Prof. Dr. M. Reineke
Dr. M. Boos

WiSe 2014/15

Übungen zur Vorlesung „Kommutative Algebra“

9. Übungsblatt

Abgabe am 17.12.2014 bis 16 Uhr (in der Übung oder im BK65)

Aufgabe 1. Es seien A ein Ring und $S \subset A$ multiplikativ abgeschlossen. Zeigen Sie:

a) Ist $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal, so ist $S^{-1}\mathfrak{a}$ ein Ideal in $S^{-1}A$.

b) Jedes Ideal in $S^{-1}A$ ist von der Form $S^{-1}\mathfrak{a}$ für ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$.

c) Die Abbildung $\mathfrak{p} \mapsto S^{-1}\mathfrak{p}$ induziert eine Bijektion zwischen $\{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}$ und $\mathrm{Spec}(S^{-1}A)$.

Aufgabe 2. Sei A ein Ring.

1. Für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subseteq A$ habe der lokale Ring $A_{\mathfrak{p}}$ keine nicht-trivialen nilpotenten Elemente.

   Zeigen Sie, dass dann A keine nicht-trivialen nilpotenten Elemente enthält.

2. Wenn für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subseteq A$ der lokale Ring $A_{\mathfrak{p}}$ ein Integritätsring ist, ist dann ebenfalls A ein Integritätsring?

Aufgabe 3. Es sei A ein Ring. Ein multiplikatives System S in A heißt *saturiert*, wenn

$$xy \in S \Longleftrightarrow x \in S \text{ und } y \in S.$$

Zeigen Sie:

1. S ist genau dann saturiert, wenn $A \backslash S$ eine Vereinigung von Primidealen ist.

2. Ist S ein beliebiges multiplikatives System in A, dann existiert ein eindeutiges kleinstes multiplikatives saturiertes System $\overline{S}$, das S enthält. Es gilt

$$\overline{S} = A \backslash \bigcup \{\mathfrak{p} \subset A \text{ prim} \mid \ S \cap \mathfrak{p} = \emptyset\},$$

   $\overline{S}$ heißt *die Saturierung von* S.

Berechnen Sie die Saturierung von $S = 1 + \mathfrak{a}$ für ein Ideal $\mathfrak{a}$ in A.

Aufgabe 4. Es seien A ein Ring, S ein multiplikatives System in A sowie M und N zwei A-Moduln.

Zeigen Sie:

$$S^{-1}(M \otimes_A N) \cong S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N.$$