BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

Bergische Universität Wuppertal
Fakultät 4 — Mathematik und Naturwissenschaften
Dr. Peter Feuerstein, M.Sc. Nils Kintscher

Automaten, Sprachen, Berechenbarkeit

Sommersemester 2017

13. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Turingmaschine)

Eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ heißt unär kodiert, wenn

$$n = \sum_{j=1}^{n} i_j 1^j \text{ mit } i_j = 1 \; \forall j, \text{ oder kurz } n = 1^n = \underbrace{1 \ldots 1}_{n \text{ mal}}.$$

Geben Sie eine Turingmaschine T an, die für zwei natürliche, unär kodierte Zahlen n und m, die durch ein # getrennt sind, die unär kodierte Summe $n+m$ berechnet.

Aufgabe 2 (LBA)

Konstruieren Sie einen linear beschränkten Automaten T_n mit $L(T_n) = \{a^i b^i c^i,\ i \in \mathbb{N}\}$.

Aufgabe 3 (Entscheidbarkeit)

a) Es sei

$$H_4 \;:=\; \{w \in \{0,1\}^* \mid T_w \text{ hält bei Eingabe von } \mathrm{bin}(w_{10} \bmod 4)\},$$

wobei $w_{10} \in \mathbb{N}_0$ mit $\mathrm{bin}(w_{10}) = w$ (evtl. zuzüglich führender Nullen).
Zeigen Sie, dass H_4 semientscheidbar ist.

b) Es sei

$$H_x \;:=\; \{w \in \{0,1\}^* \mid T_w \text{ hält bei Eingabe von } x\}$$

für ein $x \in \{0,1\}^*$. Zeigen Sie, dass H_x semientscheidbar aber nicht entscheidbar ist.

Aufgabe 4 (Entscheidbarkeit)

Es sei $\mathscr{R}$ die Klasse aller turingberechenbaren Funktionen über $\Sigma = \{0,1\}$ und

$$\mathscr{S} \;:=\; \{f : \Sigma^* \to \Sigma^* \mid f \text{ turingberechenbar und } |f(w)| \text{ beschränkt}\},$$

d.h. $\forall f \in \mathscr{S}\ \exists k \in \mathbb{N}$ mit $|f(x)| \leq k\ \forall w \in \Sigma^*$.

Zeigen Sie:

a) $\mathscr{S}$ ist eine nicht-leere echte Teilmenge von $\mathscr{R}$, d.h. $\emptyset \neq \mathscr{S} \subsetneq \mathscr{R}$.

b) $L(\mathscr{S})$ ist nicht entscheidbar.