Prof. K. Bongartz/
J. Bender
BU Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik

Übungsgruppe	1	2	3	4	5	6	$\sum$

Testklausur zur Linearen Algebra I
20.12.03

Aufgabe 1: Für welche $b \in \mathbb{R}^3$ ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= b_1 \\ 2x + 3y - z &= b_2 \\ y + 3z &= b_3 \end{aligned}$$

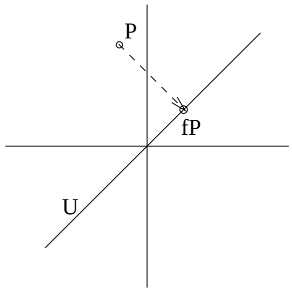
lösbar? Bestimme gegebenenfalls die gesamte Lösungsmenge.

Aufgabe 2: Für $a \in \mathbb{Q}$ sei die Matrix

$$A(a) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3a+1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

gegeben. Bestimme für alle $a \in \mathbb{Q}$ den Rang von $A(a)$ und gegebenenfalls die inverse Matrix.

Aufgabe 3: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ die Winkelhalbierende zwischen x- und y-Achse. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung, die jedem Punkt P seinen Lotpunkt unter der senkrechten Projektion auf U zuordnet.



1. Bestimme $M_\varphi(f)$ für die kanonische Basis $\varphi = (e_1, e_2)$.
2. Finde ein Koordinatensystem $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ mit $M_\psi(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Aufgabe 4: Seien $A \in k^{p \times q}$, $B \in k^{r \times s}$.

1. Wann sind die Produkte AB beziehungsweise $B^T A^T$ definiert?
2. Zeige, daß dann $(AB)^T = B^T A^T$ gilt.

Aufgabe 5: Seien V, W endlichdimensionale $\mathbb{Q}$-Vektorräume und $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, W)$. Zeige, daß $M_{\varphi,\psi}(f) = M_{\varphi',\psi'}(f)$ für alle Koordinatensysteme φ, φ' von V und ψ, ψ' von W genau dann gilt, wenn f die Nullabbildung ist.

Aufgabe 6: Seien V, W endlichdimensionale k-Vektorräume, $f, g \in \mathrm{Hom}_k(V, W)$. Dann sind äquivalent:

1. Es existiert ein $\alpha \in \mathrm{GL}(W)$ mit $f = \alpha \circ g$.
2. $\mathrm{Kern}\, f = \mathrm{Kern}\, g$.