Dr. Martin Friesen
Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften
Bergische Universität Wuppertal
Gaußstraße 25, 42119 Wuppertal
Telefon Büro: +49 (0)202 / 439 2627
Email: friesen@math.uni-wuppertal.de

October 14, 2019

Bachelorseminar Integrationstheorie und ihre Anwendungen in Stochastik und Analysis

ÜBERSICHT DER THEMEN

1. KOMPAKTE TEILMENGEN VON L^p

1.1. **Problemstellung.** Es sei $L^p := L^p(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), dx)$ wie oben mit $\Omega = \mathbb{R}^d$, $\mathscr{F} = \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ und $\mu(dx) = dx$. Eine Teilmenge $K \subset L^p$ heißt kompakt, falls jede offene Überdeckung von K eine eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Ziel dieser Arbeit ist es eine Charakterisierung von kompakten Mengen in L^p zu erarbeiten. Hierfür soll ein neuer und einfacher Zugang erarbeitet werden, welcher den Satz von Arzela-Ascoli, die Charakterisierung von kompakten Teilmengen in den Folgenräumen ℓ^p, sowie den Satz von Kolmogorov-Riesz als Spezialfall enthält, siehe Quelle [1].

1.2. **Erweiterung für Bachelorarbeit.** Im Rahmen einer Bachelorarbeit kann eine Einführung in (anisotrope) Besov Räume gegeben werden und in diesem Zusammenhang ein modernes Resultat zur Besov Regularität von Maßen erarbeitet werden. Dieses Resultat basiert auf der vorher erarbeiteten Charakterisierung der kompakten Mengen, siehe Quelle [2, Section 4].

1.3. **Bedeutung.** Viele Existenzbeweise in der Mathematik und angrenzenden Anwendungsfeldern werden mittels Kompaktheitsargumenten geführt, z.B. Existenz von Lösungen zu nichtlinearen Partiellen Differentialgleichungen oder Existenz von invarianten Maßen von Markovprozessen (Existenz von Gleichgewichten).

1.4. **Literatur.**

(1) Harald, Hanche-Olsen, Helge Holden, *The Kolmogorov-Riesz compactness theorem*, Expositiones Mathematicae (28), 2010, p. 385 – 394
(2) Martin Friesen, Barbara Rüdiger, Peng Jin, *Existence of densities for stochastic differential equation driven by Lévy processes with anisotropic jumps*, arXiv:1810.07504 [math.PR], 2018

2. RIESZSCHER DARSTELLUNGSSATZ

2.1. **Problemstellung.** Es sei $C([a,b])$ mit $a < b$ der Banachraum aller stetigen Funktionen $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Ziel dieser Arbeit ist es den topologischen Dualraum von $C([a,b])$ zu bestimmen. Genauer, ist eine lineare Abbildung $l : C([a,b]) \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben und erfüllt diese $f \geq 0 \Longrightarrow l(f) \geq 0$ sowie gewisse Stetigkeitsannahmen erfüllt, so soll gezeigt werden, dass es ein eindeutiges Borel Maß μ gibt mit

$$l(f) = \int_{[a,b]} f(x)\mu(dx), \qquad f \in C([a,b]).$$

Als Quelle kann hierbei [1, Theorem II.2.5] benutzt werden. Anschließend kann ein allgemeinerer Fall betrachtet werden wo $C([a,b])$ ersetzt wird durch den Raum aller stetigen im unendlichen verschwindenden Funktionen

$$C_0(\mathbb{R}^d) = \left\{ f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig und es gilt } \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0 \right\}.$$

Als Quelle kann hierbei [2, Theorem 2.22] benutzt werden.

2.2. **Erweiterung für Bachelorarbeit.** Im Rahmen einer Bachelorarbeit kann der allgemeinere Fall betrachtet werden, wo $C([a,b])$ bzw. $C_0(\mathbb{R}^d)$ ersetzt werden durch

$$C_b(E) = \{ f : E \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig und beschränkt} \},$$

wo E ein vollständiger, separabler metrischer Raum ist. Für den Beweis wird zuerst die *strikte Topologie* auf $C_b(E)$ eingeführt und diskutiert. Als Quelle kann [3, Chapter 2 Section 1] benutzt werden.

2.3. **Bedeutung.** Die Resultate tragen zu einem vollständigeren Bild der Dualräume von Räumen stetiger Funktionen bei, zum anderen liefern die erzielten Ergebnisse eine alternative Konstruktion des Lebesgue Integrales. Diese Resultate sind fundamental für die Konstruktion von Übergangswahrscheinlichkeiten für Feller Halbgruppen[1].

