



# Automaten, Sprachen, Berechenbarkeit

Sommersemester 2017

## Zugabe zum 12. Übungsblatt

### Aufgabe 4 (Turingmaschine)

Geben Sie eine Turingmaschine an, die folgende Funktion  $f_T$  berechnet:

$$f_T : \{0, 1\}^+ \rightarrow \{0, 1\}^+ \quad f_T(w) = \begin{cases} w & \text{falls } w = \text{bin}(n) \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \\ \perp & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hierbei beschreibt  $\text{bin}(n)$  die Dualdarstellung einer Zahl  $n$ , die für  $x > 0$  stets mit der Ziffer 1 beginnt.

**Lösung:**  $T$  hält verwerfend an, falls  $w = \varepsilon$  (nur  $\square$  auf dem Band) oder falls (mindestens) eine führende 0 auf dem Band steht. Ansonsten hält  $T$  in der Finalkonfiguration über dem ersten Zeichen:  $T = (\{q_0, q_1\}, \{0, 1\}, \{0, 1, \square\}, \delta, q_0, \square, \{q_1\})$  mit

$$\delta(q_0, 1) = (q_1, 1, N)$$

Eine Variante der obigen Turingmaschine für  $n \in \mathbb{N}_0$ , die also auch  $w = \text{bin}(0) = 0$  akzeptiert:  $T = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \{0, 1, \square\}, \delta, q_0, \square, \{q_2\})$  mit

$$\delta(q_0, 0) = (q_1, 0, R)$$

$$\delta(q_0, 1) = (q_2, 1, N)$$

$$\delta(q_1, \square) = (q_2, \square, L)$$

### Aufgabe 5 (Turingmaschine)

Konstruieren Sie eine Turingmaschine, die folgende Funktion  $f_T$  berechnet:

$$f_T : \{0,1\}^* \rightarrow \{0,1,\#\}^*, \quad f_T(w) = w\#w.$$

#### Lösung:

- Schreibe zunächst ein # ans Ende des Wortes:  $01010101010 \rightarrow 01010101010\#$
- Ersetze nacheinander die Zahlen des ursprünglichen Worts durch Buchstaben und schreibe diese ans Ende des erweiterten Wortes, also auf das erste  $\square$ :

$$01010101010\#\square \rightarrow A1010101010\#0 \rightarrow AB010101010\#01 \rightarrow \dots$$

- Sind alle Zahlen im ursprünglichen Wort durch A und B ersetzt, so ist der Kopiervorgang abgeschlossen und die As und Bs können wieder durch 0 und 1 ersetzt werden.

$$\delta(q_0, e) = (q_0, e, R), e \in \{0,1\}$$

$$\delta(q_0, \square) = (q_1, \#, L)$$

Füge # am Ende ein

$$\delta(q_1, e) = (q_1, e, L), e \in \{0,1\}$$

$$\delta(q_1, \square) = (q_2, \square, R)$$

Gehe zum Anfang des Wortes

$$\delta(q_2, 0) = (q_3, A, R)$$

$$\delta(q_2, 1) = (q_4, B, R)$$

Ersetze erste 0 / 1

$$\delta(q_3, e) = (q_0, e, R), e \in \{0,1,\#\}$$

$$\delta(q_3, \square) = (q_5, 0, L)$$

Schreibe 0 ans Ende

$$\delta(q_4, e) = (q_0, e, R), e \in \{0,1,\#\}$$

$$\delta(q_4, \square) = (q_5, 1, L)$$

Schreibe 1 ans Ende

$$\delta(q_5, e) = (q_5, e, L), e \in \{0,1,\#\}$$

$$\delta(q_5, e) = (q_2, e, R), e \in \{A,B\}$$

Suche 1. noch nicht ersetztes Zeichen

$$\delta(q_2, \#) = (q_6, \#, L)$$

Alle Zeichen vom ursprünglichen  $w$  ersetzt

$$\delta(q_6, A) = (q_6, 0, L)$$

$$\delta(q_6, B) = (q_6, 1, L)$$

Ersetze A/B durch 0/1

$$\delta(q_6, \square) = (q_E, \square, R)$$

Ende