es eine komplette (wenn auch sicher sehr kleine) ε-Umgebung von x_0 gibt, auf der sich f wunschgemäß verhält. Das erscheint plausibel, aber es bleibt dennoch der Verdacht, dass f in der Nähe von x_0 zu stark „wackeln" könnte. Ein Widerspruchsbeweis könnte Klarheit bringen, aber er würde in diesem Fall doch zu recht umständlichen Überlegungen führen.

Wagen Sie doch einmal einen direkten Beweis! Dass f in x_0 differenzierbar ist, liefert eine Darstellung $f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot \Delta(x)$, mit einer in x_0 stetigen Funktion Δ. Nach Voraussetzung ist $\Delta(x_0) = f'(x_0) > 0$. Dann gibt es eine ganze ε-Umgebung von x_0, auf der $\Delta > 0$ ist. Für jedes x aus dieser Umgebung gilt: Ist $x < x_0$, so ist $f(x) - f(x_0) = (x - x_0) \cdot \Delta(x) < 0$, also $f(x) < f(x_0)$. Ist $x > x_0$, so folgt analog, dass $f(x) > f(x_0)$ ist.

Zur Übung können Sie ja einen Widerspruchsbeweis führen und ihn mit dem direkten Beweis vergleichen.

E. Es liegt nahe, Induktion zu verwenden. Im Falle $n = 1$ erhält man die schon bewiesene normale Produktregel, beim Schluss von n auf $n+1$ kommt ebenfalls die Produktregel zum Einsatz. Man beachte die Ähnlichkeit zur binomischen Formel!

F. Am Rand des Intervalls nimmt f die Werte $f(-1/2) = 1/8$ und $f(4) = 17$ an. Wenn f seinen kleinsten oder größten Wert in einem Punkt x_0 im Innern des Intervalls annimmt, so muss dort ein lokales Maximum oder Minimum vorliegen, also $f'(x_0) = 0$ sein. Es ist $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$. Kandidaten für lokale Extremwerte sind die Punkte $x_1 := 0$ und $x_2 = 2$. Nun ist $f(x_1) = 1$ und $f(x_2) = -3$. Also nimmt f seinen kleinsten Wert im Innern des Intervalls bei x_2 und seinen größten Wert am Rande des Intervalls bei $x = 4$ an.

G. f: Minimaler Wert bei $x = \pm\sqrt{2}$, maximaler Wert bei $x = -3$.
g: Minimaler Wert bei $x = -\pi/6$, maximaler Wert bei $x = \pi$.

H. Man zeige, dass $f'(x) = -2(2\sin x - 1)(\sin x + 1)$ ist. Daraus lässt sich alles ableiten.

I. Es ist $2yy' = 3x^2 + 2x$, also $y' = (3x^2 + 2x)/2y$, sofern $y \neq 0$ ist. Liegt eine waagerechte Tangente vor, so muss $y' = 0$, also $x(3x+2) = 0$ sein. Die Möglichkeit $x = 0$ scheidet aus. Also muss $x = -2/3$ sein. Dann ist $y^2 = 4/27$, also $y = \pm(2/3)\sqrt{3}$.

J. Die **Lösung** ist sehr einfach. Interessanter sind die Konsequenzen. Überlegen Sie sich, in welche Richtung die Produktionszahlen verändert werden sollten, wenn die Grenzkosten niedriger als die Durchschnittskosten sind.

Lösungen zu den Aufgaben in 3.2

A. Definiert und stetig ist f_a auf $M_a := \{x : x \geq -a/2\}$, differenzierbar nur für $x > -a/2$. Weiter ist

$$f_a'(x) = \frac{5x^2 + 2ax}{\sqrt{2x+a}} \quad \text{und} \quad f_a''(x) = \frac{15x^2 + 12ax + 2a^2}{(2x+a)\sqrt{2x+a}} \ .$$

Das liefert ein lokales Minimum bei $x = 0$ und ein lokales Maximum bei $x = -(2/5)a$. Am Rand des Definitionsbereiches, bei $x = -a/2$ liegt ebenfalls ein lokales Minimum vor. Obwohl f_a'' zwei Nullstellen hat, kommt nur eine davon als Wendepunkt in Frage (warum?), nämlich $x = \big(-(2/5) + \sqrt{2/75}\big)a$. Man bestätige, dass dort tatsächlich ein Wendepunkt vorliegt, nach Möglichkeit ohne Verwendung der dritten Ableitung.

B. a) Ist x_0 Nullstelle k-ter Ordnung von $p(x)$ und $\deg(p) = n$, so ist $p(x) = (x - x_0)^k \cdot q(x)$ mit einem Polynom q der Ordnung $n - k$. Differenzieren ergibt die Behauptung.

b) Durch Probieren erhält man die Nullstelle $x_1 = 1$. Daher ist

$$p(x) = (x-1)(x^3 - 11x^2 + 35x - 25).$$

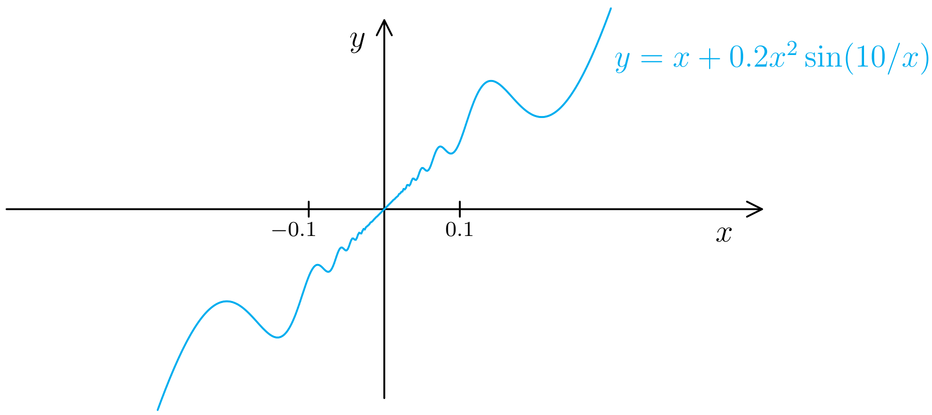
Nochmaliges Probieren ergibt $p(x) = (x-1)^2(x^2 - 10x + 25) = (x-1)^2(x-5)^2$. Insbesondere sind dann $x_1 = 1$ und $x_2 = 5$ Nullstellen von

$$p'(x) = 4x^3 - 36x^2 + 92x - 60 = 4(x-1)(x-5)(x-3).$$

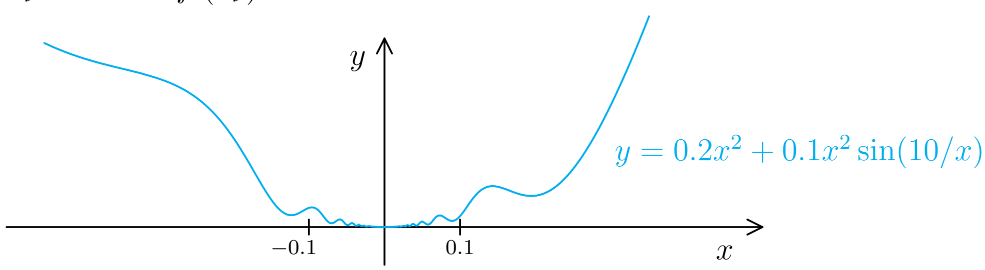
Man ermittelt, dass bei x_1 und x_2 Minima und bei $x_3 = 3$ ein Maximum vorliegen muss. Wendepunkte gibt es bei den beiden Nullstellen von $p''(x) = 12x^2 - 72x + 92$.

Als Zusatzaufgabe sollte man sich überlegen, ob es sich um isolierte bzw. globale Extremwerte handelt.

C. Man schreibe f in der Form $f(x) = f(0) + x \cdot \Delta(x)$ und zeige, dass $\Delta(x)$ für $x \to 0$ gegen 1 konvergiert. Zur Lösung des zweiten Teils berechne man $f'(x)$ für $x \neq 0$ und untersuche das Verhalten von f' in den Punkten $x_\nu := 1/(2\pi\nu)$. Es zeigt sich, dass f in diesen Punkten fällt. Indirekt kann man nun auch folgern, dass f nicht stetig differenzierbar ist.



D. Die Existenz des Minimums zeigt man durch Betrachtung der Werte von f, ohne Benutzung von Ableitungen. Es zeigt sich dann allerdings, dass $f'(0) = 0$ ist. Der zweite Teil ergibt sich daraus, dass eine Folge von Punkten x_ν mit $x_\nu \to 0$ und $f'(x_\nu) = 0$ existiert.



Weil $f(x) = x^2(2 + \sin(1/x)) \geq x^2$ ist, liegt sogar ein isoliertes Minimum vor.

E. a) Die Voraussetzungen sind erfüllt, es ist

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{x - \ln(1+x)}{x\cdot\ln(1+x)} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1 - 1/(1+x)}{\ln(1+x) + x/(1+x)} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x}{(1+x)\ln(1+x) + x} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln(1+x) + 2} = \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

b) Man verwende die Formel $a^x = \exp(x \cdot \ln a)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} &= \lim_{x\to 0}\exp(-\sin x \cdot \ln x) \\ &= \lim_{x\to 0}\exp\bigl((-\sin x/x)\cdot(x\ln x)\bigr). \end{aligned}$$

Wir wissen schon, dass $\sin x/x$ für $x \to 0$ gegen 1 und $x \ln x$ für $x \to 0$ gegen 0 strebt. Also geht das Produkt gegen Null und die zu untersuchende Funktion gegen $e^0 = 1$.

c) Es ist

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x-\sin x} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-1/\cos^2 x}{1-\cos x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{\cos^2 x(1-\cos x)}\\ &= -\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{\cos^2 x} = -2.\end{aligned}$$

F. Es ist $-C \le f'(x) \le C$ für $x \in I$, nach dem Schrankensatz also

$$-C \le \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le C \text{ für } x < y\,.$$

Daraus folgt: $|f(y)-f(x)| \le C\cdot(y-x)$.

