BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C — Mathematik und Naturwissenschaften
Dr. Peter Feuerstein, Dipl.-Math.Paul Zingler

Automaten, Sprachen, Berechenbarkeit

Sommersemester 2012

Zugabe zum 11.Übungsblatt

Aufgabe 2 (LBA)

Konstruieren Sie einen linear beschränkten Automaten T_n mit $L(T_n) = \{a^i b^i c^i, i \in \mathbb{N}\}$.

Lösung Es ist $\Sigma = \{a,b,c\}, \Gamma = \Sigma \bigcup \{\$,\#,x,\Box\}$. Wir gehen wie folgt vor:

a) Überprüfe, ob das Wort der Form $a^i b^j c^k$ genügt.

b) Überprüfe ob $i = j = k$ ist.

Zu a):
Überprüfe ob $w = a^i b^j c^k$

$$\begin{array}{lll} \delta(q_0,a) = (q_1,a,R) & \delta(q_2,b) = (q_2,b,R) & \delta(q_3,c) = (q_3,c,R) \\ \delta(q_1,a) = (q_1,a,R) & \delta(q_2,c) = (q_3,c,R) & \delta(q_3,\#) = (q_4,\#,L) \\ \delta(q_1,b) = (q_2,b,R), & & \end{array}$$

und kehre zum Anfang des Wortes zurück:

$$\begin{array}{lll} \delta(q_4,a) = (q_4,a,L) & \delta(q_4,b) = (q_4,b,L) & \delta(q_4,c) = (q_4,c,L) \\ \delta(q_4,\#) = (q_5,\#,R). & & \end{array}$$

Zu b):
Um zu überprüfen ob $i = j = k$, überschreiben wir abwechselnd das erste a, dann das erste b und dann das erste c mit x und kehren zum ersten a zurück. Wiederholt man diese Prozedur und ist $i = j = k$, so stehen am Ende nur noch xe auf dem Band.
Überschreibe das erste a mit x (und stelle fest, ob nur noch xe auf dem Band stehen):

$$\delta(q_5,x) = (q_5,x,R) \qquad \delta(q_5,a) = (q_6,x,R) \qquad \delta(q_5,\#) = (q_E,\#,N).$$

Überschreibe das erste b mit x:

$$\delta(q_6,a) = (q_6,a,R) \qquad \delta(q_6,x) = (q_6,x,R) \qquad \delta(q_6,b) = (q_7,x,R).$$

Überschreibe das erste c mit x:

$$\delta(q_7,b) = (q_7,b,R) \qquad \delta(q_7,x) = (q_7,x,R) \qquad \delta(q_7,c) = (q_8,x,L).$$

Kehre anschließend zum ersten a zurück:

$$\begin{array}{lll} \delta(q_8,x) = (q_8,x,L) & \delta(q_8,b) = (q_8,b,K) & \delta(q_8,a) = (q_8,a,L) \\ \delta(q_8,\#) = (q_5,\$,R). & & \end{array}$$

Aufgabe 3 (Turingmaschine)

Eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ heißt unär kodiert, wenn $n = \sum_{j=1}^{n} i_j 1^j$ mit $i_j = 1 \forall j$, oder kurz $n = 1^n$.
Geben Sie eine Turingmaschine T an, die für zwei natürliche, unär kodierte Zahlen n, m, die durch ein # getrennt sind, die unär kodierte Summe $n + m$ berechnet.

Lösung: Idee:

a) Erste 1 mit $\Box$ überschreiben
b) # mit 1 überschreiben
c) Zum Anfang zurückkehren

$\delta(q_0, 1) = (q_1, \Box, R)$		Erste 1 mit $\Box$ überschreiben
$\delta(q_1, 1) = (q_1, 1, R)$	$\delta(q_1, \#) = (q_2, 1, L)$	# mit 1 überschreiben
$\delta(q_2, 1) = (q_2, 1, L)$	$\delta(q_2, \Box) = (q_3, \Box, R)$	Zum Anfang zurückkehren

Aufgabe 4 (Turingmaschine)

Konstruieren Sie eine Turingmaschine, die folgende Funktion f_T berechnet:

$$f_T : \{0,1\}^* \to \{0,1,\#\}^* \qquad f_T(w) = w\#w.$$

Lösung Idee:

a) Schreibe zunächst ein # ans Ende des Wortes: 01010101010 $\to$ 01010101010#
b) Ersetze nach einander die Zahlen des ursprünglichen Worts durch Buchstaben und schreibe diese ans Ende des erweiterten Wortes, also auf das erste $\Box$:

$$01010101010\#\Box \to A1010101010\#0 \to AB010101010\#01 \to \ldots.$$

c) Sind alle Zahlen im ursprünglichen Wort durch A und B ersetzt, so ist der Kopiervorgang abgeschlossen und die As und Bs können wieder durch 0 und 1 ersetzt werden.

$\delta(q_0, e \in \{0,1\}) = (q_0, e, R), \delta(q_0, \Box) = (q_1, \#, L)$	Füge # am Ende ein
$\delta(q_1, e \in \{0,1\}) = (q_1, e, L), \delta(q_1, \Box) = (q_2, \Box, R)$	Gehe zum Anfang des Wortes
$\delta(q_2, 0) = (q_3, A, R), \delta(q_2, 1) = (q_4, B, R)$	Ersetze erste 0 / 1
$\delta(q_3, e \in \{0,1,\#\}) = (q_0, e, R), \delta(q_3, \Box) = (q_5, 0, L)$	Schreibe 0 ans Ende
$\delta(q_4, e \in \{0,1,\#\}) = (q_0, e, R), \delta(q_4, \Box) = (q_5, 1, L)$	Schreibe 1 ans Ende
$\delta(q_5, e \in \{0,1,\#\}) = (q_5, e, L), \delta(q_5, e \in \{A,B\}) = (q_2, e, R)$	Suche 1. noch nicht ersetztes Zeichen
$\delta(q_2, \#) = (q_6, \#, L),$	Alle Zeichen vom ursprünglichen w ersetzt
$\delta(q_6, A) = (q_6, 0, L), \delta(q_6, B) = (q_6, 1, L)$	Ersetze A/B durch $0/1$
$\delta(q_6, \Box) = (q_E, \Box, R),$	Ende