Prof. Dr. M. Reineke **WiSe 2014/15**
Dr. M. Boos

Übungen zur Vorlesung „Kommutative Algebra“

3. Übungsblatt

Abgabe am 5.11.2014 bis 16 Uhr (in der Übung oder im BK65)

Aufgabe 1. Es seinen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ Ideale eines Rings $(A, +, \cdot)$. Zeigen Sie:

1. $\mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c}$.
2. $\mathfrak{a} \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) + (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{c})$, falls $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{a}$.
3. $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \cdot (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \subseteq \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$.
4. $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ und insbesondere $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$, falls $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = A$.

Aufgabe 2. Es sei $(A, +, \cdot)$ ein Ring.

1. Gegeben seien Primideale $\mathfrak{p}_1, ..., \mathfrak{p}_n$ und ein Ideal $\mathfrak{a}$, so dass $\mathfrak{a} \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$ gilt. Zeigen Sie, dass dann ein $i \in \{1, ..., n\}$ mit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_i$ existiert. (*Tipp:* Zeigen Sie per Induktion nach n, dass aus $\mathfrak{a} \nsubseteq \mathfrak{p}_i$ (für $1 \leq i \leq n$) bereits $\mathfrak{a} \nsubseteq \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$ folgt.)
2. Gegeben seien Ideale $\mathfrak{a}_1, ..., \mathfrak{a}_n$ und ein Primideal $\mathfrak{p}$, so dass $\bigcap_{i=1}^n \mathfrak{a}_i \subseteq \mathfrak{p}$ gilt. Zeigen Sie, dass dann ein $i \in \{1, ..., n\}$ mit $\mathfrak{a}_i \subseteq \mathfrak{p}$ existiert. Gilt $\bigcap_{i=1}^n \mathfrak{a}_i = \mathfrak{p}$, dann folgt $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_i$ für ein i.

Aufgabe 3. Es seien $(A, +, \cdot)$ ein Ring und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ Ideale von A. Zeigen Sie:

1. $r(\mathfrak{a}) \supseteq \mathfrak{a}$
2. $r(r(\mathfrak{a})) = r(\mathfrak{a})$
3. $r(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) = r(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = r(\mathfrak{a}) \cap r(\mathfrak{b})$
4. $r(\mathfrak{a}) = (1)$ genau dann, wenn $\mathfrak{a} = (1)$.
5. $r(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = r(r(\mathfrak{a}) + r(\mathfrak{b}))$
6. Ist $\mathfrak{a}$ prim, dann gilt $r(\mathfrak{a}^n) = \mathfrak{a}$ für alle $n > 0$.

Aufgabe 4. Es seien $(A, +, \cdot)$ und $(B, +, \cdot)$ zwei Ringe sowie $f : A \to B$ ein Ringhomomorphismus. Es seien $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ Ideale von A und $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$ Ideale von B. Zeigen Sie:

1. $(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)^e = \mathfrak{a}_1^e + \mathfrak{a}_2^e$
2. $(\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2)^e \subseteq \mathfrak{a}_1^e \cap \mathfrak{a}_2^e$
3. $(\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2)^e = \mathfrak{a}_1^e \cdot \mathfrak{a}_2^e$
4. $(\mathfrak{a}_1 : \mathfrak{a}_2)^e \subseteq (\mathfrak{a}_1^e : \mathfrak{a}_2^e)$
5. $r(\mathfrak{a}_1)^e \subseteq r(\mathfrak{a}_1^e)$
6. $(\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2)^c \supseteq \mathfrak{b}_1^c + \mathfrak{b}_2^c$
7. $(\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2)^c = \mathfrak{b}_1^c \cap \mathfrak{b}_2^c$
8. $(\mathfrak{b}_1 \cdot \mathfrak{b}_2)^c \supseteq \mathfrak{b}_1^c \cdot \mathfrak{b}_2^c$
9. $(\mathfrak{b}_1 : \mathfrak{b}_2)^c \subseteq (\mathfrak{b}_1^c : \mathfrak{b}_2^c)$
10. $r(\mathfrak{b}_1)^c = r(\mathfrak{b}_1^c)$