Dr. M. Friesen WS 2016/2017

Wahrscheinlichkeitstheorie

Weihnachtsblatt

Aufgabe 1 *(3 Punkte)*
Sei $X = (X_1, \dots, X_n)$ eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{R}^n$.

(a) Die Verteilung von X habe eine Dichte p. Zeigen Sie, dass X_k für $k = 1, \dots, n$ eine Dichte p_k hat und bestimmen Sie die Dichte.

(b) Die Verteilung von X habe eine Dichte p. Es sei p_k die Dichte von X_k für $k = 1, \dots, n$. Zeigen Sie, dass $X_1, \dots, X_n$ genau dann unabhängig sind, wenn

$$p(x_1, \dots, x_n) = p_1(x_1) \cdots p_n(x_n). \tag{1}$$

(c) Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und es gebe Dichten $p_1, \dots, p_n$ für $X_1, \dots, X_n$. Zeigen Sie, dass dann X eine Dichte hat gegeben durch (1).

Aufgabe 2 *(4 Punkte)*
Sei T eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}$ und sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge identisch verteilter, $\mathbb{R}$-wertiger Zufallsvariablen. Die Familie der Zufallsvariablen $\{T, X_1, \dots\}$ sei unabhängig. Definiere eine neue Zufallsvariable

$$S_T := \sum_{k=1}^{T} X_k.$$

(a) Angenommen es gilt $T, X_1 \in \mathcal{L}^1(\Omega)$. Zeigen Sie, dass $S_T \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ und

$$\mathbb{E}(S_T) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(T).$$

(b) Angenommen es gilt $T, X_1 \in \mathcal{L}^2(\Omega)$. Zeigen Sie, dass $S_T \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ und

$$\operatorname{var}(S_T) = \mathbb{E}(X_1)^2 \operatorname{var}(T) + \mathbb{E}(T)\operatorname{var}(X_1).$$

Hinweis: Schreiben Sie $S_T = \sum_{n=1}^{\infty} S_n 1_{T=n}$ wo $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

Aufgabe 3 *(4 Punkte)*
Sei T eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}$ und sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge $\mathbb{R}$-wertiger Zufallsvariablen. Die Familie der Zufallsvariablen $\{T, X_1, \dots\}$ sei unabhängig. Definiere eine neue Zufallsvariable

$$S_T := \sum_{k=1}^{T} X_k.$$

Es sei φ_{S_T} die charakteristische Funktion von S_T und φ_{X_k} die charakteristische Funktion von X_k.

(a) Zeigen Sie

$$\varphi_{S_T}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T = n) \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(\xi).$$

(b) Folgern Sie daraus Aufgabe 1.

Aufgabe 4 *(2 Punkte)*
Zeigen Sie explizit durch die Definition, dass $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ nicht straff ist.

Definition 1 *Eine Faltungshalbgruppe ist eine Familie von Maßen $(\mu_t)_{t\geq 0}$ auf $\mathbb{R}^d$ derart, dass es eine Funktion $\psi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ gibt mit*

$$\widehat{\mu}_t(\xi) = e^{-t\psi(\xi)}, \quad t \geq 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Aufgabe 5 *(4 Punkte)*
Es sei $(\mu_t)_{t\geq 0}$ eine Familie von Maßen auf $\mathbb{R}^d$. Zeigen Sie, dass $(\mu_t)_{t\geq 0}$ genau dann eine Faltungshalbgruppe ist, wenn die folgenden Eigenschaften gelten:

(a) $\mu_t(\mathbb{R}^d) \leq 1$.

(b) $\mu_t * \mu_s = \mu_{t+s}$ für alle $t, s \geq 0$ und $\mu_0 = \delta_0$.

(c) Für jedes $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mu_t(\mathrm{d}x) \longrightarrow f(0), \quad t \to 0.$$

Hinweis: Eigenschaften (a),(b),(c) lassen sich direkt über die charakteristische Funktion nachweisen. Für die Umkehrung benutzen Sie ohne Beweis: Jede stetige Funktion $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{C}$ mit den Eigenschaften

- $g(0) = 1$.
- $g(s + t) = g(s)g(t)$ für alle $s, t \geq 0$,

ist von der Form $g(t) = e^{-at}$ für ein geeignetes $a \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 6 *(4 Punkte)*
Zeigen Sie, dass nachfolgenden Familien von Maßen Faltungshalbgruppen sind.

(a) Sei $\mu_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ gegeben. Definiere $\mu_t \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ für $t > 0$ durch

$$\mu_t(A) := \mu_0(A + t), \quad A + t := \{a + t \mid a \in A\}.$$

(b) Sei $\mu_t(\mathrm{d}x) = p_t(x) m(\mathrm{d}x)$ mit

$$p_t(x) = (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d.$$

(c) Sei $\mu_t(\mathrm{d}x) = p_t(x) m(\mathrm{d}x)$ mit

$$p_t(x) = \frac{1}{\pi} \frac{t}{t^2 + x^2}, \quad t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}.$$

(d) Sei $\mu_t(\mathrm{d}x) = e^{-\lambda t} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \delta_k(\mathrm{d}x)$ mit $\lambda > 0$.

Aufgabe 7 *(6 Punkte)*
Sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ eine Teil-σ-Algebra und $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften:

(a) Für $A \in \mathcal{F}$ mit $\mathbb{P}(A) \in (0, 1)$ sei $\mathcal{G} = \{A, A^c, \emptyset, \Omega\}$. Dann gilt

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X|A)\mathbb{1}_A + \mathbb{E}(X|A^c)\mathbb{1}_{A^c}.$$

(b) Ist $Y \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und $a, b \in \mathbb{R}$, so gilt

$$\mathbb{E}(aX + bY|\mathcal{A}) = a\mathbb{E}(X|\mathcal{A}) + b\mathbb{E}(Y|\mathcal{A}).$$

(c) Sei $\mathcal{G} \subset \mathcal{A}$ eine Teil-σ-Algebra. Dann gilt

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{A})|\mathbb{G}).$$

(d) Es gilt $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{A})) = \mathbb{E}(X)$.

(e) Sei $Y \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $Y \leq X$. Dann gilt $\mathbb{E}(Y|\mathcal{A}) \leq \mathbb{E}(X|\mathcal{A})$.

(f) Es gilt $|\mathbb{E}(X|\mathcal{A})| \leq \mathbb{E}(|X||\mathcal{A})$.

Aufgabe 8 *(3 Punkte)*
Sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ eine Teil-σ-Algebra und $X_n, X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Es gelte $X_n \longrightarrow X$ in $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}(X_n|\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{E}(X|\mathcal{A})$ in $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ gilt.