Ist $x > y$, so erhält man $|f(y)-f(x)| \le C\cdot(x-y)$. Beide Resultate zusammen ergeben die Behauptung.

G. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass für $x \in U_\delta(x_0)$ und $x \ne x_0$ gilt:

$$c-\varepsilon \le f'(x) \le c+\varepsilon,$$

also $|(f-c\cdot\mathrm{id})'(x)| \le \varepsilon$ auf $U_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}$. Aus dem Schrankensatz folgt nun:

$$|f(x)-f(x_0)-c\cdot(x-x_0)| \le \varepsilon\cdot|x-x_0|, \qquad \text{für } x \in U_\delta(x_0),$$

also

$$c-\varepsilon \le \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le c+\varepsilon.$$

Das bedeutet, dass $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = c$ ist. ∎

Ein alternativer Beweis (ohne Schrankensatz) könnte folgendermaßen aussehen:

Sei (x_ν) eine beliebige Folge in I, die gegen x_0 konvergiert. Außerdem sei ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Es gibt dann ein $\delta > 0$, so dass $|f'(x)-c| < \varepsilon$ für $|x-x_0| < \delta$ ist. Ist ν so groß, dass $|x_\nu - x_0| < \delta$ ist, sowie c_ν ein Punkt zwischen x_ν und x_0 mit $D(x_\nu, x_0) = f'(c_\nu)$ (Mittelwertsatz!), so ist auch $|c_\nu - x_0| < \delta$ und daher $|D(x_\nu,x_0)-c| = |f'(c_\nu)-c| < \varepsilon$. So folgt, dass die Differenzenquotienten $D(x_\nu, x_0)$ gegen c konvergieren. ∎

Etwas allgemeiner kann man aus dem obigen Ergebnis folgern:

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ stetig, x_0 ein innerer Punkt von I und f in jedem Punkt $x \ne x_0$ differenzierbar. Außerdem sei

$$\lim_{x \to x_0-} f'(x) = \lim_{x \to x_0+} f'(x) =: c.$$

Dann ist f in x_0 differenzierbar und $f'(x_0) = c$.

Klar, wenn linksseitiger und rechtsseitiger Limes existieren und beide gleich sind, dann existiert auch der gewöhnliche Limes.

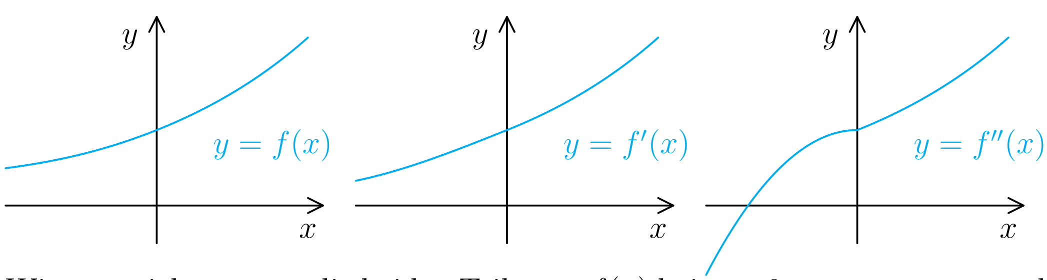
H. Die Funktion ist stetig und links und rechts vom Nullpunkt beliebig oft differenzierbar, mit Ableitungen $1 + x - 4x^3$ und e^x. Beide Ausdrücke streben für $x \to 0$ gegen 1. Also ist f differenzierbar und

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + x - 4x^3 & \text{für } x < 0, \\ 1 & \text{in } x = 0, \\ e^x & \text{für } x > 0. \end{cases}.$$

Offensichtlich ist f' stetig. Leitet man nochmals ab, so erhält man die Terme $1 - 12x^2$ und e^x. Wieder erhält man einen gemeinsamen Grenzwert. Also ist f zweimal differenzierbar und

$$f''(x) = \begin{cases} 1 - 12x^2 & \text{für } x < 0, \\ 1 & \text{in } x = 0, \\ e^x & \text{für } x > 0. \end{cases}.$$

Diese Funktion ist wieder stetig und links und rechts vom Nullpunkt differenzierbar, aber der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0} f'''(x)$ existiert nicht. Schreibt man $f''(x) = f''(0) + x \cdot \Delta''(x)$, so ist $\lim\limits_{x \to 0-} \Delta(x) = 0$ und $\lim\limits_{x \to 0+} \Delta(x) = 1$. Also ist f in 0 nicht dreimal differenzierbar.



Wie man sieht, passen die beiden Teile von $f(x)$ bei $x = 0$ gut zusammen und ergeben einen glatten Funktionsgraphen. Mit jedem Differentiationsvorgang verliert man aber etwas von dieser Glätte.

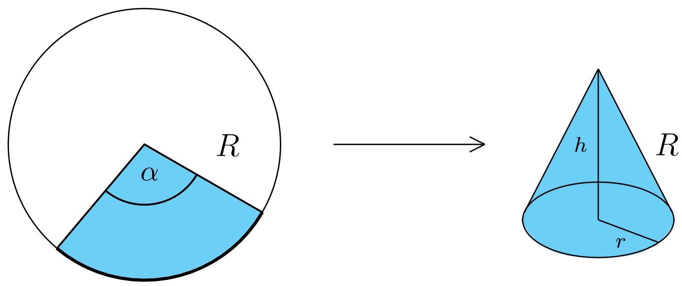
I. Die **Lösung** ist sehr einfach. Der Wendepunkt von $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ liegt bei $x = -b/3a$.

J. Die Ableitung der gesuchten Funktion muss die drei Nullstellen $x = 0$ und $x = \pm 1$ aufweisen. Also machen wir den Ansatz

$$f'(x) = \alpha \cdot x \cdot (x - 1)(x + 1) = \alpha \cdot (x^3 - x)\,.$$

Eine mögliche Funktion f ist dann gegeben durch $f(x) = \frac{\alpha}{4}x^4 - \frac{\alpha}{2}x^2 + \beta$. Damit $f(0) = 1$ ist, muss $\beta = 1$ gesetzt werden. Dann ist $f(\pm 1) = \frac{\alpha}{4} - \frac{\alpha}{2} + 1$. Damit sich hier der Wert -1 ergibt, muss $\alpha = 8$ gesetzt werden. Tatsächlich leistet $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$ das Gewünschte.

K. Es werden elementare Kenntnisse aus der Geometrie vorausgesetzt.



Die Grundfläche des Kreiskegels beträgt $F = r^2\pi$, wobei r der Radius ist. Die Höhe h ist durch $r^2 + h^2 = R^2$ gegeben. Der Umfang der Grundfläche des Kreiskegels muss mit der Grenzlinie des Kreissektors übereinstimmen: $2r\pi = \alpha \cdot R$ (wenn α im Bogenmaß angegeben wird). So erhält man r als Funktion von R und α, und damit auch das Volumen $V = \frac{1}{3}F \cdot h$:

$$V = \frac{R^3}{12\pi}\alpha^2\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4\pi^2}}\,.$$

Jetzt kann man – bei festem R – ein Maximum bestimmen. Es zeigt sich, dass das Ergebnis nur von α abhängt, nicht von R.

L. a) Die Funktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und gerade. Sie hat offensichtlich keine Nullstellen und ist sogar überall positiv.

Für $x \to \pm\infty$ strebt $f(x)$ gegen Null. Die x-Achse tritt in beiden Richtungen als horizontale Asymptote auf.

Es ist $f'(x) = -2x/(x^2 + r)^2$. Eine Nullstelle gibt es nur bei $x = 0$. Da $f(0) = 1/r$ und $f(x) \le 1/r$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, besitzt f bei $x = 0$ ein lokales und zugleich globales Maximum. Andere Extremwerte kann es nicht geben.

Weiter ist $f''(x) = \bigl(-2(x^2+r)^2+8x^2(x^2+r)\bigr)/(x^2+r)^4 = (6x^2-2r)/(x^2+r)^3$. Nullstellen treten bei $a_\pm := \pm\sqrt{r/3}$ auf. Ist $x < a_-$ oder $x > a_+$, so ist $f''(x) > 0$, also f konvex. Für $|x| < a_+$ ist f konkav. Insbesondere liegen bei $\pm a$ Wendepunkte vor.

b) $f(x) := x^2/\sqrt{x^2 - 4}$ ist für $|x| \ge 4$ definiert und für $|x| > 4$ differenzierbar. Es handelt sich um eine gerade und positive Funktion, die für $x < -2$ und $x \to -2$ (bzw. für $x > 2$ und $x \to 2$ gegen $+\infty$ strebt. Wir haben also vertikale Asymptoten bei $x = \pm 2$.

Es ist $f'(x) = x(x^2-8)/(x^2-4)^{3/2}$. Da f in $x = 0$ nicht definiert ist, muss man nur die Nullstellen $x = \pm 2\sqrt{2}$ betrachten. Da $f''(x) = (4x^2+32)/(x^2-4)^{5/2}$ überall positiv ist, liegen zwei Minima vor, und es gibt keine Wendepunkte.

