Automaten, Sprachen, Berechenbarkeit

Sommersemester 2017

Zugabe zum 13. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Turingmaschine)

Eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ heißt unär kodiert, wenn $n = \sum_{j=1}^{n} i_j 1^j$ mit $i_j = 1\ \forall j$, oder kurz $n = 1^n$.
Geben Sie eine Turingmaschine T an, die für zwei natürliche, unär kodierte Zahlen n und m, die durch ein # getrennt sind, die unär kodierte Summe $n+m$ berechnet.

Lösung:

a) Erste 1 mit $\square$ überschreiben

$$\delta(q_0, 1) = (q_1, \square, R)$$

b) # mit 1 überschreiben

$$\delta(q_1, 1) = (q_1, 1, R)$$
$$\delta(q_1, \#) = (q_2, 1, L)$$

c) Zum Anfang zurückkehren

$$\delta(q_2, 1) = (q_2, 1, L)$$
$$\delta(q_2, \square) = (q_3, \square, R)$$

Aufgabe 2 (LBA)

Konstruieren Sie einen linear beschränkten Automaten T_n mit $L(T_n) = \{a^i b^i c^i,\ i \in \mathbb{N}\}$.

Lösung: Es sei $\Sigma = \{a,b,c\}$, $\Gamma = \Sigma \cup \{\$,\#,x,\Box\}$. Wir gehen wie folgt vor:

a) Überprüfe, ob das Wort der Form $a^i b^j c^k$ genügt.

b) Überprüfe ob $i = j = k$ ist.

Zu a): Überprüfe ob $w = a^i b^j c^k$

$$\begin{array}{lll} \delta(q_0,a) = (q_1,a,R) & \delta(q_2,b) = (q_2,b,R) & \delta(q_3,c) = (q_3,c,R) \\ \delta(q_1,a) = (q_1,a,R) & \delta(q_2,c) = (q_3,c,R) & \delta(q_3,\#) = (q_4,\#,L) \\ \delta(q_1,b) = (q_2,b,R), & & \end{array}$$

und kehre zum Anfang des Wortes zurück:

$$\begin{array}{lll} \delta(q_4,a) = (q_4,a,L) & \delta(q_4,b) = (q_4,b,L) & \delta(q_4,c) = (q_4,c,L) \\ \delta(q_4,\$) = (q_5,\$,R). & & \end{array}$$

Zu b): Um zu überprüfen ob $i = j = k$, überschreiben wir abwechselnd das erste a, dann das erste b und dann das erste c mit x und kehren zum ersten a zurück. Wiederholt man diese Prozedur und ist $i = j = k$, so stehen am Ende nur noch x auf dem Band. In diesem Fall wechseln wir in den einzigen Akzeptanzzustand q_E.

Überschreibe das erste a mit x (und stelle fest, ob nur noch x auf dem Band stehen):

$$\delta(q_5,x) = (q_5,x,R) \qquad \delta(q_5,a) = (q_6,x,R) \qquad \delta(q_5,\#) = (q_E,\#,N).$$

Überschreibe das erste b mit x:

$$\delta(q_6,a) = (q_6,a,R) \qquad \delta(q_6,x) = (q_6,x,R) \qquad \delta(q_6,b) = (q_7,x,R).$$

Überschreibe das erste c mit x:

$$\delta(q_7,b) = (q_7,b,R) \qquad \delta(q_7,x) = (q_7,x,R) \qquad \delta(q_7,c) = (q_8,x,L).$$

Kehre anschließend zum ersten a zurück:

$$\begin{array}{lll} \delta(q_8,x) = (q_8,x,L) & \delta(q_8,b) = (q_8,b,L) & \delta(q_8,a) = (q_8,a,L) \\ \delta(q_8,\$) = (q_5,\$,R). & & \end{array}$$