

Lie-Algebren
11. Übungsblatt
Abgabe bis Mittwoch, 25.1.2016
(in Vorlesung oder Übung)

WiSe 2015/16
Dr. Thorsten Weist
Dr. Magdalena Boos

Für die Aufgaben 1 und 2 sei eine halbeinfache Lie-Algebra \mathfrak{g} über einem Körper K mit Cartan-Unteralgebra \mathfrak{h} fixiert.

Eine Basis von \mathfrak{h}^* sei durch $\Pi := \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\} \subseteq \Phi$ gegeben.

Aufgabe 1. (6 Punkte) Zeigen Sie, dass für $\alpha = \sum_{i=1}^l \lambda_i \alpha_i \in \Phi$ bereits $\lambda_i \in \mathbf{Q}$ gilt.

Aufgabe 2. (6 Punkte) Es sei $\eta : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}^*$ durch $\eta(h)(x) := \kappa_{\mathfrak{g}}(h, x)$ definiert.

Definieren wir außerdem $t_\alpha := \eta^{-1}(\alpha)$, dann gilt $\kappa_{\mathfrak{g}}(t_\alpha, h) = \alpha(h)$ für alle $h \in \mathfrak{h}$ und wir erhalten eine Abbildung

$$(-, -) : \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h}^* \rightarrow K; \quad (\alpha, \beta) \mapsto (\alpha, \beta) := \kappa_{\mathfrak{g}}(t_\alpha, t_\beta).$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- Für alle $\alpha, \beta \in \Phi$ gilt $(\alpha, \beta) \in \mathbf{Q}$.
- Für $E_{\mathbf{Q}} := \langle \Phi \rangle_{\mathbf{Q}} \subseteq \mathfrak{h}^*$ ist die induzierte Form

$$(-, -) : E_{\mathbf{Q}} \times E_{\mathbf{Q}} \rightarrow \mathbf{Q}$$

positiv definit, das heißt $(\varphi, \varphi) > 0$ für alle $\varphi = \sum_{i=1}^l \lambda_i \alpha_i \in E_{\mathbf{Q}}$.

Aufgabe 3. (6 Punkte) Es sei Φ ein Wurzelsystem und es seien $\alpha, \beta \in \Phi$ zwei Wurzeln, die einen Winkel von 30 Grad einschließen.

Zeigen Sie, dass α und β ein Wurzelsystem vom Typ G_2 (\otimes) aufspannen (das heißt der Schnitt von Φ mit dem Spann von α und β ergibt dieses Wurzelsystem).

Aufgabe 4. (6 Punkte) Berechnen Sie die Längen aller Wurzelfäden im Wurzelsystem G_2 (\otimes) .

(\otimes) Ein Bild des Wurzelsystems G_2 findet sich in J. Humphreys, "Introduction to Lie Algebras and Representation Theory", Seite 44.