Man kann sogar zeigen, dass $y = x$ und $y = -x$ schräge Asymptoten sind.

c) $f(x) := x + 1/x$ ist für $x \neq 0$ definiert und ungerade. Für $x > 0$ und $x \to 0$ strebt $f(x)$ gegen $+\infty$, für $x < 0$ und $x \to 0$ gegen $-\infty$.

Es ist $f'(x) = 1 - 1/x^2$ und $f''(x) = 2/x^3$. Die erste Ableitung verschwindet bei $x = \pm 1$. Da $f''(-1) < 0$ ist, liegt dort ein lokales Maximum vor. Da $f''(1) > 0$ ist, haben wir bei $x = 1$ ein lokales Minimum. Wendepunkte kann es nicht geben.

$f(x) - x = 1/x$ strebt für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ gegen Null. Also ist durch $y = x$ eine schräge Asymptote gegeben.

d) $f(x) := x^2 + 1/x$ ist auch für alle $x \neq 0$ definiert. Die Funktion ist allerdings weder gerade noch ungerade.

Für $x \to +\infty$ und für $x > 0$ und $x \to 0$ strebt $f(x)$ gegen $+\infty$. Für $x < 0$ und $x \to 0$ strebt $f(x)$ gegen $-\infty$, für $x \to -\infty$ gegen $+\infty$.

Es ist $f'(x) = 2x - 1/x^2$ und $f''(x) = 2 + 2/x^3$. Eine Nullstelle von f' gibt es nur bei $x_0 = 1/\sqrt[3]{2}$. Da $f''(x_0) = 6 > 0$ ist, liegt dort ein lokales Minimum vor. Andere Extremwerte gibt es nicht. Die 2. Ableitung verschwindet genau bei $x_1 = -1$. Es ist $f'''(x) = -6/x^4$, also $f'''(x_1) = -6 \neq 0$. Das zeigt einen Wendepunkt bei x_1.

Lösungen zu den Aufgaben in 3.3

A. Die Funktion nimmt positive Werte auf den Intervallen $(0,2)$ und $(3,4)$ an. Das Integral über $f(x)$ und diese beiden Intervalle liefert den gesuchten Flächeninhalt. Zum Integrieren benutzt man am besten die Darstellung $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$.

B. a) $F(x) := \begin{cases} x & \text{für } x < 1 \\ x^2 - x & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$ ist Stammfunktion von f.

b) Die Funktion G mit $G(x) := nx - \dfrac{n(n+1)}{2}$ für $n \leq x < n+1$ ist Stammfunktion von g.

C. $2\sqrt{x}$ ist Stammfunktion von $1/\sqrt{x}$. Etwas kniffliger ist es beim zweiten Integral. Mit etwas Überlegen und Probieren kann man aber herausfinden, dass

$\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}$ Stammfunktion von $x\sqrt{x}$ ist. Im nächsten Paragraphen werden Methoden vorgestellt, wie man solche Stammfunktionen etwas systematischer finden kann.

D. Man erhält sehr einfach eine stetige Funktion F, so dass $F' = f$ außerhalb des Nullpunktes gilt. Dass die Ableitung f in $x = 0$ eine Sprungstelle besitzt, zeigt, dass F dort nicht differenzierbar sein kann.

E. Es ist $\tan(t) = -\dfrac{\cos'(t)}{\cos(t)} = (\ln \circ |\cos|)'(t)$. Allerdings können wir das Integral nur berechnen, wenn $\cos(t)$ im Integrationsintervall keine Nullstelle besitzt!

$u/(1+u^2)$ ist die Ableitung von $\dfrac{1}{2}\ln(1+u^2)$.

F. Ist $G(y) := \displaystyle\int_0^y g(t)\,dt$ und $F(x) := G(\varphi(x)) = \displaystyle\int_0^{\varphi(x)} g(t)\,dt$, so ist $F'(x) = G'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$. Im vorliegenden Fall ist $g(t) = e^t$ und $\varphi(x) = \sin(x)$.

G. Man sieht sofort, dass $\mu(f')$ der Differenzenquotient $(f(b) - f(a))/(b-a)$ ist. Damit lassen sich alle Fragen sehr leicht beantworten.

H. Es handelt sich um eine DGL mit getrennten Variablen: $y' = f(x)g(y)$ mit $f(x) = 1/(2x)$ und $g(y) = (1+y^2)/y$. Wegen der Anfangsbedingung betrachte man alles auf $\mathbb{R}_-$. Dann ist $G(y) = \dfrac{1}{2}\ln(1+y^2)$ Stammfunktion von $1/g$ und $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln|x|$ Stammfunktion von f. Man erhält:

$$\varphi(x) = -\sqrt{-2x-1}.$$

I. Hier liegt eine lineare DGL vor: $y' + a(x)y = b(x)$ mit $a(x) = 1/x$ und $b(x) = x^3$. Die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung hat die Gestalt $y_h(x) = c/x$. Eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung ist $y_p(x) = \dfrac{1}{5}x^4$. Die Lösung zur Anfangsbedingung $y(1) = 0$ ist dann

$$\varphi(x) = \frac{1}{5}(x^4 - 1).$$

Lösungen zu den Aufgaben in 3.4

A. Aus der Gleichung $4x^2 = 1 - u$ folgt $8x\,dx = -du$, also

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx = -\frac{1}{8}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2} + C.$$

B. Es ist $2x\,dx = du$ und $x^4 = (u-1)^2$, also

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1+x^2}\cdot x^5\,dx &= \frac{1}{2}\int \sqrt{u}(u-1)^2\,du \\ &= \frac{1}{7}(1+x^2)^{7/2} - \frac{2}{5}(1+x^2)^{5/2} + \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2} + C.\end{aligned}$$

C. Es ist $x = 1/u$, also $dx = -u^{-2}\,du$ und

$$\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx = -\int e^u\,du = -e^{1/x} + C.$$

D. Setze $u := x$ und $v := \sinh x$. Dann ist $u\,dv = x\cosh x\,dx$ und $v\,du = \sinh x\,dx$, also

$$\begin{aligned}\int 3x\cosh x\,dx &= 3\int u\,dv = 3uv - 3\int v\,du \\ &= 3x\,\sinh x - 3\int \sinh x\,dx = 3x\,\sinh x - 3\cosh x + C.\end{aligned}$$

E. a) Setze $u = e^x$, also $x = \ln u$ und $dx = du/u$.

Damit ergibt sich $\int e^x/(1+e^{2x})\,dx = \arctan(e^x) + C$.

b) Verwende Substitution $u = \varphi(x) = x^3$, mit $\varphi'(x) = 3x^2$.

Damit ergibt sich $\int x^2\sin(x^3)\,dx = (1/3)\int \sin u\,du = -\cos(x^3)/3$.

c) Es ist $x^4 + 2 = (5x^4 + 10)/5$. Setze also $\varphi(x) := x^5 + 10x$, mit $\varphi'(x) = 5x^4 + 10$. Das ergibt

$$\int \frac{x^4+2}{(x^5+10x)^5}\,dx = \frac{1}{5}\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)^5}\,dx = -\frac{1}{20(x^5+10x)^4}\,.$$

d) Setze $\varphi(x) := x^3 + 3x^2 + 1$. Dann ist $\varphi'(x) = 3(x^2 + 2x)$ und

$$\int \frac{x^2+2x}{\sqrt[3]{x^3+3x^2+1}}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt[3]{\varphi(x)}}\,dx = \frac{1}{2}(x^3+3x^2+1)^{2/3}.$$

e) Setze $u = \varphi(x) = x^2$. Dann ist $x = \sqrt{u}$ und $du = 2x\,dx$, also

$$\int_1^5 \frac{x}{x^4+10x^2+25}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^{25} \frac{du}{(u+5)^2} = \frac{1}{2}\int_6^{30} \frac{dv}{v^2} = \frac{1}{15}\,.$$

f) Setze $u = \sqrt{\sqrt{x}+1}$. Dann ist $u^2 = \sqrt{x} + 1$, also $x = (u^2-1)^2$ und $dx = 4u(u^2-1)$. Es folgt:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\sqrt{x}+1}\,dx &= 4\int (u^4-u^2)\,du \\ &= 4\Big(\frac{u^5}{5}-\frac{u^3}{3}\Big) \\ &= \frac{4}{15}\sqrt{\sqrt{x}+1}(3x-\sqrt{x}-2)+C.\end{aligned}$$

g) Mit $t=\varphi(x)=x^2$ erhält man

$$\int x\sqrt[3]{4-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \varphi'(x)\sqrt[3]{4-\varphi(x)}\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt[3]{4-t}\,dt = -\frac{3}{8}(4-x^2)^{4/3}.$$

h) Setzt man $u=\sqrt[3]{x}$, so ist $x=u^3$ und $dx=3u^2\,du$, also

$$\int (x+2)\sqrt[3]{x}\,dx = \int (u^3+2)u\cdot 3u^2\,du = 3\int (u^6+2u^3)\,du = \frac{3}{7}x^{7/3}+\frac{3}{2}x^{4/3}.$$

i) Man verwendet die Beziehung

$$\cos x = \frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}\,,$$

sowie die Substitution $u=\tan(x/2)$, $x=2\arctan u$ und $dx=(2/(1+u^2))\,du$. Dann ist

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{5+3\cos x}\,dx &= \int \frac{1}{5+3(1-u^2)/(1+u^2)}\cdot\frac{2}{1+u^2}\,du \\ &= \int \frac{1}{4+u^2}\,du \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\arctan\Big(\frac{1}{2}\tan\big(\frac{x}{2}\big)\Big).\end{aligned}$$

F. Es ist $c_0=\pi/2$ und $c_1=1$. Für $n\geq 1$ ist

$$\begin{aligned}c_{n+1} &= \int_0^{\pi/2}\sin^n t\sin t\,dt \\ &= \sin^n t(-\cos t)\,\Big|_0^{\pi/2} + n\int_0^{\pi/2}\sin^{n-1}t\cos^2 t\,dt \\ &= n\int_0^{\pi/2}\sin^{n-1}t(1-\sin^2 t)\,dt \\ &= nc_{n-1}-nc_{n+1},\end{aligned}$$

also $c_{n+1}=\dfrac{n}{n+1}c_{n-1}$.

