Prof. Dr. Diepenbrock, FB C

Klausur Mathematik B 24.2.2005 für Studierende des Bauingenieurwesens

1. Schreiben Sie auf das erste Blatt in GROẞEN DRUCKBUCHSTABEN ihren Nachnamen, dann ein Komma, dann ihren Vornamen, dann ein Komma und dann Ihre Matrikelnummer, zum Beispiel:
SCHULTE , JULIA , 238574
Bei den anderen Blättern genügt es, wenn Ihr Name oben darauf steht.
2. Rahmen Sie die Aufgabennummern mit einem Kästchen von mindestens 3 Zentimetern Länge und Breite ein, also etwa so, aber noch größer $\boxed{\mathbf{1}}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\boxed{\mathbf{3a}}$ $\boxed{\mathbf{3b}}$ usw. Also bei mehrteiligen Aufgaben mit Teil a, b, c etc. jeden Teil einrahmen!
3. Schreiben Sie Ihre Lösungen ausführlich hin, lassen Sie im allgemeinen keine Zwischenschritte weg! Das schützt vor Fehlern. Außerdem erwecken zu knappe Lösungen den Verdacht, dass Sie einfach nur vom Nachbarn Endergebnisse abgeschrieben haben.
4. Besitzer von leistungsfähigen Taschenrechnern müssen alle Zwischenschritte, die man bei Benutzung von einfachen Taschenrechnern machen müsste, hinschreiben. Auch bei linearen Gleichungssystemen darf nicht einfach die fertige Taschenrechner-Lösung hingeschrieben werden, sondern es müssen in nachvollziehbarer Weise die Zwischenschritte hingeschrieben werden.

**Voraussichtlich gibt es für Aufgabe 1 bis 4 jeweils etwa 15 Punkte.
Die Aufgabe 5 enthält nur Fragen zum Ausfüllen und Ankreuzen. Für jede richtig beantwortete Frage gibt es voraussichtlich 2 Punkte, es wird die Punktezahl abgezogen, die man bei den Ja-Nein-Fragen im Mittel durch bloßes Raten bekommen könnte, d.h. es wird voraussichtlich bei jeder Ja-Nein-Frage, die Sie beantworten, ein Punkt abgezogen. Wenn aber die Gesamtsumme negativ ist, wird - zu Ihren Gunsten - als Punktezahl null statt der negativen Zahl angerechnet.**

Aufgabe 1

a) Welche Eigenwerte und Eigenräume (bzw. Eigenvektoren) hat die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Kann man A diagonalisieren? Wenn ja, so geben Sie eine Matrix T und eine Diagonalmatrix D an mit $T^{-1}AT = D$

Hinweis: Natürlich brauchen Sie gegebenenfalls nicht T^{-1} zu berechnen, natürlich brauchen Sie nicht das Produkt $T^{-1}AT$ auszurechnen, Sie wissen ja gegebenenfalls, dass es gleich D ist. Es wird nicht gefordert, dass gegebenenfalls die Matrix T eine Orthogonalmatrix sein soll. Noch ein Hinweis: Wenn Sie Eigenwerte erhalten, die nicht ganzzahlig sind, dann müssen Sie sich verrechnet haben.

Aufgabe 2

Betrachten Sie das Vektorfeld $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} \cos x \cdot y^2 \\ 2\sin x \cdot y \end{pmatrix}$. Prüfen Sie mit einem geeigneten Kriterium nach, dass dieses Vektorfeld ein Gradientenfeld (=Potentialfeld) ist!

Berechnen Sie die Stammfunktion $f(x,y)$, indem Sie als Kurve die direkte Verbindung zwischen $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ nehmen und entlang dieser Kurve das Kurvenintegral über $\vec{v}$ berechnen!

Wichtiger Hinweis: Sie dürfen folgende zwei Formeln benutzen, wobei a eine reelle Zahl ungleich null ist:
$\int t \cdot \sin(a \cdot t)dt = -\frac{1}{a} \cdot t \cdot \cos(a \cdot t) + \frac{1}{a^2} \cdot \sin(a \cdot t)$ + Integrationskonstante
und
$\int t^2 \cdot \cos(a \cdot t)dt = \frac{1}{a} \cdot t^2 \cdot \sin(a \cdot t) + \frac{2}{a^2} \cdot t \cdot \cos(a \cdot t) - \frac{2}{a^3} \cdot \sin(a \cdot t)$ + Integrationskonstante

Aufgabe 3

a) Wie lautet die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung
$y^{(4)} - 2y^{(3)} + 2y'' - 2y' + y = 0$

b) Jetzt geht es um die entsprechende inhomogene Differentialgleichung mit dem Störglied $x \cdot e^x$ (auf der rechten Seite steht also nicht null, sondern $x \cdot e^x$). Sie sollen aber NICHT diese Differentialgleichung lösen, sondern NUR den Ansatz für eine partikuläre Lösung hinschreiben, und zwar den sogenannten Faustregelansatz. Die Regel für diesen Ansatz (Skript Seite 92) befindet sich in der Anlage oder auf diesem Blatt.

