

Zusammenfassung Vorlesung 4

• Eigenschaften konvergenter Folgen:

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a) = 0$

ii) $a_n \rightarrow 0 \Leftrightarrow |a_n| \rightarrow 0$

iii) (a_n) konvergent $\Rightarrow (a_n)$ beschränkt, d.h. $|a_n| \leq M$ für alle n
(M konstant)

• Grenzwertsätze:

Sind (a_n) und (b_n) konvergent, so gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm b_n = a \pm b, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot a_n = c \cdot a$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \quad (\text{falls } b \neq 0)$$

• Häufungswert: $a \in \mathbb{R}$ ist Häufungswert von Folge (a_n) wenn Teilfolge (a_{n_k}) gegen a konvergiert

• $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$: (a_n) divergiert bestimmt nach ∞ (oder: konvergiert uneigentlich nach ∞)

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$: (a_n) divergiert bestimmt nach $-\infty$

Regeln: i) $|a_n| \rightarrow \infty \Leftrightarrow \frac{1}{a_n} \rightarrow 0$

$$a_n \rightarrow 0 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{a_n} \right| \rightarrow \infty$$

ii) $a_n \rightarrow \infty, b_n \rightarrow b \in \mathbb{R} \Rightarrow a_n + b_n \rightarrow \infty$,

$$a_n b_n \rightarrow \begin{cases} \infty, & \text{wenn } b > 0 \\ -\infty, & \text{" } b < 0 \end{cases}$$

iii) $a_n \rightarrow \infty, b_n \rightarrow \infty \Rightarrow a_n + b_n \rightarrow \infty, a_n b_n \rightarrow \infty$

Beachte: 1) „ (a_n) konvergiert“ heißt $a_n \rightarrow a$ mit $a \in \mathbb{R}$
d.h. $a \neq \pm \infty$. Wenn $a_n \rightarrow \pm \infty$, dann (a_n) divergent.

2) $\infty - \infty, \infty \cdot 0$ sind nicht definiert; Ergebnis abhängig von den konkreten Folgen. Auch bei $\frac{0}{0}$ und $\frac{\infty}{\infty}$.