

Mathematik B: Übungsblatt 2

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen:

$$a_n = \frac{3n^4 + n^{\frac{7}{2}}}{-3n^4 + 24n^3 - 72n^2 + 96n - 48}, \quad b_n = (-1)^n \frac{(n+1)^2 - n - n^2}{n^2 + 3},$$

$$c_n = \frac{n^{\frac{5}{2}} + n^{\frac{3}{2}}}{(n+2)^2}, \quad d_n = \frac{n^3(n^2 - 1)}{n(n-1)(n-2)(n+6)(n+1)}.$$

Lösung.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{3n^4 + n^{\frac{7}{2}}}{-3n^4 + 24n^3 - 72n^2 + 96n - 48} \\ &= \frac{n^4}{n^4} \frac{3 + n^{-\frac{1}{2}}}{-3 + \frac{24}{n} - \frac{72}{n^2} + \frac{96}{n^3} - \frac{48}{n^4}} \\ &= \frac{\overbrace{3 + n^{-\frac{1}{2}}}^{\rightarrow 0}}{\underbrace{-3}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{24}{n}}_{\rightarrow 0} - \underbrace{\frac{72}{n^2}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{96}{n^3}}_{\rightarrow 0} - \underbrace{\frac{48}{n^4}}_{\rightarrow 0}} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{3}{-3} = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= (-1)^n \frac{(n+1)^2 - n - n^2}{n^2 + 3} \\ &= (-1)^n \frac{n^2 + 2n + 1 - n - n^2}{n^2 + 3} \\ &= (-1)^n \frac{n+1}{n^2 + 3} \\ &= (-1)^n \frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{3}{n^2}} \\ &= (-1)^n \frac{\overbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}^{\rightarrow 0}}{\underbrace{1 + \frac{3}{n^2}}_{\rightarrow 1}} \end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
 |b_n| &= \left| (-1)^n \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{3}{n^2}} \right| \\
 &= \left| \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{3}{n^2}} \right| \\
 &= \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{3}{n^2}} \\
 &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0
 \end{aligned}$$

und somit $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{n^{\frac{5}{2}} + n^{\frac{3}{2}}}{(n+2)^2} \\
 &= \frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{n^{\frac{1}{2}} + n^{-\frac{1}{2}}}{\frac{(n+2)^2}{n^2}} \\
 &= \frac{n^{\frac{1}{2}} + n^{-\frac{1}{2}}}{\overbrace{\left(\frac{n+2}{n}\right)^2}^{\rightarrow 0}} \\
 &= \frac{\overbrace{n^{\frac{1}{2}}}^{\rightarrow \infty} + \overbrace{n^{-\frac{1}{2}}}^{\rightarrow 0}}{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^2} \\
 &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.
 \end{aligned}$$

Wir haben hier Satz 2.7.3.(b) aus dem Skript mit $a_n = n^{\frac{1}{2}} + n^{-\frac{1}{2}}$ und $b_n = \frac{1}{(1+\frac{2}{n})^2}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ benutzt.

$$\begin{aligned}
 d_n &= \frac{n^3(n^2-1)}{n(n-1)(n-2)(n+6)(n+1)} \\
 &= \frac{n^3(n^2-1)}{(n^2-1)n(n-2)(n+6)} \\
 &= \frac{n^3}{n(n-2)(n+6)} \\
 &= \frac{n^3}{n^3} \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{n}\right)\left(1 + \frac{6}{n}\right)} \\
 &= \frac{1}{\underbrace{\left(1 - \frac{2}{n}\right)}_{\rightarrow 1} \underbrace{\left(1 + \frac{6}{n}\right)}_{\rightarrow 1}} \\
 &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1
 \end{aligned}$$

Aufgabe 2. Zeigen Sie mit Definition 2.3.1, dass

$$a_n = \frac{n \cos(n^3)}{n^2 + 7}$$

gegen 0 konvergiert. Prüfen Sie hierzu die Definition zuerst für $\varepsilon = \frac{1}{10}$ und dann für beliebiges $\varepsilon > 0$ nach.

Lösung. Es gilt:

$$\begin{aligned} |a_n - 0| &= |a_n| \\ &= |\cos(n^3)| \frac{n}{n^2 + 7} \\ &\leq \frac{n}{n^2 + 7} \\ &\leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

da $|\cos(x)| \leq 1$ für $x \in \mathbb{R}$. Um zu zeigen, dass $|a_n| < \varepsilon$ ist, können wir stattdessen $\frac{1}{n} < \varepsilon$ betrachten.

Im ersten Schritt bestimmen wir ein n_0 ab dem $\frac{1}{n} < \frac{1}{10}$ gilt, also überprüfen wir die Definition für $\varepsilon = \frac{1}{10}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} &< \frac{1}{10} \\ \Leftrightarrow n &> 10, \end{aligned}$$

d.h. die Definition ist für $n_0 = 11$ erfüllt. Wir zeigen nun die Aussage für beliebiges $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} &< \varepsilon \\ \Leftrightarrow n &> \varepsilon \end{aligned}$$