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} c_{2k} &= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot 2\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdots(2k)} \\ \text{und } c_{2k+1} &= \frac{2\cdot 4\cdots(2k)}{1\cdot 3\cdot(2k+1)}. \end{aligned}$$

Lösungen zu den Aufgaben in 3.5

A. (x, y, z) liegt genau dann auf C, wenn (x, y) auf dem ebenen Kreis um $(0, 0)$ mit Radius 3 liegt und $z = 2-y$ ist. Da bietet sich folgende Parametrisierung an:

$$\boldsymbol{\alpha}(t) := (3\cos t, 3\sin t, 2-3\sin t), \text{ mit } \boldsymbol{\alpha}'(t) = (-3\sin t, 3\cos t, -3\cos t).$$

B. Diese Aufgabe ist eigentlich unsinnig und nur aus Versehen stehen geblieben. Was ist das Problem? Um Punkte auf dem Einheitskreis vernünftig zu beschreiben, braucht man Winkel, und um mit Winkeln vernünftig rechnen zu können, braucht man Winkelfunktionen und das Bogenmaß. Damit steckt man aber die Lösung der Aufgabe mit hinein, denn das Bogenmaß beruht auf der Annahme, dass die Länge des Einheitskreises $= 2\pi$ ist.

Ignoriert man die Einwände, so kann man den Kreis in n gleiche Sektoren einteilen. Verbindet man die Endpunkte der Wände eines Sektors auf der Peripherie miteinander, so entsteht ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Basis wir mit b_n bezeichnen wollen. Elementargeometrisch ist $b_n/2 = \sin(\pi/n)$, und daher die gesuchte Länge des (einbeschriebenen) Polygonzuges $= U_n := n\cdot b_n = 2n\cdot\sin(\pi/n) = 2\pi\cdot\sin(\pi/n)/(\pi/n)$. Weil $(\sin x)/x$ für $x \to 0$ gegen 1 strebt, konvergiert U_n für $n \to \infty$ gegen 2π.

C. Es ist $\boldsymbol{\alpha}'(t) = (-3\cos^2 t\sin t, 3\sin^2 t\cos t)$ und $\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\| = 3|\cos t\sin t|$, also

$$\mathbf{T}_\alpha(t) = \begin{cases} (-\cos t, \sin t) & \text{für } 0 \le t < \pi/2, \\ (\cos t, -\sin t) & \text{für } \pi/2 \le t < \pi, \\ (-\cos t, \sin t) & \text{für } \pi \le t < 3\pi/2, \\ (\cos t, -\sin t) & \text{für } 3\pi/2 \le t \le 2\pi. \end{cases}.$$

Es ist $\boldsymbol{\beta}'(t) = (-2e^{-2t}, 2, 0)$ und $\|\boldsymbol{\beta}'(t)\| = 2\sqrt{1+e^{-4t}}$, also

$$\mathbf{T}_{\boldsymbol{\beta}}(t) = \Big(-\frac{e^{-2t}}{\sqrt{1+e^{-4t}}}, \frac{1}{\sqrt{1+e^{-4t}}}, 0\Big).$$

D. Es ist $\boldsymbol{\alpha}'(t) = (1, \sin t + t\cos t, \cos t - t\sin t)$ und $\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\| = \sqrt{2+t^2}$, also

$$L(\boldsymbol{\alpha}) = \int_0^\pi \|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|\,dt = \int_0^\pi \sqrt{2+t^2}\,dt.$$

Dieses Integral ist nicht so leicht auszuwerten, aber es geht.

1. Schritt: $t = \sqrt{2}\sinh u$, also $dt = \sqrt{2}\cosh u\,du$, liefert

$$\int \sqrt{2+t^2}\,dt = 2\int \cosh^2 u\,du = \frac{1}{2}\int (e^{2u} + e^{-2u} + 2)\,du = \frac{1}{2}(\sinh(2u) + 2u).$$

Weil $\sinh(2u) = 2\sinh u\cosh u = 2\sinh u\sqrt{1+\sinh^2 u}$ und $u = \operatorname{arsinh}(t/\sqrt{2})$ ist, folgt:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{2+t^2}\,dt &= \sinh u\sqrt{1+\sinh^2 u} + u \\
&= \frac{t}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{t^2}{2}} + \ln\Bigl(\frac{t}{\sqrt{2}} + \sqrt{1+\frac{t^2}{2}}\Bigr) \\
&= \frac{t}{2}\sqrt{2+t^2} + \ln\bigl(t + \sqrt{2+t^2}\bigr) - \frac{1}{2}\ln 2.
\end{aligned}$$

Also ist $L(\boldsymbol{\alpha}) = \dfrac{\pi}{2}\sqrt{2+\pi^2} + \ln\bigl(\pi + \sqrt{2+\pi^2}\bigr) - \dfrac{1}{2}\ln 2.$

E. Es ist $\boldsymbol{\alpha}'(t) = (\sinh t, \cosh t, 1)$ und daher

$$\begin{aligned}
s_{\boldsymbol{\alpha}}(t) &= \int_0^t \|\boldsymbol{\alpha}'(\tau)\|\,d\tau \\
&= \int_0^t \sqrt{\sinh^2\tau + \cosh^2\tau + 1}\,d\tau \\
&= \sqrt{2}\int_0^t \sqrt{1+\sinh^2\tau}\,d\tau \\
&= \sqrt{2}\int_0^t \cosh\tau\,d\tau \;=\; \sqrt{2}\sinh t.
\end{aligned}$$

F. Es ist $\boldsymbol{\alpha}'(t) = (1, \sinh t)$, $\boldsymbol{\alpha}''(t) = (0, \cosh t)$ und $\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\| = \sqrt{1+\sinh^2 t} = \cosh t$.

Dann ist die Krümmung gegeben durch

$$\begin{aligned}
\kappa_{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{or}}(t) &= \frac{\alpha_1'(t)\alpha_2''(t) - \alpha_1''(t)\alpha_2'(t)}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|^3} \\
&= \frac{\cosh t}{\cosh^3 t} \;=\; \frac{1}{\cosh^2 t}\,.
\end{aligned}$$

G. Hier hat sich ein Fehler eingeschlichen! Die Aussage stimmt nur für die „absolute“ Krümmung $\|\mathbf{T}_{\boldsymbol{\alpha}}'(s(t))\|$, bei der orientierten Krümmung sieht das Ergebnis ein wenig anders aus:

Es ist $\boldsymbol{\alpha}'(t) = (1, \cos t)$ und $\boldsymbol{\alpha}''(t) = (0, -\sin t)$. Daher ist

$$\kappa_{\boldsymbol{\alpha}}^{\text{or}}(t) = \frac{-\sin t}{\sqrt{1+\cos^2 t}^{\,3}}\,,$$

also $\kappa_{\boldsymbol{\alpha}}^{\text{or}}(\pi/2) = -1$ und $\kappa_{\boldsymbol{\alpha}}^{\text{or}}(3\pi/2) = 1$.

H. Da es sich um Raumkurven handelt, braucht man die Definition der Krümmung von Raumkurven von Seite 269.

a) Es ist $\boldsymbol{\alpha}'(t) = (1, 2, 3)$ und $\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\| = \sqrt{14}$, also

$$\mathbf{T}_{\boldsymbol{\alpha}}(t) = \frac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, 3) \quad \text{und} \quad \mathbf{T}'_{\boldsymbol{\alpha}}(t) \equiv (0, 0, 0).$$

Daher verschwindet die Krümmung von $\boldsymbol{\alpha}$ überall.

b) Es ist $\boldsymbol{\beta}'(t) = (\cos t - \sin t, \sin t + \cos t, 1)e^t$, und

$$\|\boldsymbol{\beta}'(t)\| = e^t\sqrt{(1 - 2\sin t\cos t) + (1 + 2\sin t\cos t) + 1} = e^t\sqrt{3}.$$

Also ist

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{\boldsymbol{\beta}}(t) &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos t - \sin t, \sin t + \cos t, 1) \\ \text{und} \quad \mathbf{T}'_{\boldsymbol{\beta}}(t) &= \frac{1}{\sqrt{3}}(-\sin t - \cos t, \cos t - \sin t, 0), \end{aligned}$$

und daher

$$\kappa_{\boldsymbol{\beta}}(t) = \frac{\|\mathbf{T}'_{\boldsymbol{\beta}}(t)\|}{\|\boldsymbol{\beta}'(t)\|} = \frac{1}{3}\sqrt{2}e^{-t}.$$

I. a) Durch $r = a$ wird der Kreis um $(0, 0)$ mit Radius a beschrieben. Die Gleichung $r = 2\sin t$ ist äquivalent zu der Gleichung $r^2 = 2r\sin t$, also $x^2 + y^2 = 2y$ bzw. $x^2 + (y-1)^2 = 1$. Das ist der Kreis um $(0, 1)$ mit Radius 1.

b) Betrachten wir zunächst die logarithmische Spirale $r = e^t$. Hier ist $r'(t) = r(t) = e^t$, also

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}'(t) &= (r'(t)\cos t - r(t)\sin t, r'(t)\sin t + r(t)\cos t) \\ &= e^t(\cos t - \sin t, \sin t + \cos t). \end{aligned}$$

Daher ist

$$s_{\boldsymbol{\alpha}}(t) = \int_0^t \|\boldsymbol{\alpha}'(\tau)\|\,d\tau = \sqrt{2}\int_0^t e^\tau\,d\tau = \sqrt{2}(e^t - 1).$$

Im Falle der archimedischen Spirale ist

$$\boldsymbol{\alpha}'(t) = (a\cos t - at\sin t, a\sin t + at\cos t),$$

also

$$s_{\boldsymbol{\alpha}}(t) = a\int_0^t \sqrt{1+\tau^2}\,d\tau.$$

Wie man dieses Integral auswertet, kann man in Aufgabe (D) nachlesen.

