

Ergänzung am 6.5.2014: Seit etwa dem 13. Januar 2014 ist auf den Internetseiten der Kultusministerkonferenz nicht mehr die Version der Bildungsstandards, auf die ich hier Bezug nehme, denn auf Grund meiner Hinweise ist die Lösung zur Aufgabe Flugbuchung 2 korrigiert worden. Dass eine Korrektur durchgeführt wurde, ist natürlich erfreulich. Aber die Tatsache, dass das Dokument geändert wurde, lässt sich nicht durch irgendwelche Hinweise in der Einleitung oder sonstige Hinweise erkennen, auch nicht durch einen Hinweis auf den Html-Seiten der Kultusministerkonferenz bzw. des IQB, die den Link zu dem Dokument enthalten. Natürlich kann man die Tatsache, dass das Dokument geändert wurde, dadurch erkennen, dass man sich (beispielsweise mit dem Acrobat Reader, Menüpunkt Datei -> Eigenschaften) die Eigenschaften der pdf-Datei ansieht und das Erstellungsdatum 13.1.2014 sieht.

Wer vor etwa dem 13. Januar 2014 die Datei heruntergeladen hat, erhält also selbst dann, wenn er auf die Internetseiten der Kultusministerkonferenz bzw. des IQB schaut, keinerlei Hinweise darauf, dass es sich lohnen würde, dieselbe (inzwischen ja korrigierte) Datei noch einmal herunterzuladen.

Übrigens findet man im Internet an einigen Stellen auch noch die alte Version der Datei, das sieht man schnell, wenn man bei Google als Suchkriterium die wörtliche Zeichenfolge (also mit Apostrophen) „Trefferwahrscheinlichkeit ist in Wirklichkeit aber nicht“ verwendet.

Am 19. Oktober hat die Kultusministerkonferenz die Bildungsstandards Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife veröffentlicht. Sie sind zu finden unter

http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf

In diesem Dokument sind einige „illustrierende Aufgaben“ enthalten, darunter zwei Aufgaben zur Stochastik. Bei einer dieser Aufgaben ist es sehr naheliegend, einige Bemerkungen dazu zu verfassen. Also:

Bemerkungen zur Stochastik-Aufgabe „Flugbuchung 2“ auf Seite 56 ff. der Bildungsstandards Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife

Bei dieser Aufgabe sind die **Lösungsskizzen zum Aufgabenteil a) und zum Aufgabenteil c) fehlerhaft und m.E. nicht akzeptabel**. Bei der Lösungsskizze zu Teil a) ist der Fehler für jeden Stochastik-Kundigen offensichtlich, aber dennoch sollte m.E. dieser Fehler korrigiert werden. Bei der Lösungsskizze zu Teil c) besteht die Gefahr, dass

manche Leser (beispielsweise Lehrer mit etwas weniger fundierten Stochastikkenntnissen) zu irrtümlichen Ansichten geführt oder darin bestätigt werden. Schon aus diesem Grunde sollte m.E. dieser Fehler korrigiert werden. Es ist ja zu beachten, dass es wegen der Veröffentlichung im Internet auf den Seiten der KMK einen sehr großen potentiellen Leserkreis gibt.

Es geht also um die Aufgabe "Flugbuchung 2" in Kapitel 4.5

zu Teil a)

Die Aufgabenstellung besteht darin, dass man die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(\text{Geschäftsreisender}|\text{Stornierung})$ berechnen soll. **Die Lösungsskizze zu Teil a) passt nicht zu dieser Aufgabenstellung.** Denn es wird $P(\text{Geschäftsreisender})$ berechnet. Zugegebenermaßen ist die Lösungsskizze in sich konsistent, am Schluss steht ja auch "Die Wahrscheinlichkeit, dass ein gebuchter Passagier ein Geschäftsreisender ist, beträgt 15 %." Aber im Aufgabentext ist nicht nach $P(\text{Geschäftsreisender})$, sondern nach $P(\text{Geschäftsreisender}|\text{Stornierung})$ gefragt.

Von den Schülern wird auch verlangt, dass sie die Fragen beantworten, die im Aufgabentext gestellt sind, und nicht andere Fragen.

Folglich müsste man die Lösungsskizze folgendermaßen ergänzen:

$$\begin{aligned} P(\text{Geschäftsreisender}|\text{Stornierung}) &= \\ P(\text{Geschäftsreisender und Stornierung}) / P(\text{Stornierung}) &= \\ P(\text{Stornierung}|\text{Geschäftsreisender}) \cdot P(\text{Geschäftsreisender}) / P(\text{Stornierung}) &= \\ 0.25 \cdot 0.15 / 0.08 &= \\ 0.46875 \end{aligned}$$

zu Teil c)

Meine Kritik bezieht sich nur auf den Text vor dem "ODER", also nur auf die erste Lösungsalternative.

Erstens ist die Lösungsskizze **in folgendem entscheidenden Punkt fehlerhaft:**

Es ist einfach nicht wahr, dass die Trefferanzahl bei n Versuchswiederholungen immer dann binomialverteilt mit den Parametern n und p ist, wenn die Trefferwahrscheinlichkeit bei jeder Versuchswiederholung gleich p ist.

