Prof. K. Bongartz/
J. Bender
BU Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik

1	2	3	4	5	6	$\sum$

Nachklausur zur Linearen Algebra I
15.03.06

Name	Vorname	Matrikelnummer	Übungsgruppe
Geburtsort	Geburtsdatum	Studiengang	

In der ganzen Klausur sei k ein Körper. Alle Vektorräume sind endlichdimensional.

Aufgabe 1:

1. Wann heißt eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitär?
2. Was versteht man unter einem Eigenvektor eines Endomorphismus $f : V \to V$?
3. Wie lautet der Satz von Cayley-Hamilton?
4. Was besagt der Austauschsatz von Steinitz?

Aufgabe 2: Für $a \in \mathbb{R}$ sei $A(a) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ die Matrix $A(a) = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ -1 & 0 & 2a-a^2 \\ -a & -a^2 & a-a^3 \end{bmatrix}$. Bestimme den Rang von $A(a)$ in Abhängigkeit von a und für $\operatorname{Rang} A(a) = 3$ die inverse Matrix zu $A(a)$.

Aufgabe 3: Sei $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Berechne eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren.

Aufgabe 4: Sei $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Berechne χ_A, μ_A und Basen der Eigenräume. Ist A diagonalisierbar oder trigonalisierbar über $\mathbb{R}$? Gib gegebenenfalls eine invertierbare Matrix S an, so daß $S^{-1}AS$ Diagonalmatrix oder obere Dreiecksmatrix ist.

Aufgabe 5: Begründe durch ein Zitat aus der Vorlesung oder widerlege durch ein Gegenbeispiel folgenden Aussagen. Dabei seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $n \geq 2$.

1. Sind A und B ähnlich über $\mathbb{C}$, so haben sie gleiche Eigenwerte.
2. Haben A und B gleiches charakteristisches Polynom, so sind sie ähnlich über $\mathbb{C}$.
3. Ist $\chi_A = \chi_B = \prod_{i=1}^{n}(X - i)$, so sind A und B ähnlich über $\mathbb{C}$.
4. Falls $\overline{A}^T = A^2 + A$ gilt, so ist A diagonalisierbar über $\mathbb{C}$.

Aufgabe 6: Sei V ein endlichdimensionaler k-Vektorraum, $f : V \to V$ linear. Dann sind gleichwertig:

1. $\operatorname{Bild} f = \operatorname{Kern} f$
2. $f^2 = 0$ und $\dim V = 2 \dim \operatorname{Kern} f$.