Geometrie
und
Vollständigkeit
des Komplementes von
$G_{2,6}$ in $\mathbb{P}^{14}$

Diplomarbeit im Fachbereich 7 – Mathematik an der
Bergischen Universität Gesamthochschule Wuppertal

von Peter Feuerstein

Betreuung: Prof. Dr. Klaus Fritzsche

Wuppertal, den 31. Mai 1991

Inhalt

Einleitung

Für das Studium komplexer Mannigfaltigkeiten ist die Frage nach der Lösbarkeit der Cousin'schen Probleme von großer Bedeutung. Die Ausweitung dieser Probleme auf kohärente analytische Garben auf Steinschen Mannigfaltigkeiten liefert als wichtige Ergebnisse die Theoreme A und B von Cartan. Theorem B besagt, daß auf Steinschen Mannigfaltigkeiten sämtliche Cohomologiegruppen $H^i(X, \mathcal{F})$ für $i \geq 1$ und jede kohärente analytische Garbe $\mathcal{F}$ verschwinden. Tatsächlich sind die Steinschen Mannigfaltigkeiten sogar durch diese Eigenschaft charakterisiert. Nun gibt es aber in der komplexen Analysis eine große Klasse von nicht-Steinschen Mannigfaltigkeiten. Während man über kompakte Mannigfaltigkeiten noch weiß, daß alle Cohomologiegruppen endlich-dimensional sind, verhalten sich nicht-kompakte Mannigfaltigkeiten sehr unterschiedlich. Für n–dimensionale parakompakte Mannigfaltigkeiten ohne kompakte Komponenten hat man das auf den Arbeiten von Malgrange, Komatsu und Siu aufbauende Resultat von Greene und Wu [10], welches besagt, daß alle Cohomologiegruppen $H^i(X, \mathcal{F})$ für $i \geq n$ verschwinden. Daran anknüpfend liefert folgende Definition eine Möglichkeit der groben Klassifikation:

Def.: Sei X eine n–dimensionale Mannigfaltigkeit.

(i) X heißt q–vollständig, wenn es eine (mindestens $\mathcal{C}^2$–)Ausschöpfungsfunktion $f : X \to \mathbb{R}$ gibt, so daß für alle $x \in X$ die Leviform $L_x(f)$ positiv definit auf einem mindestens $(n - q + 1)$–dimensionalen Unterraum des Tangentialraumes T_xX ist.

(ii) X heißt cohomologisch q–vollständig, wenn alle Cohomologiegruppen $H^i(X, \mathcal{F})$ für $i \geq q$ und jede kohärente analytische Garbe $\mathcal{F}$ verschwinden.

Man weiß bereits, daß diese beiden Begriffe für $q = 1$, d. h. für Steinsche Mannigfaltigkeiten äquivalent sind (s.o.).

Einen Ausgangspunkt für weitere Überlegungen liefert das wichtige Ergebnis von A. Andreotti und H. Grauert [1], welches besagt , da für beliebige $q \geq 1$ und jede komplexe Mannigfaltigkeit aus der q–Vollständigkeit die cohomologische q –Vollständigkeit folgt. Die Umkehrbarkeit dieser Implikation ist jedoch eine bislang unbeantwortete Frage, denn es ist weder ein Gegenbeispiel bekannt, noch konnte die Äquivalenz der beiden Vollständigkeitsbegriffe gezeigt werden.

Ein Ansatzpunkt zur Lösung dieses Problems ist die Betrachtung spezieller Beispiele. Eine interessante Klasse von Beispielen stellen die Komplemente algebraischer Untervarietäten in komplex projektiven Räumen dar. Ihre Untersuchung wurde mit folgendem Resultat von W. Barth [2] begonnen:

Ist $Y \subset \mathbb{P}^n$ eine abgeschlossene zusammenhängende komplexe Untermannigfaltigkeit der komplexen Codimension q, dann ist die Funktion $f : \mathbb{P}^n \backslash Y \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) := -\mathrm{dist}^2(x, Y)$, eine Ausschöpfungsfunktion für $\mathbb{P}^n \backslash Y$, deren Leviform in jedem Punkt, in dem f differenzierbar ist, höchstens $q - 1$ Eigenwerte ≤ 0 hat.