Lösungen zu den Aufgaben in 3.6

A. Druckfehler! Gemeint ist: …„die Koeffizienten aus den Werten $p(D)[f]$ gewinnen kann.“

Es ist $p(D)[1] = a_0$ und $p(D) - a_0\mathrm{id} = a_1 D + a_2 D^2 + \cdots + a_n D^n$.

Weil $D^n[x^k] = \begin{cases} k! & \text{für } n = k, \\ 0 & \text{für } n > k \end{cases}$ ist, folgt:

$$(p(D) - a_0\mathrm{id})[x] = a_1 \quad \text{und} \quad (p(D) - a_0\mathrm{id})[x^m] = 0 \text{ für } m > 1.$$

Entsprechend ist

$$(p(D) - a_0\mathrm{id} - a_1 D)[x^2] = 2a_2 \quad \text{und} \quad (p(D) - a_0\mathrm{id} - a_1 D)[x^m] = 0 \text{ für } m > 2.$$

Hat man schließlich $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ bestimmt, so ist

$$a_n = \frac{1}{n!}\big(p(D) - a_0\mathrm{id} - a_1 D - \ldots - a_{n-1}D^{n-1}\big)[x^n].$$

B. a) Das charakteristische Polynom $p(x) = x^3 - 7x + 6$ hat die Nullstellen 1, 2 und -3. Also bilden die Funktionen e^x, e^{2x} und e^{-3x} ein Fundamentalsystem.

b) Das charakteristische Polynom $p(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$ hat die Nullstellen 2 (mit Vielfachheit 2) und -3 (mit Vielfachheit 1). Das ergibt das Fundamentalsystem e^{2x}, $x \cdot e^{2x}$ und e^{-3x}.

c) Das charakteristische Polynom $p(x) = x^3 - 4x^2 + 13x = x(x^2 - 4x + 13)$ hat die Nullstellen $x = 0$ und $x = 2 \pm 3\,\mathrm{i}$. Das ergibt zunächst die komplexen Lösungen 1, $e^{(2+3\,\mathrm{i})x}$ und $e^{(2-3\,\mathrm{i})x}$ und daher die reellen Lösungen 1, $e^{2x}\cos(3x)$ und $e^{2x}\sin(3x)$.

C. Ein Fundamentalsystem bilden 1, e^{-x} und e^{3x}.

D. Das charakteristische Polynom ist $p(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = (x+1)^4$. Also erhält man als Fundamentalsystem e^{-x}, xe^{-x}, x^2e^{-x} und x^3e^{-x}.

E. Das charakteristische Polynom $p(x) = x^3 - 1$ hat die komplexen Lösungen 1 und $x = (-1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3})/2$. Das ergibt die reellen Lösungen e^x, $e^{-x/2}\cos\big((\sqrt{3}/2)x\big)$ und $e^{-x/2}\sin\big((\sqrt{3}/2)x\big)$.

F. a) ist trivial, denn $p(D)$ ist ein linearer Operator.

b) Es ist $D[g + \mathsf{i}\, h] = D[g] + \mathsf{i}\ D[h]$ und daher auch $p(D)[g + \mathsf{i}\, h] = p(D)[g] + \mathsf{i}\ p(D)[h]$ für jedes Polynom $p(x)$ (mit reellen Koeffizienten). Daraus folgt:

$$Q(t) = p(D)[\mathrm{Re}(Y) + \mathsf{i}\ \mathrm{Im}(Y)] = p(D)[\mathrm{Re}(Y)] + \mathsf{i}\ p(D)[\mathrm{Im}(Y)].$$

Vergleich der Real- und Imaginärteile ergibt die Behauptung.

Lösungen zu den Aufgaben in 4.1

A. 1) Die Reihe sei gleichmäßig konvergent, es sei $S_n := \sum_{\nu=0}^n f_\nu$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_0, so dass $|f(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ für $n \geq n_0$ und alle $x \in I$ gilt.

Beginnt man etwa mit $\varepsilon = 1$, so sieht man, dass $a_n := \|f - S_n\| < \infty$ für fast alle n ist. Außerdem ist $|f(x) - S_n(x)| \leq a_n$ für alle $x \in I$. Und es ist auch klar, dass (a_n) eine Nullfolge ist. Dabei spielen die ersten Terme der Folge keine Rolle.

2) Das Kriterium sei mit der Nullfolge (a_n) erfüllt. Ist $\varepsilon > 0$, so gibt es ein n_0, so dass $a_n < \varepsilon$ für $n \geq n_0$ ist. Dann ist aber auch $|f(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ für $n \geq n_0$ und alle $x \in I$. Das bedeutet, dass (S_n) gleichmäßig gegen f konvergiert.

B. Es ist

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=0}^n \frac{1}{(x+\nu)(x+\nu+1)} &= \sum_{\nu=0}^n \left(\frac{1}{x+\nu} - \frac{1}{x+\nu+1}\right) \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+n+1}\,.\end{aligned}$$

Also konvergiert die Funktionenreihe punktweise gegen $f(x)$.

Ist $x > 0$, so ist

$$|f(x) - S_n(x)| = \frac{1}{x+n+1} < \frac{1}{n+1}\,.$$

Mit dem Kriterium aus der vorigen Aufgabe (oder direkt) folgt die gleichmäßige Konvergenz.

C. Offensichtlich konvergiert (f_n) punktweise gegen die Nullfunktion.

Es ist $f_n(0) = 0$ für alle n. Ist $x \neq 0$, so ist

$$f_n(x) = \frac{1}{n + 1/x^2} \leq \frac{1}{n}.$$

Daraus folgt die gleichmäßige Konvergenz.

D. a) Ist $x_0 > 0$, so gibt es ein n_0, so dass $1/n < x_0$ und daher $f_n(x_0) = 0$ für $n \geq n_0$ ist. Außerdem ist $f_n(0) = 0$ für alle n.

b) Es ist

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_n(x)\,dx &= \int_0^{1/(2n)} 4n^2 x\,dx + \int_{1/(2n)}^{1/n} (4n - 4n^2 x)\,dx \\ &= 2n^2x^2 \Big|_0^{1/(2n)} + \big(4nx - 2n^2x^2\big)\Big|_{1/(2n)}^{1/n} \\ &= \frac{1}{2} + \left(4 - 2 - 2 + \frac{1}{2}\right) = 1.\end{aligned}$$

c) Die Reihe kann nicht gleichmäßig konvergieren, weil Limes und Integral nicht vertauschen.

E. Sei $x > a$ (für $x < a$ ändern sich nur ein paar Vorzeichen). Dann ist

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f_n(x) &= \lim_{n\to\infty} (f_n(x) - f_n(a)) + c \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n'(t)\,dt + c \\ &= \int_a^x g(t)\,dt + c.\end{aligned}$$

Also konvergiert (f_n) punktweise gegen eine Funktion f mit

$$f(x) = \int_a^x g(t)\,dt + c.$$

Offensichtlich ist dann f differenzierbar und $f' = g$.

Es bleibt noch die gleichmäßige Konvergenz von (f_n) auf abgeschlossenen Teilintervallen zu zeigen. Dazu sei $J \subset I$ ein abgeschlossenes Intervall der Länge ℓ, das a enthält. Für $x \in J$ ist

$$\begin{aligned}f(x) - f_n(x) &= \int_a^x g(t)\,dt + c - \int_a^x f_n'(t)\,dt - f_n(a) \\ &= \int_a^x \big(g(t) - f_n'(t)\big)\,dt + (c - f_n(a)),\end{aligned}$$

also

$$|f(x) - f_n(x)| \le \ell \cdot \|g - f_n'\| + (c - f_n(a)).$$

Weil $(f_n(a))$ gegen c und (f_n') gleichmäßig gegen g konvergiert, folgt die gleichmäßige Konvergenz von (f_n) gegen f auf J.

F. a) $f_n(0) = 0$ konvergiert natürlich gegen 0.

b) Ist $0 < |x| < 1$, so konvergiert (x^{2n}) gegen Null und daher auch $(f_n(x))$ gegen Null.

c) Ist $|x| = 1$, so ist auch $x^{2n} = 1$ und $(f_n(x))$ konvergiert gegen $1/2$.

d) Ist $|x| > 1$, so wächst x^{2n} über alle Grenzen. Daher konvergiert $f_n(x) = 1/(1 + 1/(x^{2n}))$ gegen 1.

e) Wir haben gezeigt, dass (f_n) punktweise gegen die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } |x| < 1, \\ 1/2 & \text{für } |x| = 1, \\ 1 & \text{für } |x| > 1. \end{cases}$$

Da diese Funktion unstetig ist, ist die Konvergenz nicht gleichmäßig.

G. Sei $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Dann ist $f(x) = 0$ für $0 \le x < 1$ und $f(1) = 1$. Diese Funktion ist integrierbar (die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $F(x) := 1$ für $x \le 1$ und $F(x) := x$ für $x > 1$ ist Stammfunktion), es ist $\int_0^1 f(t)\,dt = F(1) - F(0) = 0$.

