Dr. Martin Friesen SS 2018

Maß und Integrationstheorie

Probeklausur II

Aufgabe 1 *(1 + 1 + 3 Punkte)*
Sei Ω eine nicht leere Menge.

(a) Geben Sie die Definition von einem Dynkin System über Ω.

(b) Geben Sie die Definition von einem Ring über Ω.

(c) Sei $\mathcal{D}$ ein Dynkin System über Ω mit

$$A, B \in \mathcal{D} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{D}$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{D}$ eine σ-Algebra ist.

Aufgabe 2 *(2 + 3 + 2 Punkte)*

(a) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $(\Omega', \mathcal{A}')$ ein messbarer Raum und $\varphi : \Omega \longrightarrow \Omega'$ sei $\mathcal{A}/\mathcal{A}'$-messbar. Zeigen Sie dass

$$(\varphi_* \mu)(A') = \mu(\varphi^{-1}(A')), \quad A' \in \mathcal{A}'$$

ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A}')$ definiert.

(b) Zeigen Sie, dass für jede $\mathcal{A}'$-messbare Funktion $f : \Omega' \longrightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\int\limits_{\Omega'} f(\omega')(\varphi_* \mu)(d\omega) = \int\limits_{\Omega} f(\varphi(\omega))\mu(d\omega).$$

(c) Sei $n \geq 1$, $p \in (0, 1)$ sowie

$$\mu = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} \delta_m.$$

Berechnen Sie $\mu(\mathbb{N} \cup \{0\})$ sowie $\int_{\mathbb{N} \cup \{0\}} k\mu(dk)$.

Aufgabe 3 *(2 + 2 + 3 + 2 Punkte)*

(a) Definieren Sie eine Nullmenge. Definieren Sie den Begriff eines vollständigen Maßraumes.

(b) Sei m_2 des Lebesgue Maß auf $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie

$$m_2(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0, \quad x \in [2018, \infty)\}) = 0.$$

(c) Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $f : \Omega \longrightarrow [0, \infty]$ messbar. Zeigen Sie

$$\int\limits_{\Omega} f(\omega)\mu(d\omega) = 0 \Longleftrightarrow f = 0 \quad \mu \text{ fast überall .}$$

(d) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und sei f integrierbar bezüglich μ. Zeigen Sie, dass f μ-fast überall endlich ist.

Aufgabe 4 *(2 + 2 + 2 + 2 Punkte)*

(a) Formulieren Sie das Lemma von Fatou.

(b) Formulieren Sie den Satz der monotonen Konvergenz.

(c) Geben Sie ein Beispiel für eine Folge von Funktionen auf $[0, 1]$ welche zwar in $L^1([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), m(dx))$ konvergiert, jedoch nicht m-fast überall.

(d) Zeigen Sie, dass für alle stetig differenzierbaren Funktionen $f : (0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{[0,1]} f(x)\sin(nx)m(dx) = 0.$$

Aufgabe 5 *(3 + 3 Punkte)*

(a) Sei $(a_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mit

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} |a_{n,m}| < \infty.$$

Zeigen Sie mittels dem Satz von Fubini, dass gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,m}.$$

(b) Berechnen Sie mittels dem Satz von Fubini das Integral

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} xye^{-(x^2+y^2)}m(dx, dy).$$

Aufgabe 6 *(2 + 2 + 2 Punkte)*

(a) Formulieren Sie den Transformationssatz.

(b) Sei $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_A \sin(\sqrt{x^2 + y^2}) m(dx, dy)$$

indem Sie Polarkoordinaten verwenden.

(c) Sei $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\}$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_A (x^2 + y^2)^\alpha m(dx, dy)$$

in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$. Verwenden Sie hierbei die Polarkoordinaten.