Prof. Dr. M. Reineke **WiSe 2014/15**
Dr. M. Boos

Übungen zur Vorlesung „Kommutative Algebra“

2. Übungsblatt

Abgabe am 29.10.2014 bis 16 Uhr (in der Übung oder im BK65)

Aufgabe 1. Es seien $(R, +, \cdot)$ ein Hauptidealring und $\mathfrak{p} \neq (0)$ ein Primideal in R. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal ist.

Aufgabe 2. Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring, für den $R \neq 0$ gilt. Zeigen Sie, dass in der Menge der Primideale von R mindestens ein minimales Element bezüglich der Inklusion enthalten ist. (*Tipp:* Das Lemma von Zorn kann hier helfen.)

Aufgabe 3. Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit Nilradikal $\mathfrak{n}$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden 3 Aussagen:

1. R besitzt genau ein Primideal.
2. Jedes Element in R ist entweder eine Einheit oder nilpotent.
3. $R/\mathfrak{n}$ ist ein Körper.

Aufgabe 4. Es sei $(R, +, \cdot)$ ein lokaler Ring. Zeigen Sie, dass die Elemente $0 \in R$ und $1 \in R$ die einzigen Idempotenten von R sind. (*Tipp:* Ist e idempotent in R, dann ist auch $1 - e$ idempotent.)