Prof. K. Bongartz/
J. Bender
BU Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik

Selbsttestklausur zur Linearen Algebra I
03.02.04

In der ganzen Klausur sei k ein Körper. Alle Vektorräume sind endlichdimensional.

Aufgabe 1:

1. Wann heißt eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitesch?
2. Wie ist der Begriff „Eigenwert" eines Endomorphismus definiert?
3. Seien U, V Unterräume des Vektorraums W. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Dimensionen von U, V, $U \cap V$ und $U + V$?
4. Wie lautet der Satz von Cayley-Hamilton?

Aufgabe 2: Für $a \in \mathbb{R}$ sei $A(a) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ definiert als $A(a) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & a+1 & a-2 \\ 2 & -2 & a+4 \end{bmatrix}$. Bestimme den Rang von $A(a)$ in Abhängigkeit von a und für $\operatorname{Rang} A(a) = 3$ die inverse Matrix zu $A(a)$.

Aufgabe 3: Gegeben sei die Matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$. Bestimme das charakteristische Polynom χ_A sowie das Minimalpolynom μ_A. Ist A diagonalisierbar und/oder trigonalisierbar über $\mathbb{Q}$? Gib gegebenenfalls eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Q})$ an mit $S^{-1}AS = D$ oder $S^{-1}AS = T$ für eine Diagonalmatrix D oder eine obere Dreiecksmatrix T.

Aufgabe 4: Sei $A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Gib eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren an.

Aufgabe 5: Beweise jede der folgenden Aussagen durch Zitieren eines Resultates aus der Vorlesung oder widerlege sie durch ein Gegenbeispiel:

1. Das Minimalpolynom einer symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zerfällt in lauter verschiedene Linearfaktoren.
2. Zwei Matrizen $A, B \in k^{n\times n}$ mit gleichem charakteristischen Polynom sind ähnlich über k.
3. Es gibt Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit unendlich vielen Eigenwerten.
4. Es gibt Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit unendlich vielen Eigenvektoren.

Aufgabe 6: Zeige: Für jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gibt es eine unitäre Matrix U, so daß $U^{-1}AU = T$ eine obere Dreiecksmatrix ist.