1 Die Determinante

Definition 1 *Sei π ein Element aus der symmetrischen Gruppe S_n der Permutationen aller natürlichen Zahlen von 1 bis n.*

a) Ein Fehlstand von π ist ein Paar (i,j) mit $1 \leq i < j \leq n$ und $\pi(i) > \pi(j)$. Mit $n(\pi)$ bezeichnet man die Anzahl der Fehlstände von π.

b) Das Signum von π ist definiert als

$$sgn(\pi) = \prod_{i<j} \frac{\pi(i) - \pi(j)}{i - j}.$$

c) Eine Permutation, die nur zwei Zahlen i und j vertauscht, heißt Transposition. Man schreibt dafür (ij).

Man sieht leicht, dass $(1,2)$ der einzige Fehlstand der Transposition (12) ist.

Satz 1 *Seien π, σ in S_n und $n \geq 2$. Dann gilt:*

a) Jede Permutation in S_n ist Produkt von höchstens $n-1$ Transpositionen.

b) Es ist $\pi(12)\pi^{-1} = (\pi(1)\pi(2))$. Also sind alle Transpositionen zur Transposition (12) konjugiert.

c) $sgn(\pi\sigma) = sgn(\pi)sgn(\sigma)$, also insbesondere $sgn(id) = 1$ und $sgn(\pi^{-1}) = (sgn(\pi))^{-1}$.

d) $sgn(\pi) = (-1)^{n(\pi)}$. Also ist $sgn((12)) = -1 = sgn(\tau)$ für jede Transposition τ.

Beweis: a) Für $n = 2$ ist die Aussage klar. Im Induktionsschritt fassen wir die Permutationen, die n auf sich abbilden, als Elemente der Gruppe S_{n-1} der Permutationen von $1, 2, \ldots, n-1$ auf. Falls $\pi(n) = n$ gilt ist also π per Induktion Produkt von höchstens $n-2$ Transpositionen, die alle n fest lassen. Für $\pi(n) \neq n$ betrachten wir $\pi' = (\pi(n)n)\pi$. Dann gilt $\pi'(n) = n$ und π' ist Produkt von höchstens $n-2$ Transpositionen, also $\pi = (\pi(n)n)\pi'$ Produkt von höchtens $n-1$.

b) Man rechnet nach, dass die Abbildungen $\pi(12)\pi^{-1}$ und $(\pi(1)\pi(2))$ gleich sind. Der Rest folgt, weil man die zweielementige Menge $\{1,2\}$ mit einer geeigneten Permutation in jede zweielementige Menge $\{i,j\}$ überführen kann.

c) Der Ausdruck $\frac{\pi(i)-\pi(j)}{i-j}$ hängt nur von der Menge $\{i,j\}$ ab und nicht von der Reihenfolge von i und j. Also ist $sgn(\pi) = \prod_{\{i,j\}} \frac{\pi(i)-\pi(j)}{i-j}$, wobei das Produkt über alle zweielementigen Teilmengen von $\{1,2,\ldots,n\}$ läuft. Daraus folgt sofort

$$sgn(\pi\sigma) = \prod_{\{i,j\}} \frac{\pi\sigma(i) - \pi\sigma(j)}{i - j} = \prod_{\{i,j\}} \frac{\pi\sigma(i) - \pi\sigma(j)}{\sigma(i) - \sigma(j)} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$$

$$= \prod_{\{i,j\}} \frac{\pi\sigma(i) - \pi\sigma(j)}{\sigma(i) - \sigma(j)} \prod_{\{i,j\}} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} = sgn(\pi)sgn(\sigma).$$

Durchläuft nämlich $\{i, j\}$ alle zweielementigen Teilmengen, so auch $\{\sigma(i), \sigma(j)\}$, weshalb $sgn(\pi) = \prod_{\{i,j\}} \frac{\pi\sigma(i)-\pi\sigma(j)}{\sigma(i)-\sigma(j)}$ gilt. Der Rest von c) folgt leicht daraus, dass sgn ein Gruppenhomomorphismus von S_n in die multiplikative Gruppe von $\mathbf{Q}$ ist.

d) Bis auf das Vorzeichen stehen in Zähler und Nenner der Definition von $sgn(\pi)$ die gleichen Zahlen. Im Nenner sind alle positiv, im Zähler gerade $n(\pi)$ negative. Dies impliziert die erste Aussage von d). Der Rest folgt, da alle Transpositionen konjugiert sind.

Das Bild von sgn ist also die multiplikative Gruppe $\{+1, -1\}$.

