Prof. K. Bongartz/
D. Skorodumov
BU Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik

Linearen Algebra I WS 08/09

Ähnlichkeitsklassen von 2×2-Matrizen:

Es seien λ_1, λ_2 paarweise verschiedene Elemente eines Körpers $\mathbf{k}$. Wir betrachten die folgenden Typen von Matrizen:

$$\text{I)} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{bmatrix} \qquad \text{II)} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_1 \end{bmatrix} \qquad \text{III)} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ & \lambda_1 \end{bmatrix}.$$

Behauptung: Sei eine Matrix $A \in \mathbf{k}^{2\times 2}$ gegeben, so dass χ_A in $\mathbf{k}[X]$ in Linearfaktoren zerfällt. Dann gibt es eine Matrix $S \in \mathbf{k}^{2\times 2}$, so dass $S^{-1}AS$ von einem der drei Typen I), II), III) ist. Bis auf Permutation bei Typ I) ist dies eindeutig.

Beweis: Der nachfolgende Beweis ist konstruktiv bis auf die Zerlegung von χ_A in Linearfaktoren. Wir berechnen immer linear unabhängige Vektoren v_1, v_2, so dass die gesuchte Matrix S gerade v_i als i-te Spalte hat.

1.Fall $\chi_A = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$ mit zwei verschiedenen Linearfaktoren d.h $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Man bestimme $0 \neq v_i \in E(\lambda_i)$. Typ I) liegt vor.

2.Fall $\chi_A = (X - \lambda_1)^2$. ($\Longrightarrow$ $(A - \lambda_1 E_2)^2 = 0$ nach Cayley-Hamilton)

2.1 $(A - \lambda_1 E_2) = 0 \implies A = \lambda_1 E_2$. Typ II) liegt vor.

2.2 $(A - \lambda_1 E_2) \neq 0 \implies \exists\ e_i$ mit $(A - \lambda_1 E_2)e_i = (A - \lambda_1 E_2)_{\bullet i} \neq 0$. Setze $v_2 = e_i,\ v_1 = (A - \lambda_1 E_2)e_i$. Typ III) liegt vor.

Ähnlichkeitsklassen von 3×3-Matrizen:

Es seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ paarweise verschiedene Elemente eines Körpers $\mathbf{k}$. Wir betrachten die folgenden Typen von Matrizen:

$$\text{I)} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix} \qquad \text{II)} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_1 & \\ & & \lambda_2 \end{bmatrix} \qquad \text{III)} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & \\ & \lambda_1 & \\ & & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{IV)} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_1 & \\ & & \lambda_1 \end{bmatrix} \qquad \text{V)} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & \\ & \lambda_1 & \\ & & \lambda_1 \end{bmatrix} \qquad \text{VI)} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & \\ & \lambda_1 & 1 \\ & & \lambda_1 \end{bmatrix}.$$

Behauptung: Zu jeder Matrix $A \in \mathbf{k}^{3\times 3}$, deren charakteristisches Polynom χ_A über $\mathbf{k}$ in Linearfaktoren zerfällt, gibt es eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_3(\mathbf{k})$, so dass $S^{-1}AS$ von einem der sechs Typen ist. Bis auf Permutationen bei Typ I) ist dies eindeutig. Die auftretenden

λ_i's sind die Eigenwerte von A.

Beweis: Der nachfolgende Beweis ist konstruktiv bis auf die Zerlegung von χ_A in Linearfaktoren. Wir berechnen immer drei linear unabhängige Vektoren v_1, v_2, v_3, derart dass die gesuchte Matrix S gerade v_i als i-te Spalte hat.

1. Fall $\chi_A = \prod_{i=1}^{3}(X - \lambda_i)$ mit drei verschiedenen Nullstellen. Dann ist das Minimalpolynom μ_A gleich dem charakteristischen Polynom. Man berechne dann jeweils Eigenvektoren v_i zu λ_i. Als Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind die v_i linear unabhängig. Mit $S = \left[v_1, v_2, v_3\right]$ gilt $S^{-1}AS = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix}$. Typ I) liegt vor.

2. Fall $\chi_A = (X - \lambda_1)^2(X - \lambda_2)$.

2.1 $(A - \lambda_1 E_3)(A - \lambda_2 E_3) = 0$. Nach Zerlegungslemma ist $\mathbf{k}^3 = E(\lambda_1) \oplus E(\lambda_2) = \mathrm{Kern}(A - \lambda_1 E_3) \oplus \mathrm{Kern}(A - \lambda_2 E_3)$. Man berechne Basen (v_1, v_2) von $E(\lambda_1)$ und (v_3) von $E(\lambda_3)$. Typ II) liegt vor.

2.2 $B = (A - \lambda_1 E_3)(A - \lambda_2 E_3) \neq 0$. Dann existiert e_i mit $Be_i = B_{\bullet i} \neq 0$. Man setze $v_2 = (A - \lambda_2 E_3)e_i,\ v_1 = (A - \lambda_1 E_3)v_2 = B_{\bullet i}$ und $0 \neq v_3 \in E(\lambda_2)$. Typ III) liegt vor.

3. Fall $\chi_A = (X - \lambda_1)^3$. Man setze $B = A - \lambda_1 E_3$ ($\implies B^3 = 0$).

3.1 $B = 0 \implies A = \lambda_1 E_3$. Typ IV).

3.2 $B^2 = 0 \neq B$. Wegen $B^2 = 0$ gilt $0 \neq \mathrm{Bild}(B) \subset \mathrm{Kern}(B)$. Aus $3 = \dim\ \mathrm{Kern}(B) + \dim\ \mathrm{Bild}(B)$ folgt $\mathrm{Bild}(B) \nsubseteq \mathrm{Kern}(B)$. Man wähle nun e_i mit $B_{\bullet i} = Be_i \neq 0$, setze $v_2 = e_i,\ v_1 = Be_i$ und bestimme $v_3 \in \mathrm{Kern}(B) \setminus < Be_i >$. Typ V) liegt vor.

3.3 $B^2 \neq 0$. Man wähle e_i mit $B^2 e_i = B^2_{\bullet i} \neq 0$. Dann ist $v_3 = e_i,\ v_2 = Be_i,\ v_1 = B^2 e_i = Bv_2$ die gesuchte Basis. Es liegt Typ VI) vor. Die Vektoren v_1, v_2, v_3 sind linear unabhängig weil die Gleichung $\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \mu_3 v_3 = 0$ impliziert $0 = B^2 \cdot 0 = \mu_1 B^2 v_1 + \mu_2 B^2 v_2 + \mu_3 B^2 v_3 = \mu_3 B^2 e_i \implies \mu_3 = 0$. $0 = B \cdot 0 = \mu_1 B v_1 + \mu_2 B v_2 + \mu_3 B v_3 = \mu_2 v_1 \implies \mu_2 = 0 \implies \mu_1 = 0$.