Offenbar sind also die Punkte, in denen die Funktion f nicht differenzierbar ist, von besonderem Interesse, da in ihnen die Konstruktion einer q–konvexen Ausschöpfungsfunktion und damit der Beweis der q–Vollständigkeit von $\mathbb{P}^n \backslash Y$ i. a. Schwierigkeiten bereitet.

Diese Beobachtung war Ausgangspunkt der Untersuchungen von M. Buchner, K. Fritzsche und T. Sakai in [7], wo sie eine Klasse von komplexen Mannigfaltigkeiten untersuchten, für die sie explizit durch Konstruktion von Ausschöpfungsfunktionen und Berechnung der Cohomologien die Äquivalenz der beiden Begriffe zeigten. In diesen Fällen handelte es sich um Komplemente normal-homogener Untermannigfaltigkeiten (Def. siehe 1.3) in einem komplex projektiven Raum $\mathbb{P}^n$. Jedes dieser Komplemente war der Totalraum eines Faserbündels über einer kompakten komplexen Mannigfaltigkeit mit Steinschen Fasern, so daß sich die entsprechende Ausschöpfungsfunktion leicht konstruieren ließ.

Eine weitere Klasse von komplexen Mannigfaltigkeiten wurde von M. Buchner und K. Fritzsche in [6] untersucht, nämlich die Komplemente der Grassmann-Mannigfaltigkeiten $G_{2,n}$, die mit der Plücker-Einbettung in $\mathbb{P}^N$ mit $N = \binom{n}{2} - 1$ eingebettet sind. Dabei sind die ersten beiden nicht trivialen Fälle $G_{2,4} \hat{=} Q_4$ und $G_{2,5}$ normal-homogene Untermannigfaltigkeiten, also solche, die bereits in [7] behandelt wurden. Für $n \geq 6$ ist $G_{2,n}$ nicht mehr normal-homogen, jedoch handelt es sich bei diesen Grassmann-Mannigfaltigkeiten noch immer um homogene Untermannigfaltigkeiten, also Bahnen von abgeschlossenen Untergruppen der Isometrien des $\mathbb{P}^N$.

In dieser Arbeit wird der erste nicht normal-homogene Fall behandelt, also das Komplement $\mathbb{P}^{14} \backslash G_{2,6}$. Da die Äquivalenz der beiden Vollständigkeitsbegriffe für beliebige $n \in \mathbb{N}$ bereits in [6] gezeigt wurde, wird großer Wert auf die Übersichtlichkeit in den konstruktiven Teilen dieses Beweises gelegt, insbesondere also bei der Konstruktion der Ausschöpfungsfunktion. Neu sind die geometrischen Untersuchungen der $G_{2,6}$ und ihres Komplements, vor allem die Bestimmung der Orbitstruktur (Kap. 2). Ziel ist dabei ein tieferes Verständnis der Hindernisse gegen eine Verbesserung des Vollständigkeitsgrades. Es ist zu vermuten, daß sich die hier entwickelten Methoden auch auf andere Situationen anwenden lassen.

Zum Aufbau der Arbeit:

Zunächst werden in Kapitel 1 die erforderlichen Hilfsmittel eingeführt.

In Kapitel 2 folgt dann die genaue geometrische Untersuchung der Grassmann-Mannigfaltigkeit und ihres Komplements $\mathbb{P}^{14} \backslash G_{2,6}$. Anschließend werden diejenigen Punkte betrachtet, in denen die Konstruktion der Ausschöpfungsfunktion Schwierigkeiten bereitet. Diese Punkte, in denen die Funktion $f(x) := -\operatorname{dist}^2(x, G_{2,6})$ nicht differenzierbar ist, liegen dicht im Schnittort $C(G_{2,6})$ von $G_{2,6}$. Es wird sich im vorliegenden Fall zeigen, daß der Schnittort wie in den normal-homogenen Fällen nur aus solchen Punkten besteht, von denen ausgehend man mindestens zwei minimale Geodätische zur Grassmann-Mannigfaltigkeit $G_{2,6}$ finden kann. Da die Menge $C_0(G_{2,6})$ dieser Punkte eine Teilmenge derjenigen Menge von Punkten ist, in denen f nicht differenzierbar ist, und anderseits dicht im Schnittort liegt, erhält man die Gleichheit der drei Mengen. Unter Verwendung einer natürlichen Stratifikation sowie der speziellen Gestalt der Geodätischen in $\mathbb{P}^{14} \backslash G_{2,6}$ läßt sich nun der Schnittort explizit angeben. Es folgt die Berechnung des Orbitraums bezüglich der oben genannten Untergruppe der Isometrien, sowie eine geometrische Interpretation der Ergebnisse.