Definition 2 *Die alternierende Gruppe A_n ist die Menge der Permutationen in S_n mit $sgn(\pi) = 1$. Eine Permutation aus A_n heißt gerade Permutation.*

Lemma 1 *a) A_n ist eine Untergruppe von S_n mit $\frac{n!}{2}$ Elementen für $n \geq 2$.*

b) π ist eine gerade Permutation genau dann, wenn π Produkt einer geraden Anzahl von Transpositionen ist.

c) Für jede Transposition τ ist S_n die disjunkte Vereinigung von A_n und $A_n\tau$.

Der Beweis ist eine einfache Übung.

Definition 3 *Sei R ein beliebiger kommutativer Ring. Matrizen mit Koeffizienten in R und deren Produkte werden analog zum Fall eines Körpers definiert. Eine Matrix $A \in R^{n\times n}$ fassen wir im folgenden auf als ein n-Tupel $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ von 'Spaltenvektoren' $v_i \in R^n$. Eine Funktion*

$$f : R^{n\times n} \longrightarrow R,$$

die $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ auf $f(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ abbildet, heißt

a) multilinear (in den Spalten), falls für alle Indizes i, alle r, r' aus R und alle Spalten $v_1, v_2, \ldots, v_i, v_i', \ldots, v_n$ gilt

$$f(v_1, \ldots, rv_i + r'v_i', \ldots, v_n) = rf(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n) + r'f(v_1, \ldots, v_i', \ldots, v_n)$$

b) alternierend (in den Spalten), falls $f(v_1, v_2, \ldots, v_n) = 0$ gilt, sobald zwei der Spalten gleich sind

c) normiert, falls $f(E_n) = 1$ gilt.

Wir wollen zunächst ein paar einfache Konsequenzen aus dieser Definition ziehen.

Lemma 2 *Sei $f : R^{n\times n} \longrightarrow R$ multilinear und alternierend. Dann gilt:*

a) $f(v_1, v_2, \dots v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = -f(v_1, v_2, \dots v_j, \dots, v_i, \dots, v_n)$, *d.h.* f *ändert beim Vertauschen von zwei Spalten das Vorzeichen.*

b) Ist π *eine Permutation, so gilt* $f(v_{\pi(1)}, v_{\pi(2)}, \dots, v_{\pi(n)}) = sgn(\pi) f(v_1, v_2, \dots, v_n)$.

c) $f(v_1, v_2, \dots, v_i + rv_j, \dots, v_j, \dots, v_n) = f(v_1, v_2, \dots v_i, \dots, v_j, \dots, v_n)$ *für beliebige* $i \neq j$ *und* $r \in R$. *Der Wert von* f *ändert sich also nicht, wenn man zu einer Spalte ein Vielfaches einer anderen Spalte hinzuzählt.*

d) $f(A) = f(E_n) \sum_{\pi \in S_n} sgn(\pi) a_{\pi(1)1} a_{\pi(2)2} \cdots a_{\pi(n)n}$.

Beweis: a) Es ist

$$0 = f(v_1, v_2, \dots v_i + v_j, \dots, v_i + v_j, \dots, v_n)$$

$$= f(v_1, v_2, \dots v_i, \dots, v_i + v_j, \dots, v_n) + f(v_1, v_2, \dots v_j, \dots, v_i + v_j, \dots, v_n)$$

$$= f(v_1, v_2, \dots v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) + f(v_1, v_2, \dots v_j, \dots, v_i, \dots, v_n).$$

b) Das ergibt sich per Induktion aus den Tatsachen, dass jede Permutation Produkt von Transpositionen ist und *sgn* ein Homomorphismus ist.

c) Das ergibt sich direkt aus der Linearität in der $i$ten Spalte und der Alterniertheit.

d) Die erste Spalte ist $\sum_{j_1=1}^{n} a_{j_1 1} e_{j_1}$. Also folgt per Linearität in der ersten Spalte

$$f(A) = \sum_{j_1=1}^{n} a_{j_1 1} f(e_{j_1}, A_{\bullet 2}, \dots, A_{\bullet n}).$$

Setzt man nun für die zweite Spalte $A_{\bullet 2} = \sum_{j_2=1}^{n} a_{j_2 1} e_{j_2}$ ein und benutzt die Linearität in der zweiten Spalte, so folgt

$$f(A) = \sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{n} a_{j_1 1} a_{j_2 2} f(e_{j_1}, e_{j_2}, A_{\bullet 3}, \dots, A_{\bullet n}).$$

Induktiv folgt

$$f(A) = \sum a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n} f(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_n}).$$

Dabei läuft die Summe über alle Indizes j_k unabhängig voneinander von 1 bis n. Sind aber zwei Indizes gleich, so ist $f(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_n}) = 0$ wegen der Alterniertheit. Also läuft die Summe nur über die n-Tupel $(j_1, j_2, \dots, j_n)$, die eine Permutation π liefern. Nach b) gilt $sgn(\pi) = f(e_{j_1}, \dots, e_{j_n})$.

