Prof. Dr. M. Reineke **WiSe 2014/15**
Dr. M. Boos

Übungen zur Vorlesung „Kommutative Algebra“

7. Übungsblatt

Abgabe am 3.12.2014 bis 16 Uhr (in der Übung oder im BK65)

Aufgabe 1. Es seien $(A, +, \cdot)$ ein Ring und M, N, P A-Moduln. Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen wohldefinierte Isomorphismen sind:

1. $$\begin{array}{lcl} (M \otimes_A N) \otimes_A P & \to & M \otimes_A N \otimes_A P \\ (x \otimes y) \otimes z & \mapsto & x \otimes y \otimes z \end{array}$$

2. $$\begin{array}{lcl} M \otimes_A N \otimes_A P & \to & M \otimes_A (N \otimes_A P) \\ x \otimes y \otimes z & \mapsto & x \otimes (y \otimes z) \end{array}$$

3. $$\begin{array}{lcl} (M \oplus_A N) \otimes_A P & \to & (M \otimes_A P) \oplus (N \otimes_A P) \\ (x, y) \otimes z & \mapsto & (x, z) \otimes (y, z) \end{array}$$

4. $$\begin{array}{lcl} A \otimes_A M & \to & M \\ a \otimes x & \mapsto & a \cdot x \end{array}$$

Aufgabe 2. Es seien $(A, +, \cdot)$ und $(B, +, \cdot)$ zwei Ringe, M ein A-Modul, P ein B-Modul und N ein (A, B)-Bimodul.

Zeigen Sie:

1. $M \otimes_A N$ ist auf natürliche Weise ein B-Modul.
2. $N \otimes_B P$ ist auf natürliche Weise ein A-Modul.
3. Es gibt einen kanonischen Isomorphismus
$$(M \otimes_A N) \otimes_B P \cong M \otimes_A (N \otimes_B P)$$
von (A, B)-Bimoduln.

Aufgabe 3. Es seien $(A, +, \cdot)$ und $(B, +, \cdot)$ zwei Ringe, $f : A \to B$ ein Ringhomomorphismus sowie M ein endlich erzeugter A-Modul.

Zeigen Sie, dass dann der Modul $M_B = B \otimes_A M$, der durch Erweiterung der Skalare entsteht, als B-Modul endlich erzeugt ist.

Aufgabe 4. Es seien $(A, +, \cdot)$ ein Ring, $\mathfrak{a}$ ein Ideal und M ein A-Modul.

Zeigen Sie, dass $(A/\mathfrak{a}) \otimes_A M$ isomorph zu $M/\mathfrak{a}M$ ist.

Aufgabe 5. Es sei $(A, +, \cdot)$ ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$. Es seien weiter endlich erzeugte A-Moduln M und N gegeben, für die $M \otimes_A N = 0$ gelte.

Zeigen Sie, dass dann schon $M = 0$ oder $N = 0$ gilt. *(Tipp: Nutzen Sie Aufgabe 4, um zu zeigen, dass $M_k := A/\mathfrak{m} \otimes_A M \cong M/\mathfrak{m}M$ gilt. Zeigen Sie, dass aus $M \otimes_A N = 0$ bereits $M_k = 0$ oder $N_k = 0$ folgt. Ist $M_k = 0$, dann folgt mit Nakayamas Lemma schon $M = 0$.)*