2.4. **Literatur.**

(1) Dirk Werner, *Funktionalanalysis*, Springer
(2) Olav Kallenberg, *Foundations of Mordern Probability*, Second edition, Springer
(3) Jan A van Casteren, *Markov Processes, Feller semigroups and Evolution equations*, Series on Concrete and Applicable Mathematics – Vol.12

3. Fouriertranformation

3.1. **Problemstellung.** Es sei μ ein endliches Borel-Maß auf $\mathbb{R}^d$. Die Fouriertransformierte von μ ist definiert durch

$$\widehat{\mu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \xi, x\rangle} \mu(dx), \qquad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Ziel der Arbeit ist es die wichtigsten Eigenschaften der Fouriertranformation (z.B. inverse Transformation, Plancherel Identität, Riemann-Lebesgue Lemma, Lévys Stetigkeitssatz) zu erarbeiten. Als Quelle kann [1, Kapitel 15.1 – 15.4] verwendet werden, siehe auch [2, Section 3.8].

3.2. **Erweiterung für Bachelorarbeit.** Im Rahmen einer Bachelorarbeit soll die Faltung, deren Eigenschaften (wie z.B. die Youngsche-Ungleichung) und der Zusammenhang zur Fouriertranformation erarbeitet werden, siehe [2, Section 3.8 und 3.9]. Als Anwendung können Unbegrenzt Teilbare Verteilungen und die Lévy-Khinchin Formel betrachtet werden, siehe [1, Section 16].

3.3. **Bedeutung.** Die Fouriertranformation bildet ein fundamentales Werkzeug für das weitere Studium von Evolutionsgleichungen (z.B. Partiellen Differentialgleichungen oder Pseudo-Differentialoperatoren), der Quantenmechanik (z.B. die Ort- und Impulsraum Dualität) sowie stochastischen Prozessen (z.B. Lévy Prozesse, affine Prozesse für die Bepreisung von Finanzderivaten oder auch der zentrale Grenzwertsatz).

3.4. **Literatur.**

(1) Achim Klenke, *Wahrscheinlichkeitstheorie*, Springer
(2) V.I. Bogachev, *Measure Theory, Volume I*, Springer

[1] eine spezielle Klasse von start stetigen Operatorhalbgruppen

4. KONVERGENZBEGRIFFE UND GLEICHGRADIGE INTEGRIERBARKEIT

4.1. **Problemstellung.** Sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum. Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heisst gleichgradig Integrierbar, falls

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega |f_n| d\mu < \infty$$

und es gibt eine integrierbare Funktion $h \geq 0$ derart dass für jedes $\varepsilon > 0$ es ein $\delta(\varepsilon) > 0$ gibt sodass für jede Menge A mit

$$\int_A h d\mu < \delta(\varepsilon)$$

auch

$$\sup_n \int_A |f_n| d\mu < \varepsilon$$

gilt. Ziel dieser Arbeit ist es zuerst eine Zusammenfassung der klassischen Konvergenzbegriffe und Konvergenzsätze zu geben. Anschließend soll der Begriff der gleichgradigen Integrierbarkeit und dessen äquivalenten Formulierungen diskutiert werden. Als Hauptresultat soll der Zusammenhang zu den klassischen Konvergenzbegriffen hergestellt werden. Als Quellen können [1, Kapitel 6.1 und 6.2] oder [2, Chapter 4.5] verwendet werden.

4.2. **Erweiterung für Bachelorarbeit.** Eine sinnvolle Erweiterung für eine Bachelorarbeit wird nach persönlicher Rücksprache erarbeitet werden.

4.3. **Bedeutung.** Verschiedene Konvergenzbegriffe und deren Zusammenhänge bilden die technische Grundlage für mathematisches Arbeiten und das Studium von konkreten Anwendungen. Ein solides Verständnis von diesen Resultaten öffnet daher eine Vielzahl von Möglichkeiten tieferliegenden Resultaten aus verschiedenen Bereichen der Analysis oder Stochastik zu untersuchen.

4.4. **Literatur.**

(1) Achim Klenke, *Wahrscheinlichkeitstheorie*, Springer
(2) V.I. Bogachev, *Measure Theory, Volume I*, Springer

5. KONVERGENZ VON MASSEN

5.1. **Problemstellung.** Sei $(\Omega, \mathscr{F})$ ein Messraum, $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmassen und μ ein weiteres Wahrscheinlichkeitsmass. In dieser Arbeit sollen verschiedene Konvergenzbegriffe für

$$\mu_n \longrightarrow \mu, \;\; n \to \infty$$

untersucht werden. Im Rahmen einer Seminararbeit soll der Begriff der schwachen Konvergenz diskutiert werden. Der Satz von Portmanteau bildet hierbei das Hauptresultat, siehe [1, Kapitel 13.1, 13.2, 13.3] oder [2, Kapitel 3.3]

5.2. **Erweiterung für Bachelorarbeit.** Im Rahmen der Bachelorarbeit soll eine andere häufig verwendete Konvergenzart untersucht werden. Genauer sollen zuerst *Couplings* eingeführt werden und mittels dieser soll die *Wasserstein-Metrik* näher betrachtet werden, siehe [3, Part I, Chapter 6].

