Lie-Algebren **WiSe 2015/16**
3. Übungsblatt **Dr. Thorsten Weist**
Abgabe bis Montag, 16.11.2015 **Dr. Magdalena Boos**
(in Vorlesung oder Übung)

Aufgabe 1. (6 Punkte) Es seien V ein endlich-dimensionaler $\mathbf{C}$-Vektorraum und $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}'$ Lie-Unteralgebren von $\mathfrak{gl}(V)$. Weiterhin sei $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ ein surjektiver Lie-Algebren-Homomorphismus. Welche der folgenden Aussagen stimmen, welche sind falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) $\varphi(Z(\mathfrak{g})) = Z(\mathfrak{g}')$

b) Ist $g \in \mathfrak{g}$ diagonalisierbar, dann auch $\mathrm{ad}_{\varphi(g)}$.

Was ändert sich, wenn φ ein Isomorphismus ist?

Aufgabe 2. (6 Punkte) Zeigen Sie, dass eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ genau dann auflösbar ist, wenn ...

a) ... es eine Kette von Unteralgebren $0 = \mathfrak{g}_k \subset ... \subset \mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$ gibt, so dass $\mathfrak{g}_{\mathrm{i+1}} \subseteq \mathfrak{g}_i$ immer ein Ideal ist und jeder Quotient $\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1}$ abelsch ist.

b) ... $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ auflösbar ist.

Aufgabe 3. (6 Punkte) Es sei $\mathfrak{g}$ die 2-dimensionale nicht-abelsche Lie-Algebra mit Basis x, y und Lie-Klammer $[x, y] = x$ (vgl. Übungsblatt 1, Aufgabe 2).

a) Zeigen Sie, dass eine $\mathfrak{g}$-Darstellung ϕ auf $\mathbb{C}^2$ durch

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \phi(y) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

definiert wird.

b) Zwei $\mathfrak{g}$-Darstellungen $\varphi_V : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ und $\varphi_W : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(W)$ auf zwei endlich-dimensionalen K-Vektorräumen heißen isomorph, wenn es einen Isomorphismus $\theta : V \to W$ gibt, so dass $\theta \circ \varphi_V(g) = \varphi_W(g) \circ \theta$ für alle $g \in \mathfrak{g}$ gilt.

Zeigen Sie, dass die Darstellung aus Teilaufgabe a) isomorph zur adjungierten Darstellung von $\mathfrak{g}$ (auf sich selbst) ist.