Aufgabe 4

Es sei $f(x) = x \cdot (2\pi - x)$ für alle $x \in [0, 2\pi]$

a) Zeichnen Sie diese Funktion und ihre periodische Fortsetzung auf $\mathbf{R}$! Hinweis: An der Form $f(x) = x \cdot (2\pi - x)$ sieht man, wo die Nullstellen der Funktion liegen, an der Form $f(x) = x \cdot (2\pi - x) = -x^2 + 2\pi x$ erkennt man die Form des Graphen der Funktion.

b) Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe
$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$
dieser Funktion, wobei hier natürlich $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$ ist!

Hinweis: Für die Koeffizienten $b_n, n = 1, 2, 3, \ldots$ brauchen Sie nichts zu rechnen, sie sind nämlich alle gleich null. Warum?

Wichtiger Hinweis: Sie dürfen folgende zwei Formeln benutzen, wobei a eine reelle Zahl ungleich null ist:
$\int t \cdot \cos(a \cdot t)dt = \frac{1}{a} \cdot t \cdot \sin(a \cdot t) + \frac{1}{a^2} \cdot \cos(a \cdot t)$ + Integrationskonstante
und die schon aus einer vorangegangenen Aufgabe bekannte Formel
$\int t^2 \cdot \cos(a \cdot t)dt = \frac{1}{a} \cdot t^2 \cdot \sin(a \cdot t) + \frac{2}{a^2} \cdot t \cdot \cos(a \cdot t) - \frac{2}{a^3} \cdot \sin(a \cdot t)$ + Integrationskonstante

Achtung! Auf der nächsten Seite ist noch eine Aufgabe zum Ankreuzen und Ausfüllen!

Nachname: ....

Aufgabe 5

Eine Aufgabe nur zum Ankreuzen und Ausfüllen! Sie sollen hier keine Begründungen geben! Sie sollen auf DIESEM Blatt ankreuzen und ausfüllen, NICHT auf einem eigenen Blatt! Beachten Sie, dass bei Ja-Nein-Fragen manchmal links ja und rechts nein steht und manchmal umgekehrt!

1. Nehmen Sie folgendes an: Die 7-mal-7-Matrix A hat den Eigenwert 1 als vierfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms, ferner hat sie die Eigenwerte $\frac{1}{2}, 5$ und 7. Der Eigenraum zum Eigenwert 1 hat die Dimension 2. Ist die Matrix diagonalisierbar? jaaa **O** nein **O**
2. Kann man die Differentialgleichung
   $y' = \frac{e^x}{y}$
   mit der Methode *Trennung der Variablen* lösen? nein **O** jaaa **O**
3. Welche Dimension hat der Eigenraum zum Eigenwert 3, wenn die 4-mal-4-Matrix die Eigenwerte $2, 3, 8$ und 10 hat? $\boxed{\ \mathrm{I}\ \ \ \ \ }$
4. Wenn man für $|x| < 1$ die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ gliedweise differenziert , erhält man dadurch die Potenzreihe zur ersten Ableitung der Funktion $f(x) = \frac{1}{1-x}$ nein **O** jaaa **O**
5. Ist die Umformung richtig, wenn man $f(x, y) = x^2 + 6x + y^2 + 10y + 9$ zu $f(x, y) = (x + 3)^2 + (y + 5)^2$ umformt? jaaa **O** nein **O**
6. Kann man die Differentialgleichung $y'' = \frac{1}{y'}$ leicht mit einer Substitution auf eine trennbare Differentialgleichung erster Ordnung zurückführen? nein **O** jaaa **O**
7. Sind zwei Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten immer linear unabhängig voneinander, oder gilt dies nur, wenn die Matrix symmetrisch ist? jaaa **O** nein **O**
8. Ist dies eine lineare Differentialgleichung? $y' + x^2 \cdot y - x^y = 0$ jaaa **O** nein **O**
9. Ist $y = \frac{1}{x}$ eine (spezielle) Lösung der Differentialgleichung $y' = -y^2$ jaaa **O** nein **O**
10. Ist $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zu einem geeigneten Eigenwert der Matrix $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$? (Tipp: Rechnen Sie nicht die Eigenwerte der Matrix aus, sondern ...!) nein **O** jaaa **O**
11. Konvergiert die Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 \cdot k!} x^k$ für alle $x \in \mathbf{R}$? jaaa **O** nein **O**
12. Geben Sie zur Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ einen Vektor $\vec{x}$ an mit $x^T A x < 0$! $\vec{x} = \begin{pmatrix} \ \\ \ \end{pmatrix}$
13. Wenn für eine Funktion $v(x, y)$ eine Beziehung der Form $v(x, y) = g(x^2 + y^2)$ gilt, was kann man dann über die Höhenlinien des Graphen von v sagen? ....
14. Gilt für Diagonalmatrizen A und B immer $e^A \cdot e^B = e^{A+B}$? jaaa **O** nein **O**
15. Gibt es außer den Funktionen $u(x, y) = C \cdot e^x$, $C \in \mathbf{R}$ noch andere Lösungen der (sehr einfachen) partiellen Differentialgleichung $u_x = u$? nein **O** jaaa **O**
16. Ist folgendes eine exakte Differentialgleichung?
    $x \cdot \sin y + \frac{x^2}{2} \cdot \cos y \cdot y' = 0$
    nein **O** jaaa **O**