5.3. **Bedeutung.** Konvergenz von Wahrscheinlichkeitsmaßen stellt ein wichtiges Werkzeug für das Studium von diversen Anwendungen in der Stochastik dar. So werden die erzielten Resultate z.B. regelmässig für das Studium von Gleichgewichten und dem Langzeitverhalten von Stochastischen Modellen verwendet.

5.4. **Literatur.**

(1) Achim Klenke, *Wahrscheinlichkeitstheorie*, Springer
(2) Stewart Ethier, Thomas Kurtz, *Markov Processes: Characterization and Convergence*, Wiley Series in Probability and Statistics
(3) Cedric Villani, *Optimal Transport: Old and new*, Springer

6. Der Satz von Ionesu-Tulcea

6.1. **Problemstellung.** Sei $(\Omega_i, \mathscr{F}_i, \mu_i)$, $i \in I$, eine Familie von Warhscheinlichkeitsräumen. Es lässt sich zeigen, dass es ein eindeutiges Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf dem Produktraum

$$\Omega := \prod_{i\in I} \Omega_i, \qquad \mathscr{F} := \otimes_{i\in I}\mathscr{F}_i$$

existiert derart, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$, alle $i_1, \ldots, i_n \in I$ und $A_1 \in \mathscr{F}_1, \ldots, A_n \in \mathscr{F}_{i_n}$ gilt

$$\mu\left(\{(\omega_i)_{i\in I} \in \Omega \mid \omega_{i_1} \in A_1, \ldots, \omega_{i_n} \in A_n\}\right) = \mu_{i_1}(A_1)\cdots\mu_{i_n}(A_n).$$

Ziel dieser Arbeit ist es einen allgemeineren Satz für Produkte von Markovkernen $P(x,dy)$ zu beweisen. Ein Markovkern ist per Definition messbar in x und ein Wahrscheinlichkeitsmaß in dy. Als Quelle kann [1, Kapitel 14.1, 14.2, 14.3] verwendet werden.

6.2. **Erweiterung für Bachelorarbeit.** Im Rahmen einer Bachelorarbeit soll dieser Satz verwendet werden um verschiedene Klassen von stochastischen Prozessen zu konstruieren. Besonderes Augemerk kann hierbei auf die Konstruktion von Markovketten mittels der Übergangswahrscheinlichkeiten $P(x,dy)$ gelegt werden, siehe [1, Kapitel 14.4].

6.3. **Bedeutung.** Mittels diesem Satz lassen sich alle relevanten stochastischen Prozesse konstruieren, welche derzeit in den Anwendungen der Physik, Biologie oder Finanzmathematik benutzt werden. Dieses schließt die Konstruktion von Markov Prozessen ein.

6.4. **Literatur.**

(1) Achim Klenke, *Wahrscheinlichkeitstheorie*, Springer

7. Der Satz von Dobrushin

7.1. **Problemstellung.** Sei (E,d) ein metrischer Raum und $P(x,dy)$ ein Markovkern auf diesem Raum. Definiere für $n \geq 1$ einen neuen Markovkern $P^n(x,dy)$ induktiv durch

$$P^1(x,dy) := P(x,dy) \text{ und } P^n(x,dy) := \int_E P^{n-1}(z,dy)P(x,dz)$$

Ziel dieser Arbeit ist es zu Untersuchen unter welchen Bedingungen die Folge von Markovkernen $(P^n(x,dy))_n$ einen Grenzwert besitzt. Als Hauptresultat soll der Satz von Dobrushin bewiesen werden, siehe [1, Theorem 2.3.1 analytic proof].

7.2. **Erweiterung für Bachelorarbeit.** Im Rahmen einer Bachelorarbeit sollen die erarbeiteten Ergebnisse weiter verallgemeinert werden mit dem Ziel eine allgemeine Version des Harris Theorem, siehe [2, Section 3], zu beweisen.

7.3. **Bedeutung.** Diese Thematik vermittelt einen ersten Eindruck von dem Studium von Langzeitverhalten und möglichen Gleichgewichten von Markov Prozessen. Diese Art der Resultate werden regelmässig für verschiedene Biologische, Physikalische oder Finanzmathematische Modelle angewendet.