Andererseits ist

$$\int_0^1 f_n(t)\,dt = \int_0^1 t^n\,dt = \frac{1}{n+1}$$

und daher auch $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(t)\,dt = 0$.

Die Folge (f_n) konvergiert nicht gleichmäßig auf $[0,1]$, weil ihre Grenzfunktion nicht stetig ist.

H. Aus dem Leibniz-Kriterium folgt, dass die Reihe punktweise gegen eine Funktion f konvergiert. Aus den Voraussetzungen folgt (mit $u_N := S_{2N-1}$ und $v_N := S_{2N}$):

$f_n \ge 0$, $v_N \le v_{N+1} \le \ldots \le u_{N+1} \le u_N$ und $u_N - v_N$. Die Folgen (u_N) und (v_N) konvergieren monoton fallend bzw. wachsend gegen f. Dann ist

$$|f(x) - v_N(x)| = f(x) - v_N(x) \le u_N(x) - v_N(x) = f_{2N}(x) \text{ für alle } x,$$

also $\|f - v_N\| \le \|f_{2N}\|$. Daraus folgt, dass (v_N) gleichmäßig gegen f konvergiert. Genauso zeigt man, dass (u_N) und schließlich S_N gleichmäßig gegen f konvergiert.

I. Die Reihe konvergiert punktweise gegen $f(x) := 1/(1-x)$. Da die Grenzfunktion für $x \to +1$ unbeschränkt ist, überträgt sich das auf die Partialsummen. Die Reihe konvergiert zwar auf jedem abgeschlossenen Teilintervall gleichmäßig, kann aber nicht auf dem ganzen Intervall $(-1,1)$ gleichmäßig konvergieren.

Lösungen zu den Aufgaben in 4.2

A. Da $f(x)$ eine abbrechende (und daher überall konvergente) Potenzreihe mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ ist, ergibt sich dort nichts Neues.

Es ist $f(2) = 7$, $f'(2) = 5$, $f''(2) = 2$ und $f^{(k)}(2) = 0$ für $k \ge 3$, also

$$f(x) = 7 + 5(x-2) + (x-2)^2.$$

Das Ergebnis erhält man auch ohne Berechnung von Ableitungen:

$$f(x) = 1+(x-2+2)+(x-2+2)^2 = 3+(x-2)+(x-2)^2+4(x-2)+4 = 7+5(x-2)+(x-2)^2.$$

B. Es ist $f'(x) = (1/2)x^{-1/2}$, $f''(x) = -(1/4)x^{-3/2}$, $f'''(x) = (3/8)x^{-5/2}$ und $f^{(4)}(x) = -(15/16)x^{-7/2}$. Dann ist

$$T_4f(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}(x-1)^4$$

und

$$R_4(x) = \frac{f^{(5)}(c)}{5!}(x-1)^5 = \frac{7}{256}c^{-9/2}(x-1)^5,$$

mit einem c zwischen 1 und x.

C. Aus der Definition der hyperbolischen Funktionen und der Exponentialreihe folgt die Darstellung

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{und} \quad \cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}\,.$$

Mit dem Satz über den Konvergenzradius von Potenzreihen mit Lücken erhält man die Konvergenz der Reihen auf $\mathbb{R}$. Das ist aber nicht nötig.

D. Induktionsanfang: Es ist $f(x) = f(x_0) + R_0(x)$, also

$$R_0(x) = f(x) - f(x-0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt.$$

Induktionsschluss von $n-1$ nach n: Nach Induktionsvoraussetzung ist

$$\begin{aligned}
R_{n-1}(x) &= \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}f^{(n)}(t)\,dt \\
&= -\int_{x_0}^{x}\left(\frac{(x-t)^n}{n!}\right)' f^{(n)}(t)\,dt \\
&= \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + \int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
R_n(x) &= f(x) - T_nf(x) \;=\; f(x) - T_{n-1}f(x) - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\
&= R_{n-1}(x) - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\
&= \int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt.
\end{aligned}$$

E. a) Es ist

$$\begin{aligned} h(x) &= \ln(1+x) - \ln(1-x) \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\frac{x^\nu}{\nu} - \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\frac{(-x)^\nu}{\nu} \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty}\bigl(1+(-1)^{\nu+1}\bigr)\frac{x^\nu}{\nu} \\ &= 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\,. \end{aligned}$$

b) Wir brauchen noch die Ableitungen von h:

$$h'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\,,\ h''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1-x)^2}$$

und schließlich

$$h^{(5)}(x) = \frac{24}{(1+x)^5} + \frac{24}{(1-x)^5}\,.$$

Es ist $h(1/11) = \ln\bigl((1+1/11)/(1-1/11)\bigr) = \ln(1.2)$. Weiter ist

$$T_4h(x) = 2x + \frac{2}{3}x^3 \quad \text{und} \quad R_4(x) = \Bigl(\frac{1}{5(1+c)^5} + \frac{1}{5(1-c)^5}\Bigr)x^5\,,$$

mit einem c zwischen 0 und x.

Jetzt ist $1+c > 1$ und $1-c > 1-1/11 = 10/11$, also

$$|R_4(1/11)| < \frac{1}{5\cdot 11^5}\Bigl(1+\bigl(\frac{11}{10}\bigr)^5\Bigr) = \frac{1}{5}\Bigl(\frac{1}{11^5}+\frac{1}{10^5}\Bigr) < 0.000005.$$

Außerdem ist $T_4h(1/11) = 2/11 + 2/(3\cdot 11^3) \approx 0.18181818 + 0.00050087 = 0.182319056$. Die ersten vier Stellen hinter dem Komma sind gesichert, es ist $\ln(1.2) \approx 0.1823$.

F. Es ist

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \bigl(1+(-x^2)\bigr)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}(-x^2)^n.$$

Dabei ist

$$\binom{-1/2}{n} = \frac{\bigl(-\frac{1}{2}\bigr)\bigl(-\frac{1}{2}-1\bigr)\cdots\bigl(-\frac{1}{2}-n+1\bigr)}{n!} = \frac{(-1)^n}{n!2^n}3\cdot 5\cdots(2n-1)\,.$$

Wegen $n!2^n = 2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n$ ist

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}x^{2n}.$$

Setzen wir $a_n := \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}$, so folgt:

$$\begin{aligned}
\arcsin x &= \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^{2n}\,dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\
&= x + \frac{1}{2 \cdot 3}x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}x^7 + \cdots
\end{aligned}$$

G. 1) Sei $f(x) = o(g(x))$ und $h(x) = o(g(x))$. Dann strebt

$$\frac{f(x) \pm h(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} + \frac{h(x)}{g(x)}$$

für $x \to 0$ gegen Null.

2) Ist $f(x) = o(g(x))$ und $h(x) = o(f(x)) = o(o(g(x)))$, so strebt

$$\frac{h(x)}{g(x)} = \frac{h(x)}{f(x)} \cdot \frac{f(x)}{g(x)}$$

gegen Null.

3) Es ist $1 - u + u \cdot (u/1+u) = (1 - u^2 + u^2)/(1+u) = 1/(1+u)$, also

$$\frac{1}{1+g(x)} = 1 - g(x) + g(x) \cdot \frac{g(x)}{1+g(x)}\,.$$

Da $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ ist, ist

$$g(x) \cdot \frac{g(x)}{1+g(x)} = o(g(x)).$$

H. Es ist

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 5\sin^4 x \cos x, \\
f''(x) &= 20\sin^3 x \cos^2 x - 5\sin^5 x, \\
f'''(x) &= 60\sin^2 x \cos^3 x - 65\sin^4 x \cos x, \\
f^{(4)}(x) &= 120\sin x \cos^4 x - 440\sin^3 x \cos^2 x + 65\sin^5 x \\
\text{und } f^{(5)}(x) &= 120\big[\cos^5 x - 4\cos^3 x \sin^2 x\big] - 440\big[3\sin^2 x \cos^3 x - 2\sin^4 x \cos x\big] \\
&\quad + 325\sin^4 x \cos x.
\end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \sin x = 0 \quad \textbf{oder} \quad \cos x = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x = x_k := k\pi \quad \textbf{oder} \quad x = y_k := (2k+1)\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Weiter ist $f''(x_k) = 0$ und $f''(y_k) = -5\sin^5(x) = 5 \cdot (-1)^{k+1}$. Ist k gerade, so liegt in y_k ein Maximum vor. Ist k ungerade, so liegt dort ein Minimum vor. Für x_k kann noch keine Entscheidung getroffen werden.

Es ist auch noch $f'''(x_k) = f^{(4)}(x_k) = 0$, aber $f^{(5)}(x_k) = 120 \cdot (-1)^k$. Also besitzt f in x_k kein lokales Extremum.

Lösungen zu den Aufgaben in 4.3

A. Es ist $f(2) = -1 < 0$ und $f(3) = 16 > 0$, also muss es in $[2,3]$ eine Nullstelle geben. Man kann $x_0 := 2$ setzen. Mit $f'(x) = 3x^2 - 2$ erhält man:

$$\begin{aligned} x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad &= \quad 2.1 \quad \text{und } f(x_1) = 0.061 > 0, \\ x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad &\approx \quad 2.09456812 \quad \text{und } f(x_2) \approx 0.000185711 > 0, \\ x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \quad &\approx \quad 2.09455148 \quad \text{und } f(x_3) \approx -0.000000017 < 0. \end{aligned}$$

Die gesuchte Nullstelle x^* muss im Intervall (x_3, x_2) liegen, d.h. es ist $x^* = 2.09456\ldots \pm 0.00001$, also $x^* = 2.0945\ldots$.