Satz 2 *Es gibt genau eine multilineare alternierende normierte Funktion*

$$f : R^{n \times n} \longrightarrow R,$$

die (n-reihige) Determinante det_n. *Dabei gilt die Leibniz-Formel*

$$det_n(A) = \sum_{\pi \in S_n} sgn(\pi) a_{\pi(1)1} a_{\pi(2)2} \cdots a_{\pi(n)n}.$$

Beweis: Die Eindeutigkeit und die Leibniz-Formel sind klar nach Teil d) des voranstehenden Lemmas. Die Normiertheit ist evident und die Linearität in jeder Spalte eine einfache Rechnung.

Sei also $A_{\bullet i} = A_{\bullet j}$ mit $i \neq j$. Für die Transposition $\tau = (ij)$ gilt dann nach Lemma 1

$$det_n(A) = \sum_{\pi \in A_n} (a_{\pi(1)1} a_{\pi(2)2} \cdots a_{\pi(n)n} - a_{(\pi\tau)(1)1} a_{(\pi\tau)(2)2} \cdots a_{(\pi\tau)(n)n}).$$

Nun ist $a_{\pi(k)k} = a_{(\pi\tau)(k)k}$ für alle von i und j verschiedenen Indizes k. Weiter ist wegen der Gleichheit der Spalten mit Indizes i und j auch $a_{\pi(j)j} = a_{(\pi\tau)(i)i}$ und $a_{\pi(i)i} = a_{(\pi\tau)(j)j}$. Somit sind alle Summanden Null.

Satz 3 *Für jede Matrix A gilt $det_n(A) = det_n(A^T)$. Also ist die Determinante auch multilinear und alternierend in den Zeilen der Matrix.*

Beweis:

$$det_n(A) = \sum_{\pi \in S_n} sgn(\pi) a_{\pi(1)1} a_{\pi(2)2} \cdots a_{\pi(n)n} = \sum_{\pi \in S_n} sgn(\pi) a_{1\pi^{-1}(1)} a_{2\pi^{-1}(2)} \cdots a_{n\pi^{-1}(n)}$$

$$= \sum_{\pi \in S_n} sgn(\pi^{-1}) a_{1\pi^{-1}(1)} a_{2\pi^{-1}(2)} \cdots a_{n\pi^{-1}(n)} = det_n(A^T).$$

Dabei benutzt man der Reihe nach, dass $a_{\pi(1)1} a_{\pi(2)2} \cdots a_{\pi(n)n} = a_{1\pi^{-1}(1)} a_{2\pi^{-1}(2)} \cdots a_{n\pi^{-1}(n)}$, dass π und π^{-1} gleiches Signum haben und dass π^{-1} mit π die ganze Gruppe durchläuft.

Der nächste Satz heißt Determinantenmultiplikationssatz.

Satz 4 *Für alle $A, B \in R^{n \times n}$ gilt $det_n(AB) = det_n(A) det_n(B)$.*

Beweis: Für festes A weist man leicht nach, dass die Abbildung $f : R^{n \times n} \to R$ mit $f(B) = det_n(AB)$ multilinear und alternierend ist. Nach Teil d) von Lemma folgt die Behauptung.

Definition 4 *Für $A \in R^{n \times n}$ und Indizes i, j zwischen 1 und n sei A^{ij} die Matrix in $R^{(n-1)\times(n-1)}$, die durch Wegstreichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte aus A entsteht. Die Adjunkte $\tilde{A}$ zu A ist definiert durch $\tilde{A}_{ij} = (-1)^{i+j} det_{n-1}(A^{ji})$.*

Satz 5 *(Laplacescher Entwicklungssatz) Für jedes A in $R^{n \times n}$ und alle Indizes i, j gilt:*

a) $det_n(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} det_{n-1}(A^{ij})$ (Entwicklung nach Spalte j).

b) $det_n(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} det_{n-1}(A^{ij})$ (Entwicklung nach Zeile i).

Beweis: Wir beweisen nur die Spaltenentwicklung; die Zeilenentwicklung zeigt man analog.