Das sieht man ja leicht an einem Beispiel: Wenn man drei Teilversuche betrachtet ($n=3$), der erste Teilversuch die Trefferwahrscheinlichkeit p hat, der zweite davon unabhängig ist und auch die Trefferwahrscheinlichkeit p hat und der dritte Teilversuch einfach immer dasselbe Ergebnis wie der zweite Teilversuch liefert, dann haben alle Teilversuche dieselbe Trefferwahrscheinlichkeit p (es ist ja von der Wahrscheinlichkeit schlechthin die

Rede, nicht von einer bedingten Wahrscheinlichkeit), aber die Trefferanzahl nimmt die Werte 0, 1, 2, 3 mit den Wahrscheinlichkeiten $(1-p)^2$, $p(1-p)$, $p(1-p)$, p^2 an, ist also keineswegs binomialverteilt. Man sollte als naheliegende hinreichende Bedingung für Binomialverteilung sinnvollerweise die Kombination aus gleicher Trefferwahrscheinlichkeit bei jedem Teilversuch und Unabhängigkeit der Teilversuche angeben. (Der Korrektheit halber sei bemerkt, dass diese hinreichende Bedingung keine notwendige Bedingung ist, auch wenn das wohl vielfach geglaubt wird.)

Das Problem bei denjenigen, die die Gleichheit der Trefferwahrscheinlichkeiten bei den verschiedenen Teilversuchen für hinreichend halten, liegt darin, dass sie nicht zwischen der bedingten Wahrscheinlichkeit und der Wahrscheinlichkeit schlechthin unterscheiden.

Wenn die bedingte Wahrscheinlichkeit für einen Treffer beim $(i+1)$ -ten Teilversuch **unter der Bedingung der Ergebnisse (jeweils Treffer bzw. Niete) bei den i vorangegangenen Teilversuchen** jeweils gleich demselben p ist, **dann** sind die n Teilversuche voneinander unabhängig, und die Trefferwahrscheinlichkeit schlechthin beim i -ten Teilversuch ist p , und dann darf man folgern, dass die Trefferanzahl bei den n Teilversuchen binomialverteilt ist mit den Parametern n und p . Aber hier kommt es eben auf "unter der Bedingung ..." an. Es sei zum Verständnis erinnert an folgendes: Wenn $P(B)$ ungleich null ist, dann ist $P(A|B) = P(A)$ äquivalent zur Unabhängigkeit von A und B .

Zweitens ist die Lösungsskizze **in folgendem Punkt problematisch:**

Der Text in der Lösungsskizze erweckt irgendwie den Eindruck, als ob unterschiedliche Stornierwahrscheinlichkeiten für unterschiedliche Personengruppen (also Geschäftsleute/Privatleute etc.) gegen eine Binomialverteilungsannahme für die Trefferanzahl sprechen. Das ist aber **nicht der Fall**. Man muss sich folgendes Modell vorstellen: Aus einer großen, fiktiven Grundgesamtheit von potentiellen Fluggästen werden (streng genommen mit Zurücklegen) völlig zufällig der Reihe nach 176 Personen ausgelost. Es hängt vom Zufall ab, ob die ausgeloste Person ein Stornierer ist oder nicht, ob sie Geschäftsreisender ist oder nicht, **auf jeden Fall ist die Wahrscheinlichkeit schlechthin (die nicht bedingte Wahrscheinlichkeit) für Stornierung gleich 8 Prozent. Natürlich kann es für verschiedene Personengruppen unterschiedliche bedingte Stornierungswahrscheinlichkeiten geben.**

Wenn man freilich von einem Modell ausgehen würde (was aber gar nicht angemessen ist), bei dem die Anteile der Geschäftsreisenden bzw. Privatreisenden fest und nicht zufallsabhängig sind, dann hätte man als Trefferanzahl die Summe aus zwei Trefferanzahlen, die beide (unter den üblichen hinreichenden Annahmen) binomialverteilt, aber eben mit unterschiedlichem p binomialverteilt sind, und eine solche Summe ist, wie man ja schon für den Fall von zwei Bernoulliverteilungen sieht, im allgemeinen nicht binomialverteilt. Solch ein Wissen kann und soll natürlich nicht von den Schülern verlangt werden, und entsprechende Erörterungen hätten also in einer Lösungsskizze nichts zu suchen. Ich will mit meinen Bemerkungen ja nur begründen, warum unter bestimmten Modellannahmen (!) unterschiedliche Stornierungswahrscheinlichkeiten bei verschiedenen Personengruppen zu einer Nicht-Binomialverteilung der Trefferanzahl

führen können.

Der Text hinter "ODER" in der Lösungsskizze ist in Ordnung (auch wenn ich eher so formulieren würde: Wenn die Personen in Gruppen reisen, ist das Stornierungsverhalten der verschiedenen gebuchten Passagiere nicht voneinander unabhängig).

Meine Kritik bedeutet **nicht**, dass gegebenenfalls eine solche Lösung keine oder nur wenig Punkte verdienen würde, denn man müsste es ja in Relation dazu setzen, was man von den Schülern erwarten kann. **Aber** es ist doch **nicht** in einem solchen Dokument wie den von der KMK festgelegten Bildungsstandards für das Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife **akzeptabel**, wenn gewissermaßen als eine Musterlösung eine solche **"Lösung"** gebracht wird.

Weil die Bildungsstandards ja für einen sehr großen potentiellen Leserkreis gedacht sind, bin ich der Meinung, dass eine korrigierte Version veröffentlicht werden sollte (natürlich, um Verwirrung zu vermeiden, mit dem Hinweis, dass es eine korrigierte Version ist).