B. Sei $f(x) := x^2 + 2 - e^x$, also $f'(x) = 2x - e^x$. Wegen $f(1) = 3 - e > 0$ und $f(2) = 6 - e^2 = 6 - 7.389\ldots < 0$ muss eine Nullstelle in $[1,2]$ liegen. Wir setzen $x_0 := 1.5$ (mit $f(x_0) \approx -0.231689 < 0$). Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad &\approx \quad 1.3436 \quad \text{und } f(x_1) \approx -0.027555879 < 0, \\ x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad &\approx \quad 1.3195 \quad \text{und } f(x_2) \approx -0.00046988 < 0, \\ x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \quad &\approx \quad 1.3191. \end{aligned}$$

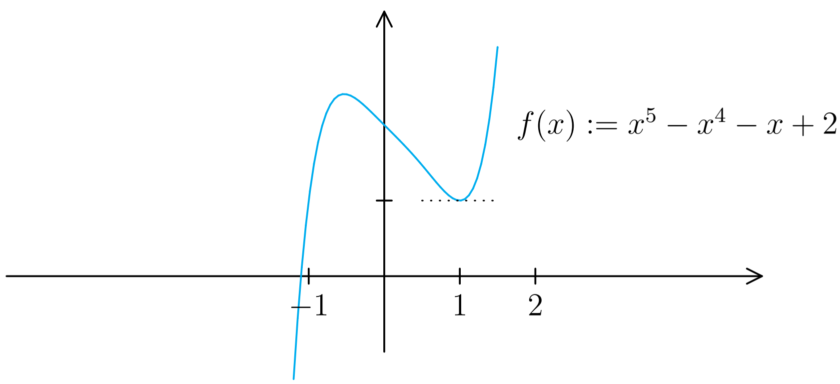
Die gesuchte Nullstelle ist $x^* = 1.3193 \pm 0.0003$.

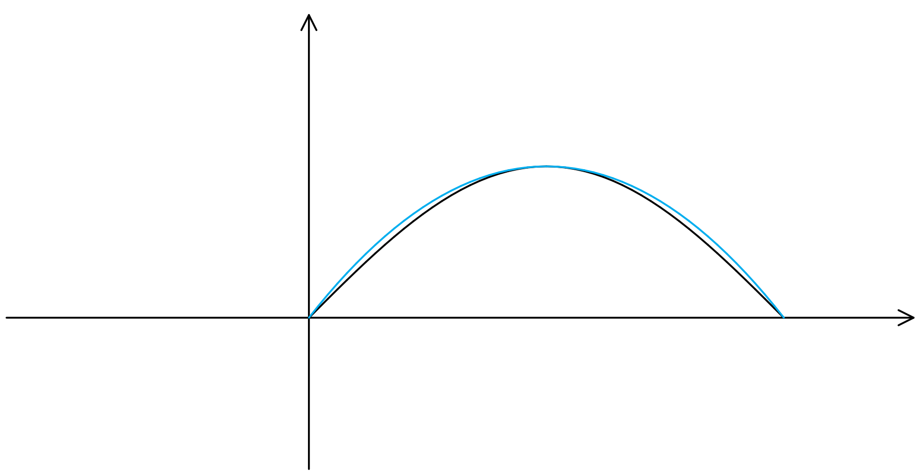
C. Zunächst ist festzustellen, dass eine Plausibilitätsbetrachtung zur Existenz einer Nullstelle fehlt. Es ist $f'(x) = 5x^4 - 4x^3 - 1$. Mit dem Startwert $x_0 = 1$, $f(x_0) = 1 > 0$ und $f'(x_0) = 0$ (waagerechte Tangente in x_0) kann man die Iteration $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$ nicht durchführen.

Der Startwert $x_0 = 2$ liefert

$$\begin{array}{rrcl} & x_1 & \approx & 1.65957, \\ & x_2 & \approx & 1,37297, \\ & x_3 & \approx & 1.0686, \\ & x_4 & \approx & -0.52934 \\ \text{und} & x_5 & \approx & 169.5250. \end{array}$$

Die Folge konvergiert nicht oder zumindest zu langsam.





D.

$p(x) = -(4/\pi^2)x^2 + (4/\pi)x$. Dann ist

$$|f(\pi/4) - p(\pi/4)| = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{3\pi}{4} \cdot \frac{\cos(\pi/4)}{6} \approx 0.005524271.$$

E. $(x^4/4 + x^3 - x^2/2 + x)|_0^1 = 0.25 + 1 - 0.5 + 1 = 1.75.$

Nach Fassregel $\int \approx (1/6)\big(f(0) + 4f(1/2) + f(1)\big) = (1 + 1/2 + 3 - 2 + 4 + 1 + 3 - 1 + 1)/6 = 10.5/6 = 1.75$. Das muss so sein, nach Konstruktion.

F. Sei $f(x) := 1/(1 + x^2)$. Dann ist

$$\begin{aligned} f(0) &= 1.00000, \\ f(0.25) &= 16/17 = 0.94118, \\ f(0.5) &= 4/5 = 0.80000, \\ f(0.75) &= 16/25 = 0.64000 \\ \text{und} \quad f(1) &= 1/2 = 0.50000. \end{aligned}$$

Außerdem ist $f'(x) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$, $f''(x) = \dfrac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$, $f'''(x) = 24 \cdot \dfrac{x-x^3}{(1+x^2)^4}$ und $f^{(4)}(x) = 24 \cdot \dfrac{5x^4-10x^2+1}{(1+x^2)^5}$.

Sei $N_i(x) := (1+x^2)^i$. Weil $f'''(x) = 24 \cdot x(1-x^2)/N_4(x)$ auf $(0,1)$ positiv ist, wächst $f''(x)$ dort streng monoton von -2 nach 0.5. Also ist $|f''(x)| \le 2$ auf $[0,1]$.

Weil $(1+x^2)^5 - (5x^4 - 10x^2 + 1) = x^{10} + 5x^8 + 10x^6 + 5x^4 + 15x^2 \ge 0$ für alle x ist, ist $\dfrac{5x^4-10x^2+1}{(1+x^2)^5} \le 1$ und $|f^{(4)}(x)| \le 24$ auf $[0,1]$.

Bei der Trapezregel kann daher der Fehler durch $1/96 = 0.01041666\ldots$ (bei 4 Teilintervallen) abgeschätzt werden, und bei der Simpson'schen Regel (bei 2 Teilintervallen) durch $24/(2880 \cdot 16) = 1/1920 = 0.000520833\ldots$.

Die Trapezregel ergibt nun

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{2} + 0.94118 + 0.80000 + 0.64000 + \frac{1}{4}\Big) = 0.78 \pm 0.02.$$

Bei der Simpson'schen Regel können wir die Teilpunkte 0, 0.5 und 1, also $h = 1/2$ benutzen, dann müssen keine neuen Teilungspunkte berücksichtigt werden und der Rechenaufwand ist der Gleiche wie bei der Trapezregel. Es ergibt sich

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{12}\Big(1 + 0.5 + 2 \cdot 0.8 + 4 \cdot (0.94118 + 0.64000)\Big) = 0.7854 \pm 0.0006.$$

G. Wert ist tabelliert, wird in der Fourier-Theorie gebraucht.

$n = 2$, $a = 0$, $b = \pi$, $h = \pi/2$, also

$$S(h) = \frac{\pi}{12}[1+0+2\cdot\frac{2}{\pi}+4\cdot\Big(\frac{\sin(\pi/4)}{\pi/4}+\frac{\sin(3\pi/4)}{3\pi/4}\Big) = \frac{\pi}{12}+\frac{1}{3}+\frac{8\sqrt{2}}{9} \approx 1.852211.$$

Lösungen zu den Aufgaben in 4.4

A. a) Es ist $\sin x / x^\alpha = \big(\sin x/x\big) \cdot 1/x^{\alpha-1}$, wobei der erste Faktor stetig und durch 1 beschränkt ist. Für $\alpha < 2$ konvergiert $\int_0^1 1/x^{\alpha-1}\,dx$.

b) Weil $|\sin x/x^\alpha| \le 1/x^\alpha$ ist, konvergiert $\int_1^\infty \sin x/x^\alpha\,dx$ für $\alpha > 1$ absolut.

c) Für $\alpha > 0$ kann man wie in 4.4.6, Beispiel C, vorgehen und partielle Integration benutzen. Mit den dortigen Bezeichnungen ist $\int_1^x \sin t/t^\alpha\,dt = \int_1^x F'(t)/t^\alpha\,dt$, und $|F(t)/t^{\alpha+1}| \le 2/t^{\alpha+1}$.

Das liefert die Konvergenz für $\alpha > 0$.

B. Für $x \ge 1$ ist

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^4}} = \sqrt{\frac{1}{x^3 + 1/x}} < \frac{1}{x^{3/2}}\,.$$

Weil $3/2 > 1$ ist, konvergiert das Integral.

C. a) Eine Stammfunktion von $1/\sqrt{1-x^2}$ ist die Funktion $\arcsin(x)$. Damit erhält man sehr schnell den Wert π.

b) Mit der Substitution $u = \arcsin x$ erhält man

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\arcsin(1-\varepsilon)} u\,du = \frac{\arcsin(x)^2}{2}\,\Big|_0^{1-\varepsilon} \to \frac{\pi^2}{8} \text{ für } \varepsilon \to 0.$$

c) Mit der Substitution $x = e^t$ erhält man

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \int_0^\infty te^{-t}\,dt = \Gamma(2) = 1.$$

Eigentlich müsste man erst über endliche Intervalle integrieren und dann den Grenzübergang vornehmen. Mit etwas Übung schafft man das in einem Schritt.