7.4. **Literatur.**

(1) Alexei Kulik, *Ergodic Behavior of Markov Processes*, De Gruyter Studies in Mathematics
(2) Martin Hairer, *Convergence of Markov processes*, online lecture notes

8. Hahn-Jordan Zerlegung

8.1. **Problemstellung.** Sei $(\Omega, \mathscr{F})$ ein Messraum. Ein signiertes Maß μ ist eine Abbildung $\mu : \mathscr{F} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\mu(\emptyset) = 0$ und für jede folge von paarweise disjunkten Mengen $(A_n)_n \subset \mathscr{F}$ gilt

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mu(A_n),$$

wobei die Summe auf der rechten Seite absolut konvergiert. Ziel dieser Arbeit ist es die Hahn-Jordan Zerlegung für signierte Masse zu beweisen. Grob gesagt liefert diese eine Zerlegung von μ als $\mu = \mu_+ - \mu_-$ wo $\mu_\pm$ normale Maße sind. Als Quelle können [1, Kapitel 7.5] und [2, Chapter 3, Section 1] benutzt werden.

8.2. **Erweiterung für Bachelorarbeit.** Im Rahmen einer Bachelorarbeit soll eine Anwendung dieser Ergebnisse auf den Satz von Radon-Nikodym (siehe [1, Kapitel 7.4] und [2, Chapter 3 Section 2]) betrachtet werden. Darauf aufbauend sollen bedingte Erwartungswerte konstruiert und deren wichtigste Eigenschaften bewiesen werden, siehe [1, Kapitel 8.1].

8.3. **Bedeutung.** Signierte Maße treten in praktischen Anwendungen z.B. als Verteilungen von Wärmequellen auf und werden dann im Rahmen von Evolutionsgleichungen studiert. Ferner werden signierte Maße als technische Konstrukte für die Definition von bedingten Erwartungswerten mittels dem Satz von Radon-Nikodym verwendet. Dieses ist Gegenstand einer möglichen Bachelorarbeit.

8.4. **Literatur.**

(1) Achim Klenke, *Wahrscheinlichkeitstheorie*, Springer
(2) V.I. Bogachev, *Measure Theory, Volume I*, Springer

9. Disintegration und reguläre bedingte Wahrscheinlichkeiten

9.1. **Problemstellung.** Es sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ eine Teil-σ-Algebra und X $\mathscr{F}$-messbar. So soll zuerst der bedingte Erwartungswert $\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]$ und dessen wichtigste Eigenschaften diskutiert werden. Die Hauptaufgabe besteht darin die Existenz von regulären bedingten Wahrscheinlichkeiten zu studieren. D.h. Markov Kerne $Q(x,dy)$ mit der Eigenschaft $\mathbb{P}[A \mid X = x] = Q(x,A)$, wo X eine Zufallsvariable ist. Als Quelle lässt sich [1, Kapitel 8] verwenden.

9.2. **Erweiterung für Bachelorarbeit.** Eine sinnvolle Erweiterung für eine Bachelorarbeit wird nach persönlicher Rücksprache erarbeitet werden.

9.3. **Bedeutung.** Bedingte Erwartungswerte und reguläre bedingte Wahrscheinlichkeiten sind ein wichtiges Werkzeug für das Studium von Markov Prozessen und Martingalen. Mögliche Anwendungsfelder sind z.B. verschiedene Modelle der Finanzmathematik (affine Prozesse, Mehr-Perioden-Modell, etc.).

9.4. **Literatur.**

(1) Achim Klenke, *Wahrscheinlichkeitstheorie*, Springer

10. Verteilungsfunktionen und Lebesgue-Stieltjes Integral

10.1. **Problemstellung.** Im Rahmen dieser Arbeit soll zuerst der Zusammenhang von Verteilungsfunktionen und Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathbb{R}$ erarbeitet werden. Anschließend sollen weitere Eigenschaften von Verteilungsfunktionen studiert werden. Als Quelle lässt sich [1, Seite 31 – 34] nutzen.

10.2. **Erweiterung für Bachelorarbeit.** Eine sinnvolle Erweiterung für eine Bachelorarbeit wird nach persönlicher Rücksprache erarbeitet werden.

10.3. **Bedeutung.** Verteilungsfunktionen bilden ein nützliches Werkzeug für das Studium von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathbb{R}$. Ein integraler Bestandteil der Risikotheorie nutzt Verteilungsfunktionen und deren Eigenschaften um potentielle Risiken zu modellieren.

10.4. **Literatur.**

(1) Olav Kallenberg, *Foundations of Mordern Probability*, Second edition, Springer