Maß und Integrationstheorie

Probeklausur I

Aufgabe 1 *(1 + 2 + 3 Punkte)*
Sei Ω eine nicht leere Menge.

(a) Geben Sie die Definition von einem äusseren Maß auf Ω.

(b) Formulieren Sie den Satz von Caratheordory.

(c) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(A_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{A}$. Zeigen Sie

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n), \quad \forall N \geq 1$$

und folgern Sie daraus

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Aufgabe 2 *(1 + 1 + 3 + 3 Punkte)*

(a) Seien $(\Omega, \mathcal{A})$ sowie $(\Omega', \mathcal{A}')$ messbare Räume. Sei $f : \Omega \longrightarrow \Omega'$ eine Abbildung. Geben Sie die Definition der $\mathcal{A}/\mathcal{A}'$-messbarkeit an.

(b) Geben Sie die Definition einer Elementarfunktion $u : \Omega \longrightarrow [0, \infty)$ an.

(c) Erläutern Sie die wesentlichen Schritte in der Konstrution des Lebesgue Integrales.

(d) Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum, $(a_n)_{n\geq 1} \subset [0, \infty]$ und $(\omega_n)_{n\geq 1} \subset \Omega$. Zeigen Sie, dass

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta_{\omega_n}$$

ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ definiert. Sei $f : \Omega \longrightarrow [0, \infty]$ messbar. Zeigen Sie

$$\int_{\Omega} f(\omega)\mu(d\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f(\omega_n).$$

Aufgabe 3 *(2 + 3 + 3 + 2 Punkte)*

(a) Formulieren Sie den Satz zur Vergleichbarkeit des Lebesgue und Riemann Integrales aus der Vorlesung.

(b) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : \Omega \longrightarrow [0, \infty]$ messbar. Zeigen Sie, dass

$$\nu(A) = \int_A f(\omega)\mu(d\omega), \quad A \in \mathcal{A}$$

ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ definiert. Es gelte nun zusätzlich $\mu(\Omega) < \infty$ und f sei μ-fast überall endlich. Zeigen Sie, dass in diesem Fall $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ ein σ-endlicher Maßraum ist.

(c) Sei $\Omega = [0, \infty)$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \cap [0, \infty)$ und m das Lebesgue Maß. Zeigen Sie, dass

$$\nu(A) = \int_A \frac{1}{x} m(dx), \quad A \in \mathcal{A}$$

ein σ-endliches Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ definiert.

(d) Geben Sie ein Beispiel für ein Maß μ auf $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]))$ für welches es kein $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ existiert mit

$$\mu(A) = \int_A f(x)m(dx), \quad \forall A \in \mathcal{B}([0, 1]).$$

Beweisen Sie diese Behauptung.

Aufgabe 4 *(2 + 2 + 2 + 2 Punkte)*

(a) Sei $p \in [1, \infty]$ und $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Definieren Sie $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ sowie $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

(b) Formulieren und beweisen Sie die Tschebyschew Ungleichung.

(c) Zeigen Sie, dass Konvergenz in $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, die Konvergenz im Maß impliziert, sofern $p \in [1, \infty)$.

(d) Zeigen Sie, dass

$$f(t) := \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-x}}{1 + x^2 + t^2} dx, \quad t \in \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert.

Aufgabe 5 *(2 + 2 + 2 Punkte)*

(a) Seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ sowie $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ Maßräume. Geben Sie die Definition von $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ sowie $\mu_1 \otimes \mu_2$ an.

(b) Formulieren Sie den Satz von Fubini.

(c) Definiere $f : \mathbb{R} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x,k) = \frac{e^{-x/k}}{k^2}$. Berechnen Sie

$$\int\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{N}} f(x,k)(m \otimes \nu)(dx, dk),$$

wobei m das Lebesgue Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ und ν das Zählmaß auf $\mathbb{N}$ bezeichnet.

Aufgabe 6 *(1 + 2 + 2 Punkte)*

(a) Geben Sie die Definition vom Bildmaß an.

(c) Sei $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Berechnen Sie das Integral

$$\int\limits_A \sqrt{x^2 + y^2} m(dx, dy)$$

indem Sie Polarkoordinaten verwenden.

(d) Sei $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^d \mid x^2 + y^2 \leq 1, \quad z \geq 0\}$. Berechnen Sie das Integral

$$\int\limits_A \sqrt{x^2 + y^2} e^{-\pi z} m(dx, dy, dz)$$

indem Sie Zylinderkoordinaten verwenden.