In den anschließenden Kapiteln wird die Äquivalenz der beiden Vollständigkeitsbegriffe für den vorliegenden Fall bewiesen. Dazu wird in Kapitel 3 zunächst die analytische Cohomologie berechnet, insbesondere wird gezeigt, daß $H^9\big(\mathbb{P}^{14} \backslash G_{2,6}, \Omega^{14}\big) \neq 0$ ist, so daß das Komplement $\mathbb{P}^{14} \backslash G_{2,6}$ nicht 9-vollständig sein kann.

In Kapitel 4 schließlich wird eine Ausschöpfungsfunktion auf $\mathbb{P}^{14} \backslash G_{2,6}$ konstruiert, deren Leviform für alle $x \in \mathbb{P}^{14} \backslash G_{2,6}$ auf einem mindestens 5–dimensionalen Unterraum des Tangentialraumes $T_x\big(\mathbb{P}^{14}\big)$ positiv definit ist, d. h. es wird die 10–Vollständigkeit des Komplements $\mathbb{P}^{14} \backslash G_{2,6}$ gezeigt. Die Konstruktion erfolgt dabei unter Zuhilfenahme der schon oben erwähnten Stratifikation. In der Nähe von $G_{2,6}$ entspricht die Ausschöpfungsfunktion fast der von W. Barth betrachteten Funktion f, mit größerem Abstand sieht sie aber (erwartungsgemäß) deutlich anders aus. Aus den Resultaten der letzten beiden Kapitel folgt schließlich die Äquivalenz der beiden Vollständigkeitsbegriffe für das betrachtete Beispiel.

Literatur

[1] A. Andreotti / H. Grauert. *Théorémes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes*. Bull. Soc. math. France **90**, 193–259, 1962.

[2] W. Barth. *Der Abstand von einer algebraischen Mannigfaltigkeit im komplex-projektiven Raum*. Math. Ann. **187**, 150–162, 1970.

[3] W. Barth. *Transplanting cohomology classes in complex projective space*. Am. J. Math. **92**, 951–967, 1970.

[4] R. L. Bishop / R. J. Crittenden. *Geometry of Manifolds*. Pure and Applied Math. **15**, 1973.

[5] N. Bourbaki. *Eléments de mathématique, Algébre multilineaire*. Masson, 1958.

[6] M. A. Buchner / K. Fritzsche. *The cohomological and analytic completeness of* $P(\Lambda^2 C^n)\backslash G_{2,n}$. Math. Ann. **261**, 327–338, 1982.

[7] M. A. Buchner / K. Fritzsche / T. Sakai. *Geometry and cohomology of certain domains in the complex projective space*. Journal für die reine und angewandte Math. **323**, 1980.

[8] K. Fritzsche. *q-konvexe Restmengen in kompakten komplexen Mannigfaltigkeiten*. Math. Ann. **227**, 251–273, 1976.

[9] C. Godbillon. *Géometrie différentielle et mécanique analytique*. Hermann, Paris, 1969.

[10] R. E. Greene / H. Wu. *Embedding of open Riemannian Manifolds by harmonic functions*. Ann. Inst. Fourier, Grenoble **25**, 1, 215–235, 1975.

[11] P. Griffiths / J. Harris. *Principles of algebraic geometry*. Wiley-Interscience, Canada, 1978.

[12] R. Hermann. *Focal points of closed submanifolds of Riemannian spaces*. Indagationes Mathematicae **25**, 613–628, 1963.

[13] W. V. D. Hodge / P. Pedoe. *Methods of algebraic geometry II*. Cambridge Univ. Press, 1952.

[14] R. Hopf / W. Rinow. *Über den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche*. Comment. Math. Helv. **3**, 209–225, 1931.

[15] K. Jänich. *Diffenzierbare G-Mannigfaltigkeiten*. Lecture Notes in Math. **59**, 1968.

[16] M. Marcus. *Finite dimensional multilinear algebra, Part II*. Dekker, 1975.

[17] R. Narasimhan. *Analysis on real and complex Manifolds*. Masson, 1973.