D. Für $0 < x \le \pi/2$ ist

$$|\ln \sin x| = \Big|\ln\Big(\frac{\sin x}{x}\cdot x\Big)\Big| = \Big|\ln\frac{\sin x}{x} + \ln x\Big| \le g(x) + |\ln x|$$

mit $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$.

Weiter ist $\int_0^1 \ln x\,dx = (x\cdot \ln x - x)\,\Big|_0^1 = -1$ (wobei $\lim_{x\to 0+} x\ln x = 0$ benutzt wird). Also konvergiert das Integral. Man kann zeigen, dass der Wert $= -(\pi/2)\ln 2$ ist.

E. a) Es ist $|(\sin x)/(1+x^2)| \le 1/(1+x^2)$ und

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x \,\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}.$$

b) Für $x \ge 1$ ist $\dfrac{x}{1+x^2} \ge \dfrac{x}{2x^2} = \dfrac{1}{2x}$, also

$$\int_1^R \frac{x}{1+x^2}\,dx \ge \frac{1}{2}\int_1^R \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{2}\ln x\,\Big|_1^R \to \infty \text{ für } R \to \infty.$$

Wegen (a) kann dann auch $\int_1^\infty (x+\sin x)/(1+x^2)\,dx$ nicht konvergieren.

c) $\lim\limits_{r\to\infty}\displaystyle\int_{-r}^r \frac{x+\sin x}{1+x^2}\,dx = 0$ gilt, weil der Integrand eine ungerade Funktion ist.

F. Es ist $f_1'(x) = 1/(x\ln x)$ und $f_\alpha'(x) = (1-\alpha)/(x(\ln x)^\alpha)$.

Für $\alpha \ne 1$ ist

$$\begin{aligned}
\int_2^k \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha} &= \frac{1}{1-\alpha}(\ln x)^{1-\alpha}\,\Big|_2^k \\
&= \frac{1}{1-\alpha}\left[(\ln k)^{1-\alpha} - (\ln 2)^{1-\alpha}\right] \\
&\to \begin{cases} +\infty & \text{falls } \alpha < 1, \\ \text{Grenzwert} & \text{falls } \alpha > 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Wir betrachten noch den Fall $\alpha = 1$. Es ist

$$\begin{aligned}
\int_2^k \frac{dx}{x\ln x} &= \ln\ln x\,\Big|_2^k \\
&= \ln\ln(k) - \ln\ln(2) \;\to\; +\infty \text{ für } k \to \infty.
\end{aligned}$$

Als Folgerung ergibt sich:

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n(\ln n)^\alpha} \text{ ist konvergent für } \alpha > 1, \text{ sonst divergent.}$$

G.

$$\int_1^{5-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{5-x}} = -2(5-x)^{1/2}\,\Big|_1^{5-\varepsilon} = -2\sqrt{\varepsilon} + 4$$

konvergiert für $\varepsilon \to 0$ gegen 4.

Ist $b > 0$ und $a = \sqrt{2b}$, so ist $(x^2 - ax + b)(x^2 + ax + b) = x^4 + b^2$, also $(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2) = x^4 + 4$. Der Ansatz

$$\frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \frac{Cx+D}{x^2-2x+2} = \frac{8}{x^4+4}$$

liefert $A = 1$, $B = 2$, $C = -1$ und $D = 2$. daher ist

$$\begin{aligned}
\int_0^r \frac{8\,dx}{x^4+4} &= \int_0^r \frac{x+2}{x^2+2x+2}\,dx - \int_0^r \frac{x-2}{x^2-2x+2}\,dx \\
&= \int_0^r \frac{t+1}{t^2+1}\,dt - \int_0^r \frac{t-1}{t^2+1}\,dt \\
&\quad \text{(mit den Substitutionen } x = t-1 \text{ bzw. } x = t+1\text{)} \\
&= 2\arctan(r),
\end{aligned}$$

und das konvergiert für $r \to \infty$ gegen π.

H. a) $\displaystyle\int_r^5 \frac{3}{x\ln x}\,dx = 3\ln\ln x\,\Big|_r^5 = 3\big(\ln\ln(5) - \ln\ln(r)\big)$ strebt für $r \to 1+$ gegen $+\infty$. Das Integral divergiert.

b) Hier ist aus Versehen eine Dublette hineingeraten. In Aufgabe C wurde schon gezeigt, dass $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ gegen 1 konvergiert.

c) Dieser Teil ist etwas unfair, weil der Tangens hyperbolicus im Buch nicht definiert wurde. Es ist

$$\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} \qquad \text{und} \qquad \tanh'(x) = \frac{1}{\cosh^2 x}\,.$$

Wir setzen $\tanh x = u$. Dann ist $u^2 = 1 - 1/\cosh^2 x$, also $\cosh^2 x = 1/(1-u^2)$ und

$$\begin{aligned}
\int (1-\tanh x)\,dx &= \int \frac{1-u}{1-u^2}\,du \\
&= \int \frac{du}{1+u} = \ln(1+\tanh x).
\end{aligned}$$

Also konvergiert $\displaystyle\int_0^r (1-\tanh x)\,dx = \ln(1+\tanh r)$ gegen $\ln(2)$ (für $r \to \infty$).

Lösungen zu den Aufgaben in 4.5

A. $f_x = 2x\cos(x^2+e^y+z)$, $f_y = e^y\cos(x^2+e^y+z)$ und $f_z = \cos(x^2+e^y+z)$.

B. $f_x = (1+y^2)/(1+x^2+y^2+x^2y^2)$ und $f_y = (1+x^2)/(1+x^2+y^2+x^2y^2)$.

C. $f_x = 2x/(x^2+y^2)$, $f_y = 2y/(x^2+y^2)$.

$g_x = y^2/(x^2+y^2)^{3/2}$, $g_y = -xy/(x^2+y^2)^{3/2}$.

D. Es ist

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} x^2 \sin t \, dt = x^2(-\cos t) \Big|_0^{\pi/2} = x^2,$$

also $F'(x) = 2x$. Andererseits ist

$$\int_0^{\pi/2} f_x(x,t)\, dt = \int_0^{\pi/2} 2x \sin t \, dt = 2x.$$

E. Natürlich sollte auch noch $a < b$ sein.

Es ist $f_x(x,y) := 1/\sqrt{1-x^2y^2}^3$,

$$F(x) = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2t^2}}\, dt = \int_0^x du/\sqrt{1-u^2} = \arcsin x$$

(bei Verwendung der Substitution $u = xt$) und daher $F'(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$, und andererseits

$$F'(x) = \int_0^1 f_x(x,t)\, dt = \int_0^1 dt/\sqrt{1-x^2t^2}^3 == \frac{t}{\sqrt{1-x^2t^2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

F. Es ist

$$F'(x) = \int_0^\infty e^{-(x+1)t}\, dt = \frac{1}{x+1}\,,$$

also $F(x) = \ln(x+1)$.

G. Sei $f(x,t) := \ln(1+x\sin^2 t)$. Dann ist $f_x(x,t) = \sin^2 t/(1+x\sin^2 t)$ und daher

$$\begin{aligned} x \cdot F'(x) &= \int_0^{\pi/2} \Big(1 - \frac{1}{1+x\sin^2 t}\Big)\, dt \\ &= \pi/2 - \frac{1}{\sqrt{1+x}} \arctan(\sqrt{1+x}\tan t) \Big|_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi}{2}(1 - \frac{1}{\sqrt{1+x}}). \end{aligned}$$

Das Integral wurde hier ausnahmsweise der Formelsammlung entnommen. Man kann es aber auch mit den bekannten Methoden rational machen und dann integrieren.

Also ist $F'(x) = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x\sqrt{1+x}}$, sowie $F(0) = 0$. Bei der Integration verwende Substitution $u^2 = 1+x$. Dann ist

$$F(x) = \frac{\pi}{2}\int_1^{\sqrt{1+x}} \frac{u-1}{(u^2-1)u}\, 2u\, du = \pi \ln \frac{1+\sqrt{1+x}}{2}.$$

H. Mit der Leibniz-Formel erhält man

$F'(x) = \int_{\cos x}^{\sin x} e^{xt}\,dt + e^{x\sin x}\cot x + e^{x\cos x}\tan x = e^{x\sin x}(\cot x + 1/x) + e^{x\cos x}(\tan x - 1/x)$.

I.

$$F'(x) = \frac{1}{x}\sin(xt)\Big|_{1/x}^{e^x} + \sin(xe^x) + \sin(1)/x = \sin(xe^x)(1 + 1/x).$$

J. Es ist

$$\begin{aligned}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{1}{h}\int_a^b f(x+h+t)\,dt - \frac{1}{h}\int_a^b f(x+t)\,dt \\ &= \frac{1}{h}\int_{a+h}^{b+h} f(x+t)\,dt - \frac{1}{h}\int_a^b f(x+t)\,dt,\end{aligned}$$

und das konvergiert gegen $f(x+b) - f(x+a)$, für $h \to 0$.

K. Es ist

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{2\varphi'(t)}{t^3}\right) = \frac{2(\varphi''(t)t - 3\varphi'(t))}{t^4}\,.$$

Also ist φ genau dann kritisch, wenn $\varphi''(t)t = 3\varphi'(t)$ ist, also $(\ln\varphi')'(t) = 3/t$, d.h. $\ln\varphi'(t) = 3\ln t + C_1$, bzw. $\varphi'(t) = C_2 \cdot t^3$ (mit $C_2 = e^{C_1}$) und $\varphi(t) = (C_2/4)t^4 + C_3$. Mit den Anfangsbedingungen erhält man $\varphi(t) := (t^4 + 14)/15$.