Prof. Dr. M. Reineke
Dr. M. Boos **WiSe 2014/15**

Übungen zur Vorlesung „Kommutative Algebra“

12. Übungsblatt

Abgabe am 21.1.2015 bis 16 Uhr (in der Übung oder im BK65)

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass die Länge eines Moduls ein Funktional auf der Grothendieckgruppe induziert.

Aufgabe 2. Es seien A ein Ring, M ein A-Modul, $(M_i)_i$ eine Kompositionsreihe in M und N ein Untermodul von M. Es sei außerdem $\mathfrak{b}$ ein Ideal in $A[x]$.

Zeigen Sie:

1. Falls $N \cap M_i \neq N \cap M_{i-1}$ für alle i gilt, so ist $N = M$.
2. Die Menge der Leitkoeffizienten aller Elemente aus $\mathfrak{b}$ ist ein Ideal in A.

Aufgabe 3. Es sei A ein noetherscher Ring.

Zeigen Sie, dass dann auch $A[[X]]$ noethersch ist. *(Tipp: Führen Sie den Beweis analog zum Beweis des Hilbertschen Basissatzes und betrachten Sie für ein Ideal $I \subset A[[X]]$ das Ideal*

$$\mathfrak{a} = \{r \in A \mid \exists f \in I : f = rX^d + \sum_{i=d+1}^{\infty} r_i X^i\} \subset A.)$$

Aufgabe 4. Es sei $n \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie, dass $Q(K[X_1, \ldots, X_n])$ als $K[X_1, \ldots, X_n]$-Algebra nicht endlich erzeugt ist. *(Tipp: Der Ring $K[X_1, \ldots, X_n]$ ist faktoriell.)*