

Dozent: Dr. Martin Friesen

Tutor: Dennis Schroers

Finanzmathematik
Wintersemester 2018 / 2019

Probeklausur

- Besprechung am **Donnerstag 31.01.2019** in der Vorlesung

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Wie lange muss man ein Kapital von 1000 Euro bei einem Zinssatz von 5% anlegen um ein Endkapital von 1500 Euro zu erzielen? Bestimmen Sie das Ergebnis jeweils für exponentielle sowie lineare Verzinsung.

Aufgabe 2. (12 Punkte)

Es sei $\Omega = \{1, 2\}^3$ mit $p(\omega) = \frac{1}{8}$ und $X(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$.

- (a) Bestimmen Sie $\mathbb{P}(X = 3), \mathbb{P}(X = 4), \mathbb{P}(X = 5), \mathbb{P}(X = 6), \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X)$.
- (b) Bestimmen Sie $\sigma(X)$.
- (c) Sind die Ereignisse $\{X = 3\}$ sowie $\{X = 6\}$ unabhängig?

Aufgabe 3. (4 Punkte)

- (a) Geben Sie die Definition von einem risikoneutralen Maß im EPM an.
- (b) Geben Sie die Definition von Vollständigkeit von einem Markt im EPM an.

Aufgabe 4. (12 Punkte)

Betrachte das EPM mit nur einem Asset, Anfangspreisen $\pi_0 = 1$, Zinssatz $r > -1$, $\Omega = \{-1, +1\}$ und dem Endpreis für das Asset gegeben durch

$$S_1(+1) = a_+ \pi_1, \quad S_1(-1) = a_- \pi_1,$$

wo $0 < a_- < 1 + r < a_+$.

- (a) Zeigen Sie, dass das Modell Arbitragefrei und Vollständig ist.
- (b) Sei C die Auszahlungsfunktion von einem europäischen Call mit Basispreis $K > 0$. Leiten Sie eine Formel für den eindeutigen arbitragefreien Preis von C her.

Aufgabe 5. (8 Punkte)

Gegeben sei ein zweiperioden CRR-Modell mit Anfangspreisen $S_0^0 = S_0^1 = 1$ und $a_- = \frac{1}{3}$ sowie $a_+ = 3$.

- (a) Für welche Zinssätze r ist der Markt arbitragefrei.
- (b) Sei nun $r = \frac{2}{3}$. Betrachte in Abhängigkeit von $x \in \mathbb{R}$ die Auszahlungsfunktion

$$C(\omega) = \begin{cases} 1 - x, & \omega = (+1, +1) \\ x, & \omega \in \{(+1, -1), (-1, +1)\} \\ x - \frac{1}{2}, & \omega = (-1, -1) \end{cases}.$$

Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $C(\omega) \geq 0$ für alle $\omega \in \Omega$ sowie $\pi(C) \leq \frac{33}{200}$?