Sei jetzt n_0 die kleinste natürliche Zahl, die größer als ε ist. Dann gilt

$$n \geq n_0 \Rightarrow n > \varepsilon \Rightarrow |a_n - 0| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$$

und damit ist die Definition erfüllt.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen:

$$a_n = \ln \left(\frac{3n^2 + 7}{2n(n-1)} \right) + e^{\cos(\frac{\pi}{n})}, \quad b_n = \frac{\sqrt{5n^2 - 3n + 4}}{6n - 1}$$

$$c_n = \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2n \cdot \cos(n^3)}{n^2 + 7} \right), \quad d_n = \frac{n-1}{2\pi n \sin \left(\frac{\pi n}{6n+1} \right) - n}.$$

Lösung.

$$a_n = \ln \left(\frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{3 + \frac{7}{n^2}}{2(1 - \frac{1}{n})} \right) + e^{\cos(\frac{\pi}{n})}$$

$$= \ln \left(\overbrace{\frac{3 + \frac{7}{n^2}}{2(1 - \frac{1}{n})}}^{\rightarrow \frac{3}{2}} \right) + \underbrace{e^{\cos(\frac{\pi}{n})}}_{e^0=1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{3}{2} \right) + 1$$

$$b_n = \frac{\sqrt{n^2(5 - \frac{3}{n} + \frac{4}{n^2})}}{6n - 1}$$

$$= \frac{n}{n} \cdot \frac{\sqrt{5 - \frac{3}{n} + \frac{4}{n^2}}}{6 - \frac{1}{n}}$$

$$= \frac{\sqrt{5 - \frac{3}{n} + \frac{4}{n^2}}}{6 - \frac{1}{n}}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5}}{6}$$

$$c_n = \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2n \cos(n^3)}{n^2 + 7} \right)$$

$$= \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2 \frac{\overbrace{n \cos(n^3)}^{\rightarrow 0}}{n^2 + 7} \right)$$

$$\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(*)} \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) = 1$$

Um (*) zu zeigen, benutzen wir die in Aufgabe 2 gezeigte Aussage, dass $\frac{n \cos(n^3)}{n^2 + 7}$ eine

Nullfolge ist.

$$\begin{aligned}d_n &= \frac{n}{n} \cdot \frac{1 - \frac{1}{n}}{2\pi \sin\left(\frac{\pi n}{6(n+1)}\right) - 1} \\&= \frac{1 - \frac{1}{n}}{\underbrace{2\pi \sin\left(\frac{\pi n}{6(n+1)}\right)}_{\rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}} - 1} \\&\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi - 1}\end{aligned}$$

Aufgabe 4. Geben Sie die Häufungswerte der Folge (a_n) an sowie für jeden Häufungswert eine Teilfolge, die gegen den Häufungswert konvergiert:

$$a_n = \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \frac{n^2}{\sqrt{n^4 + 7n^2 + 3}}.$$

Lösung. Zuerst betrachten wir $\sin(\frac{\pi n}{2})$ und $\frac{n^2}{\sqrt{n^4 + 7n^2 + 3}}$ getrennt:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{n^2}{\sqrt{n^4 + 7n^2 + 3}} = \frac{n^2}{n^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{7}{n^2} + \frac{3}{n^4}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{7}{n^2} + \frac{3}{n^4}}} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \end{aligned}$$

Betrachte nun $\sin(\frac{\pi n}{2})$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \sin(0) &= 0, \text{ für } n = 0, \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 1, \text{ für } n = 1, \\ \sin(\pi) &= 0, \text{ für } n = 2, \\ \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) &= -1, \text{ für } n = 3, \\ \sin(2\pi) &= 0, \text{ für } n = 4, \\ \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) &= 1, \text{ für } n = 5, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man

$$\sin\left(\frac{\pi \cdot n}{2}\right) = \begin{cases} -1, & \text{für } n = 4k + 3 = 3, 7, 11, 15, \dots \\ 0, & \text{für } n = 2k = 0, 2, 4, 6, \dots \\ 1, & \text{für } n = 4k + 1 = 1, 5, 9, 13, \dots \end{cases}$$

a_n hat somit drei Häufungswerte 0, 1 und -1 , denn:

Wir haben gezeigt, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1$ gilt. Somit konvergiert auch jede Teilfolge gegen 1, also insbesondere die Teilfolgen c_{2k} , c_{4k+1} und c_{4k+3} , wobei

$$\begin{aligned} c_{2k} &= \frac{(2k)^2}{\sqrt{(2k)^4 + 7(2k)^2 + 3}} \\ c_{4k+1} &= \frac{(4k+1)^2}{\sqrt{(4k+1)^4 + 7(4k+1)^2 + 3}} \\ c_{4k+3} &= \frac{(4k+3)^2}{\sqrt{(4k+3)^4 + 7(4k+3)^2 + 3}} \end{aligned}$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned}a_{4k+3} &= \sin\left(\frac{\pi(4k+3)}{2}\right) c_{4k+3} \\&= (-1) c_{4k+3} \\&\xrightarrow{k \rightarrow \infty} -1 \cdot 1 = -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_{2k} &= \sin(\pi \cdot k) c_{2k} \\&= 0 \cdot c_{2k} \\&= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_{4k+1} &= \sin\left(\frac{\pi(4k+1)}{2}\right) c_{4k+1} \\&= 1 \cdot c_{4k+1} \\&\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \cdot 1 = 1\end{aligned}$$

Zusatzbemerkung: Da die drei Teilfolgen alle Elemente der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ enthalten, kann es keinen weiteren Häufungswert geben. Somit sind $0, 1$ und -1 die einzigen Häufungswerte.