Prof. Dr. M. Reineke **WiSe 2014/15**
Dr. M. Boos

Übungen zur Vorlesung „Kommutative Algebra"

11. Übungsblatt

Abgabe am 14.1.2015 bis 16 Uhr (in der Übung oder im BK65)

Aufgabe 1. Es sei k ein Körper.

Zeigen Sie:

1. $M := k((t))/k[[t]]$ ist ein $k[[t]]$-Modul.
2. Für $n \geq 1$ ist $M_n := t^{-n}k[[t]]/k[[t]]$ ein $k[[t]]$-Untermodul von M.
3. Abgesehen von den Moduln M_n gibt es keine weiteren echten $k[[t]]$-Untermoduln von M.

Aufgabe 2. Es sei A ein Ring.

Zeigen Sie:

1. Ist M ein noetherscher A-Modul und $u : M \to M$ ein surjektiver Modulhomomorphismus, dann ist u bereits ein Isomorphismus. *(Tipp: Betrachten Sie die Untermoduln* $\mathrm{Ker}(u^n)$ *für* $n \geq 1$.*)*
2. Ist N ein artinscher A-Modul und $v : N \to N$ ein injektiver Modulhomomorphismus, dann ist v bereits ein Isomorphismus. *(Tipp: Betrachten Sie die Quotientenmoduln* $\mathrm{Coker}(v^n)$ *für* $n \geq 1$.*)*

Aufgabe 3. Es seien A ein Ring und M ein A-Modul. Jede nicht-leere Menge endlich-erzeugter Untermoduln von M habe ein maximales Element bezüglich der Inklusionsrelation. Zeigen Sie, dass M dann ein noetherscher Modul ist.

Aufgabe 4. Es seien A ein Ring, M ein noetherscher A-Modul und $\mathfrak{a}$ der Annulator von M in A.

Zeigen Sie, dass dann $A/\mathfrak{a}$ ein noetherscher Ring ist. *(Tipp: Realisieren Sie Ann(M) als Kern eines passenden Modulhomomorphismus.)*

Gilt die analoge Aussage auch, wenn Sie "noethersch" durch "artinsch" ersetzen?