Lie-Algebren **WiSe 2015/16**
6. Selbsttest **Dr. Thorsten Weist**
Keine Abgabe **Dr. Magdalena Boos**

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen je wahr oder falsch sind und kreuzen Sie Ihre Wahl an (wahr / falsch).

Es seien K ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0, V und W endlich-dimensionale K-Vektorräume, $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}'$ Lie-Algebren über K.

1. Lie-Algebren

◯◯ a) Halbeinfache Lie-Algebren haben keine nicht-trivialen echten Ideale.

◯◯ b) Unteralgebren sind Ideale.

◯◯ c) Einfache Lie-Algebren sind linear.

◯◯ d) Jede Lie-Algebra ist eine Unteralgebren, eine Darstellung und ein Modul.

◯◯ e) Der Dualraum $\mathfrak{g}^*$ ist ebenfalls eine Lie-Algebra.

◯◯ f) Die Menge der halbeinfachen Elemente einer linearen Lie-Algebra ist ein Ideal.

◯◯ g) Jede lineare Lie-Algebra bettet sich über einen Lie-Algebren-Mono in eine $\mathfrak{gl}_n$ ein.

◯◯ h) Ein-dimensionale Lie-Algebren sind abelsch.

2. Auflösbarkeit und Nilpotenz

◯◯ a) Ist $\mathfrak{g}$ auflösbar, dann stimmen das Radikal von $\mathfrak{g}$ und das Zentrum von $\mathfrak{g}$ überein.

◯◯ b) $\mathfrak{g}$ ist genau dann abelsch, wenn die adjungierte Darstellung treu ist.

◯◯ c) Die Heisenbergalgebra entspricht $\mathfrak{n}_3(K)$.

◯◯ d) Zwei-dimensionale Lie-Algebren sind auflösbar.

◯◯ e) Ein-dimensionale Lie-Algebren sind nilpotent.

◯◯ f) Direkte Summen von nilpotenten Lie-Algebren sind nilpotent.

◯◯ g) Moduln über nilpotenten Lie-Algebren sind irreduzibel.

3. Darstellungen und Moduln

◯◯ a) Direkte Summanden sind Untermoduln.

◯◯ b) Ein endlich-dimensionaler Modul hat nur endlich viele irreduzible Komponenten.

◯◯ c) Treue Darstellungen korrespondieren zu irreduziblen Moduln.

◯◯ d) $(V \oplus W) \otimes_K X \cong (V \otimes_K X) \oplus (W \otimes_K X)$

◯◯ e) $M \subseteq M'$ Untermodul, dann gilt $\dim_K M \leq \dim_K M'$

◯◯ f) Ein Modulhomomorphismus $\varphi : M \oplus M' \to W$ ist genau dann injektiv, wenn $\varphi|_M$ und $\varphi|_{M'}$ injektiv sind.

◯◯ g) Ein Modulhomomorphismus $\varphi : M \oplus M' \to W$ ist genau dann surjektiv, wenn $\varphi|_M$ und $\varphi|_{M'}$ surjektiv sind.

4. Bilinear- und Killingform

◯◯ a) Bilinearformen sind assoziativ.

◯◯ b) Ist die adjungierte Darstellung treu, dann ist die Lie-Algebra halbeinfach.

◯◯ c) Der Casimir-Operator eines Tensorprodukts ist das Tensorprodukt der beiden Operatoren.

◯◯ d) Gibt es kein nicht-triviales auflösbares Ideal in $\mathfrak{g}$, dann ist die Killingform die Nullform.

◯◯ e) Der Casimir-Operator ist injektiv.

◯◯ f) Für abelsche Lie-Algebren ist der Casimir-Operator trivial.