Es ist $A_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$, also

$$det_n(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} det_n(A_{\bullet 1}, A_{\bullet 2}, \ldots, A_{\bullet j-1}, e_i, A_{\bullet j+1}, \ldots, A_{\bullet n}).$$

In der Matrix $(A_{\bullet 1}, A_{\bullet 2}, \ldots, A_{\bullet j-1}, e_i, A_{\bullet j+1}, \ldots, A_{\bullet n})$ kann man noch durch Spaltentransformationen alle Einträge in der i-ten Zeile außerhalb der j-ten Spalte annullieren ohne die Determinante zu ändern. Danach überführt man die erhaltene Matrix durch $i-1$ Zeilen und $j-1$ Spaltenvertauschungen in Blockdiagonalform B mit einer 1 links oben und A^{ij} rechts unten. Es ist also $det_n(A_{\bullet 1}, A_{\bullet 2}, \ldots, A_{\bullet j-1}, e_i, A_{\bullet j+1}, \ldots, A_{\bullet n}) = (-1)^{i+j} det_n(B)$.

Ist nun für eine beliebige Matrix C in $R^{(n-1)\times(n-1)}$ die erweiterte Matrix C' die Blockdiagonalmatrix mit einer 1 links oben und C rechts unten, so ist die Abbildung $C \mapsto det_n(C')$ offenbar multilinear, alternierend und normiert. Also gilt $det_n(C') = det_{n-1}(C)$ und insbesondere $det_n(B) = det_{n-1} A^{ij}$.

Satz 6 *Für $A \in R^{n\times n}$ gilt $A\tilde{A} = \tilde{A}A = det_n(A)E_n$.*

Beweis: Setze $B = \tilde{A}A$. Dann ist $B_{jj} = det_n(A)$ wegen der Entwicklung nach Spalte j. Um $B_{ij} = 0$ zu zeigen für $j \neq i$ ersetze man in A die i-te Spalte durch die j-te. Die erhaltene Matrix A' hat dann Determinante 0 und es ist $(A')^{kj}$ bis auf Vertauschen von $\mid i - j \mid -1$ Spalten gerade A^{ki}. Entwicklung von $det_n(A')$ nach Spalte j liefert das Gesuchte.

Die andere Gleichheit zeigt man analog mit Hilfe der Zeilenentwicklung.

Folgerung 1 *Genau dann ist $A \in R^{n\times n}$ invertierbar, wenn $det_n(A)$ invertierbar ist in R. Es gilt für die inverse Matrix die 'Formel'*

$$A^{-1} = (det_n(A))^{-1}\tilde{A}.$$

Über einem Körper ist eine Matrix also genau dann invertierbar, wenn die Determinante der Matrix nicht 0 ist.

Beweis: Ist $det_n(A)$ invertierbar, so auch A und es gilt die Formel. Ist umgekehrt B die inverse Matrix zu A, so folgt $1 = det_n(E_n) = det_n(AB) = det_n(A)det_n(B)$.

Man erhält daraus eine nützliche Charakterisierung des Ranges einer Matrix.

Satz 7 *Sei $A \in k^{n\times n}$, wobei k ein Körper ist. Genau dann ist $Rang(A) \geq r$, wenn es eine $r \times r$-Untermatrix B von A gibt mit $det_r(B) \neq 0$.*

Beweis: Sei der Rang $\geq r$. Dann gibt es Indizes $i_1 < i_2 < \ldots < i_r$, so dass die Matrix C mit den Zeilen $A_{i_1\bullet}, \ldots, A_{i_r\bullet}$ den Rang r hat. Daher gibt es Spaltenindizes $j_1 < \ldots < j_r$, sodass die Matrix B gebildet aus den entsprechenden Spalten von C den Rang r hat. Also ist die Determinante von B nicht 0.

Ist umgekehrt B eine invertierbare $r \times r$-Untermatrix, so sind die Zeilen von B linear unabhängig, also erst recht die entsprechenden Zeilen von A.

Schließlich erhält man für eine invertierbare Matrix noch eine 'Formel' für die Lösung eines linearen Gleichungssystems, die sogenannte Cramersche Regel.

Satz 8 *Sei $A \in R^{n \times n}$ invertierbar. Dann ist die Gleichung $Ax = b$ für jedes $b \in R^n$ eindeutig lösbar und es ist $x_i \cdot det_n(A)$ die Determinante der Matrix $A(i)$, die aus A entsteht, wenn mann die i-te Spalte durch b ersetzt.*

Beweis: Multiplikation von $Ax = b$ mit $\tilde{A}$ und Entwicklung von $det_n(A(i))$ nach der i-ten Spalte liefert sofort die Behauptung.