Lie-Algebren — **WiSe 2015/16**
8. Übungsblatt — **Dr. Thorsten Weist**
Abgabe bis Montag, 4.1.2016 — **Dr. Magdalena Boos**
(in Vorlesung oder Übung)

Für das gesamte Übungsblatt sei der Körper $K := \mathbf{C}$ der komplexen Zahlen fixiert.

Aufgabe 1. (6 Punkte + 2 Zusatzpunkte) Es seien $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ halbeinfach und $x \in \mathfrak{g}$ mit Jordan-Chevalley-Zerlegung $x = x_s + x_n$. Ziel der Aufgabe ist es, zu zeigen, dass dann $x_s, x_n \in \mathfrak{g}$ gilt.

Betrachten Sie V als $\mathfrak{g}$-Modul via $x.v := x(v)$ für $x \in \mathfrak{g}$ und $v \in V$. Der $\mathfrak{g}$-Modul $\mathfrak{gl}(V)$ wird durch die adjungierte Darstellung induziert. Zeigen Sie:

a) Es sei $\mathfrak{g}'$ die Menge der $y \in \mathfrak{gl}(V)$, die durch die Eigenschaften

1. $[y, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{g}$
2. $y(W) \subseteq W$ für alle Untermoduln $W \subseteq V$
3. $\mathrm{Spur}(y\mid_W) = 0$ für alle Untermoduln $W \subseteq V$

definiert wird. Dann gilt $y_s, y_n \in \mathfrak{g}'$, falls $y = y_s + y_n$ die Jordan-Chevalley-Zerlegung von $y \in \mathfrak{g}'$ ist.

b) Es ist $\mathfrak{g}' \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ eine Unterdarstellung von $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$.

c) Es ist $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{g}'$ eine $\mathfrak{g}$-Unterdarstellung von ad. Insbesondere ist $\mathfrak{g}$ ein direkter Summand von $\mathfrak{g}'$ als $\mathfrak{g}$-Modul.

d) Es gilt $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}'$.

Aufgabe 2. (6 Punkte) Es sei $\mathfrak{g} := \langle f, g, z \rangle$ die sogenannte Heisenberg-Algebra, das heißt $[f, g] = z$ und $z \in Z(\mathfrak{g})$. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{g}$ keine treue endlich-dimensionale irreduzible Darstellung hat.

Aufgabe 3. (6 Punkte) Zeigen Sie:

a) $\mathfrak{sl}_2(K)$ wird durch die Einbettung, die durch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist, zu einer Unteralgebra von $\mathfrak{sl}_3(K)$

b) Mittels der adjungierten Darstellung wird $\mathfrak{sl}_3(K)$ dadurch zu einer $\mathfrak{sl}_2(K)$-Darstellung V.

c) $V \cong V(0) \oplus V(1) \oplus V(1) \oplus V(2)$.

Aufgabe 4. (6 Punkte) Es sei $K[s,t]$ der Raum aller Polynome in zwei Variablen s und t mit Koeffizienten in K.

Es seien $x := e_{1,2}$, $y := e_{2,1}$ und $h := e_{1,1} - e_{2,2}$ die bekannten Basiselemente von $\mathfrak{sl}_2(K)$. Für x und y definieren wir $x.P := s\dfrac{\partial P}{\partial t}$ sowie $y.P := t\dfrac{\partial P}{\partial s}$.

a) Berechnen Sie die Wirkung von h auf $K[s,t]$ (sie ergibt sich aus den definierten Wirkungen von x und y).

b) Zeigen Sie, dass $K[s,t]$ dadurch zu einer unendlich-dimensionalen $\mathfrak{sl}_2(K)$-Darstellung wird.

***Aufgabe 5. (6 Zusatzpunkte)** $K[s,t]$ sei definiert wie in Aufgabe 4. Ein Polynom P heißt homogen im Grad m, wenn für alle Monome $s^i t^j$ in P bereits $i+j = m$ gilt. Es sei $K[s,t]_m \subset K[s,t]$ der Unterraum der homogenen Polynome vom Grad m.

Zeigen Sie:

a) Jedes $K[s,t]_m$ ist eine $\mathfrak{sl}_2(K)$-Unterdarstellung von $K[s,t]$.

b) $K[s,t]_m$ ist als solche isomorph zur irreduziblen Darstellung $V(m)$.