Automaten, Sprachen, Berechenbarkeit

Sommersemester 2018

Zugabe zum 12. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Turingmaschine)

Geben Sie eine Turingmaschine an, die folgende Funktion f_T berechnet:

$$f_T : \{0,1\}^+ \to \{0,1\}^+ \qquad f_T(w) = \begin{cases} w & \text{falls } w = \text{bin}(n) \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \\ \perp & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hierbei beschreibt bin(n) die Dualdarstellung einer Zahl n, die für $x > 0$ stets mit der Ziffer 1 beginnt.

Lösung: T hält verwerfend an, falls $w = \varepsilon$ (nur $\square$ auf dem Band) oder falls (mindestens) eine führende 0 auf dem Band steht. Ansonsten hält T in der Finalkonfiguration über dem ersten Zeichen: $T = (\{q_0, q_1\}, \{0,1\}, \{0,1,\square\}, \delta, q_0, \square, \{q_1\})$ mit

$$\delta(q_0, 1) = (q_1, 1, N)$$

Eine Variante der obigen Turingmaschine für $n \in \mathbb{N}_0$, die also auch $w = \text{bin}(0) = 0$ akzeptiert: $T = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0,1\}, \{0,1,\square\}, \delta, q_0, \square, \{q_2\})$ mit

$$\delta(q_0, 0) = (q_1, 0, R)$$
$$\delta(q_0, 1) = (q_2, 1, N)$$
$$\delta(q_1, \square) = (q_2, \square, L)$$

Aufgabe 2 (Turingmaschine)

Konstruieren Sie eine Turingmaschine, die folgende Funktion f_T berechnet:

$$f_T : \{0,1\}^* \to \{0,1,\#\}^*, \qquad f_T(w) = w\#w.$$

Lösung:

a) Schreibe zunächst ein # ans Ende des Wortes: 01010101010 $\to$ 01010101010#

b) Ersetze nacheinander die Zahlen des ursprünglichen Worts durch Buchstaben und schreibe diese ans Ende des erweiterten Wortes, also auf das erste $\Box$:

$$01010101010\#\Box \to A1010101010\#0 \to AB010101010\#01 \to \ldots.$$

c) Sind alle Zahlen im ursprünglichen Wort durch A und B ersetzt, so ist der Kopiervorgang abgeschlossen und die As und Bs können wieder durch 0 und 1 ersetzt werden.

$\delta(q_0,e) = (q_0,e,R),\ e \in \{0,1\}$	
$\delta(q_0,\Box) = (q_1,\#,L)$	Füge # am Ende ein
$\delta(q_1,e) = (q_1,e,L),\ e \in \{0,1\}$	
$\delta(q_1,\Box) = (q_2,\Box,R)$	Gehe zum Anfang des Wortes
$\delta(q_2,0) = (q_3,A,R)$	
$\delta(q_2,1) = (q_4,B,R)$	Ersetze erste 0 / 1
$\delta(q_3,e) = (q_0,e,R),\ e \in \{0,1,\#\}$	
$\delta(q_3,\Box) = (q_5,0,L)$	Schreibe 0 ans Ende
$\delta(q_4,e) = (q_0,e,R),\ e \in \{0,1,\#\}$	
$\delta(q_4,\Box) = (q_5,1,L)$	Schreibe 1 ans Ende
$\delta(q_5,e) = (q_5,e,L),\ e \in \{0,1,\#\}$	
$\delta(q_5,e) = (q_2,e,R),\ e \in \{A,B\}$	Suche 1. noch nicht ersetztes Zeichen
$\delta(q_2,\#) = (q_6,\#,L)$	Alle Zeichen vom ursprünglichen w ersetzt
$\delta(q_6,A) = (q_6,0,L)$	
$\delta(q_6,B) = (q_6,1,L)$	Ersetze A/B durch $0/1$
$\delta(q_6,\Box) = (q_E,\Box,R)$	Ende

Aufgabe 3 (Turingmaschine)

Eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ heißt unär kodiert, wenn $n = \sum_{j=1}^{n} i_j 1^j$ mit $i_j = 1 \; \forall j$, oder kurz $n = 1^n$.
Geben Sie eine Turingmaschine T an, die für zwei natürliche, unär kodierte Zahlen n und m, die durch ein # getrennt sind, die unär kodierte Summe $n + m$ berechnet.

Lösung:

a) Erste 1 mit $\square$ überschreiben

$$\delta(q_0, 1) = (q_1, \square, R)$$

b) # mit 1 überschreiben

$$\delta(q_1, 1) = (q_1, 1, R)$$
$$\delta(q_1, \#) = (q_2, 1, L)$$

c) Zum Anfang zurückkehren

$$\delta(q_2, 1) = (q_2, 1, L)$$
$$\delta(q_2, \square) = (q_3, \square, R)$$

Aufgabe 4 (LBA)

Konstruieren Sie einen linear beschränkten Automaten T_n mit $L(T_n) = \{a^i b^i c^i,\ i \in \mathbb{N}\}$.

Lösung: Es sei $\Sigma = \{a,b,c\}$, $\Gamma = \Sigma \cup \{\$,\#,x,\square\}$. Wir gehen wie folgt vor:

a) Überprüfe, ob das Wort der Form $a^i b^j c^k$ genügt.

b) Überprüfe ob $i = j = k$ ist.

Zu a): Überprüfe ob $w = a^i b^j c^k$

$$\begin{array}{lll} \delta(q_0,a) = (q_1,a,R) & \delta(q_2,b) = (q_2,b,R) & \delta(q_3,c) = (q_3,c,R) \\ \delta(q_1,a) = (q_1,a,R) & \delta(q_2,c) = (q_3,c,R) & \delta(q_3,\#) = (q_4,\#,L) \\ \delta(q_1,b) = (q_2,b,R), & & \end{array}$$

und kehre zum Anfang des Wortes zurück:

$$\begin{array}{lll} \delta(q_4,a) = (q_4,a,L) & \delta(q_4,b) = (q_4,b,L) & \delta(q_4,c) = (q_4,c,L) \\ \delta(q_4,\$) = (q_5,\$,R). & & \end{array}$$

Zu b): Um zu überprüfen ob $i = j = k$, überschreiben wir abwechselnd das erste a, dann das erste b und dann das erste c mit x und kehren zum ersten a zurück. Wiederholt man diese Prozedur und ist $i = j = k$, so stehen am Ende nur noch x auf dem Band. In diesem Fall wechseln wir in den einzigen Akzeptanzzustand q_E.

Überschreibe das erste a mit x (und stelle fest, ob nur noch x auf dem Band stehen):

$$\delta(q_5,x) = (q_5,x,R) \qquad \delta(q_5,a) = (q_6,x,R) \qquad \delta(q_5,\#) = (q_E,\#,N).$$

Überschreibe das erste b mit x:

$$\delta(q_6,a) = (q_6,a,R) \qquad \delta(q_6,x) = (q_6,x,R) \qquad \delta(q_6,b) = (q_7,x,R).$$

Überschreibe das erste c mit x:

$$\delta(q_7,b) = (q_7,b,R) \qquad \delta(q_7,x) = (q_7,x,R) \qquad \delta(q_7,c) = (q_8,x,L).$$

Kehre anschließend zum ersten a zurück:

$$\begin{array}{lll} \delta(q_8,x) = (q_8,x,L) & \delta(q_8,b) = (q_8,b,L) & \delta(q_8,a) = (q_8,a,L) \\ \delta(q_8,\$) = (q_5,\$,R). & & \end{array}$$